数理解析研究所講究録
第1912巻 2014年 10-16

A Dynamic Dual through Young's Inequality

岩本誠一* (九州大学·名誉教授), 木村寛 (秋田県立大学),
藤田敏治 (九州工業大学)

Seiichi Iwamoto* (Professor Emeritus, Kyushu University),
Yutaka Kimura (Akita Prefectural University),
Toshiharu Fujita (Kyushu Institute of Technology)

概 要

本報告では、Youngの不等式を通して、多段配分過程における主関数（primal function）とその双対関数（dual function）の間の双対関係を示す。特に2次評価の場合では主過程と双対過程の最適点と最適値は共にフィボナッチ数で表わされ、フィボナッチ相補等式（Fibonacci complementary equality）が成り立つことを示す。さらに主過程に割引きがある場合の多段配分過程についても双対関係を示す。

1 Young's Inequality

n 変数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の2次計画問題として次の最小化問題(P)を考える。

$$
\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] \\ \text{subject to} & \text{(i)} \ \ x \in R^n \\ & \text{(ii)} \ \ x_0 = c. \end{array}
$$

ここに $c \in R$ とする。

補題 1 $p > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ のとき、不等式

$$
xy \le \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \qquad x \ge 0,\ y \ge 0 \tag{1}
$$

が成り立つ。等号は $y = x^{p-1}$ のときに限り成り立つ。このとき、等式

$$
xy = x^p = y^q \tag{2}
$$

が成り立つ。

*本研究は、科学研究費補助金「平成22年度基盤研究(C)」課題番号22540144の助成を受けた。

特に$p = 2$ $(q = 2)$ のとき、不等式

$$xy \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 \quad x \in R^1,\ y \in R^1 \tag{3}$$

が成り立ち、等号は $y = x$ のときに限り成り立つ。またこのとき、等式

$$xy = x^2 = y^2 \tag{4}$$

が成り立つ。以下では不等式 (3) とその等号条件を

$$2xy \leq x^2 + y^2\ ; \qquad x = y \tag{5}$$

の形で活用しよう。

補題 2 定数 c に対して、不等式

$$2c\lambda - 2\lambda^2 \leq (c-x)^2 + x^2 \qquad x \in R^1,\ \lambda \in R^1 \tag{6}$$

が成り立つ。等号は $x = \lambda = \dfrac{c}{2}$ のときに限り成り立つ。このとき、両辺は $\dfrac{1}{2}c^2$ になり、等式

$$(c-x)^2 + x^2 = 2\lambda^2 = c\lambda \tag{7}$$

が成り立つ。

Proof. (5) より、実数 $x,\ \lambda$ に対して、2 つの不等式と等号条件

$$2(c-x)\lambda \leq (c-x)^2 + \lambda^2\ ; \quad c - x = \lambda$$
$$2x\lambda \leq x^2 + \lambda^2\ ; \quad x = \lambda$$

が成立する。辺々加えると、

$$2c\lambda \leq (c-x)^2 + x^2 + 2\lambda^2$$

になり、(6) を得る。この等号は 2 つの等号条件が同時に成り立つとき、すなわち、$x = \lambda = \dfrac{c}{2}$ のとき成り立つ。 □

補題 3 c を定数とする。$(x, y) \in R^2,\ (\lambda, \mu) \in R^2$ のとき、

$$2c\lambda - \lambda^2 - (\lambda - \mu)^2 - 2\mu^2 \leq (c-x)^2 + x^2 + (x-y)^2 + y^2 \tag{8}$$

が成り立つ。等号は $x = \dfrac{2}{5}c,\ y = \dfrac{1}{5}c;\ \lambda = \dfrac{3}{5}c,\ \mu = \dfrac{1}{5}c$ のときに限り成り立つ。このとき、両辺は $\dfrac{3}{5}c^2$ になり、等式

$$(c-x)^2 + x^2 + (x-y)^2 + y^2 = \lambda^2 + (\lambda - \mu)^2 + 2\mu^2 = c\lambda \tag{9}$$

が成り立つ。

Proof. (5) より、実数 $x, y,\ \lambda, \mu$ に対して、4 つの不等式と等号条件

$$\begin{aligned} 2(c-x)\lambda &\le (c-x)^2+\lambda^2\ ; \quad c-x=\lambda \\ 2x(\lambda-\mu) &\le x^2+(\lambda-\mu)^2\ ; \quad x=\lambda-\mu \\ 2(x-y)\mu &\le (x-y)^2+\mu^2\ ; \quad x-y=\mu \\ 2y\mu &\le y^2+\mu^2\ ; \quad y=\mu \end{aligned}$$

が成立する。辺々加えると、

$$2c\lambda \le \left[(c-x)^2+x^2+(x-y)^2+y^2\right]+\left[\lambda^2+(\lambda-\mu)^2+2\mu^2\right]$$

になり、(8) を得る。等号は 4 つの等号条件が同時に成立するとき成り立つ。この 4 元連立 1 次方程式系は唯一の解 $x=\dfrac{2}{5}c,\ y=\dfrac{1}{5}c;\ \lambda=\dfrac{3}{5}c,\ \mu=\dfrac{1}{5}c$ をもつ。 □

補題 4 c を定数とする。$x_0=c,\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n,\ \mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)\in R^n$ のとき、

$$2c\mu_1-\sum_{k=1}^{n-1}\left[\mu_k^2+(\mu_k-\mu_{k+1})^2\right]-2\mu_n^2 \le \sum_{k=0}^{n-1}\left[(x_k-x_{k+1})^2+x_{k+1}^2\right] \tag{10}$$

が成り立つ。等号は

$$(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1},\ x_n) = \frac{c}{F_{2n+1}}(F_{2n-1},\ F_{2n-3},\ \ldots,\ F_3,\ F_1) \tag{11}$$

$$(\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{n-1},\ \mu_n) = \frac{c}{F_{2n+1}}(F_{2n},\ F_{2n-2},\ \ldots,\ F_4,\ F_2) \tag{12}$$

のときに限り成り立つ。このとき、両辺は $\dfrac{F_{2n}}{F_{2n+1}}c^2$ になり、等式

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[(x_k-x_{k+1})^2+x_{k+1}^2\right] = \sum_{k=1}^{n-1}\left[\mu_k^2+(\mu_k-\mu_{k+1})^2\right]+2\mu_n^2 = c\mu_1 \tag{13}$$

が成り立つ。ここに $\{F_n\}$ は**フィボナッチ数列** (*Fibonacci sequence*) を表し、以下の 2 階線形差分方程式（3 項間漸化式）

$$x_{n+2}-x_{n+1}-x_n=0, \qquad x_1=1,\ x_0=0 \tag{14}$$

の解として定義される。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

表 1　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

補題 4 (10) の左辺は、主問題 (P) に対する双対問題の目的関数を表わしている。したがって、主問題 (P) の双対問題は n 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ の最大化問題として次で与えられる：

$$
\text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left[(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2 \right] - \mu_n^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad \mu \in R^n. \end{array}
$$

さらに (13) より、フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ については次の等式が成り立つ。

系 1　(Fibonacci complementary equality)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1} \left[(F_{2n-2k+1} - F_{2n-2k-1})^2 + F_{2n-2k-1}^2 \right] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \left[F_{2n-2k+2}^2 + (F_{2n-2k+2} - F_{2n-2k})^2 \right] + 2F_2^2 \qquad (15) \\
&= F_{2n}
\end{aligned}
$$

これを**フィボナッチ相補等式**という。

2　No Discount Case

以下では p, q は $p > 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ を満たし、c は非負定数とする。さて、$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ の関数

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[(x_k - x_{k+1})^p + x_{k+1}^p \right] + kx_n^p \quad (k \geq 0) \qquad (16)
$$

に対して、$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ の関数 f^* を

$$
f^*(\mu) = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\mu_k^q + (\mu_k - \mu_{k+1})^q \right] + l\mu_n^q \qquad (17)
$$

で定義する。ただし $l = 1 + (1+k)^{-q/p}$.

定理 1 (Primal-dual inequality I) x, μ が非負順序制約

$$c = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0, \quad \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n \geq 0 \tag{18}$$

を満たすとき、

$$x_0\mu_1 \leq \frac{1}{p}f(x) + \frac{1}{q}f^*(\mu) \tag{19}$$

が成り立つ。$x_0 > 0$ の場合、等号は

$$\begin{aligned} (x_k - x_{k+1})^{p-1} &= \mu_{k+1}, \quad x_{k+1}^{p-1} = \mu_{k+1} - \mu_{k+2} \qquad 0 \leq k \leq n-2 \\ (x_{n-1} - x_n)^{p-1} &= \mu_n, \qquad (1+k)x_n^{p-1} = \mu_n \end{aligned} \tag{20}$$

のときに限り成り立つ。この x, μ は

$$f(x) = f^*(\mu) = c\mu_1 \tag{21}$$

を満たす。逆に、x, μ が *(21)* を満たせば、*(19)* の等号が成り立つ。$x_0 = 0$ の場合、不等号が成り立つ。

Proof. 一般に、任意の x, μ に対して

$$x_0\mu_1 = \sum_{k=0}^{n-2}(x_k\mu_{k+1} - x_{k+1}\mu_{k+2}) + x_{n-1}\mu_n$$

である。これから

$$x_0\mu_1 = \sum_{k=0}^{n-2}\left[(x_k - x_{k+1})\mu_{k+1} + x_{k+1}(\mu_{k+1} - \mu_{k+2})\right] + (x_{n-1} - x_n)\mu_n + x_n\mu_n$$

が成り立つ。制約 (18) を満たすときは、Young の不等式より

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n-2}\left[(x_k - x_{k+1})\mu_{k+1} + x_{k+1}(\mu_{k+1} - \mu_{k+2})\right] + (x_{n-1} - x_n)\mu_n + \alpha x_n \cdot \alpha^{-1}\mu_n \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-2}\left[\frac{1}{p}(x_k - x_{k+1})^p + \frac{1}{q}\mu_{k+1}^q + \frac{1}{p}x_{k+1}^p + \frac{1}{q}(\mu_{k+1} - \mu_{k+2})^q\right] \\ &\qquad + \frac{1}{p}(x_{n-1} - x_n)^p + \frac{1}{q}\mu_n^q + \frac{1}{p}(\alpha x_n)^p + \frac{1}{q}(\alpha^{-1}\mu_n)^q \end{aligned}$$

である。ここに α は

$$\alpha^p = 1 + k \text{ i.e., } \alpha = (1+k)^{1/p} \quad \text{および} \quad 1 + \alpha^{-q} = l \text{ i.e., } \alpha = (l-1)^{-1/q}$$

を満たすようにとる。したがって、

$$l = 1 + (1+k)^{-q/p} \text{ i.e., } k = (l-1)^{-p/q} - 1$$

である。整理すると、上式は

$$\sum_{k=0}^{n-2}[\,(x_k - x_{k+1})\mu_{k+1} + x_{k+1}(\mu_{k+1} - \mu_{k+2})\,] + (x_{n-1} - x_n)\mu_n + x_n\mu_n$$

$$\leq \frac{1}{p}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left[(x_k - x_{k+1})^p + x_{k+1}^p\right] + kx_n^p\right\} + \frac{1}{q}\left\{\sum_{k=1}^{n-1}[\,\mu_k^q + (\mu_k - \mu_{k+1})^q] + l\mu_n^q\right\}$$

になる。よって、不等式 (19) が成り立つ。等号は (20) のときに限り成り立つ。 □

(16) において $p = 2\ (q = 2),\ k = 0$ の場合が、主問題 (P) の目的関数を表している。

3 Discounted Case

$\rho > 0$ とし、$x = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ の関数

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\rho^k\left[(x_k - x_{k+1})^p + x_{k+1}^p\right] + \rho^{n-1}kx_n^p \quad (\,k \geq 0\,)$$

に対して、$\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ の関数 g^* を

$$g^*(\mu) = \sum_{k=1}^{n-1}\rho^{k-1}\left[\,\mu_k^q + (\mu_k - \rho\mu_{k+1})^q\right] + \rho^{n-1}l\mu_n^q$$

で定義しよう。ただし $l = 1 + (1+k)^{-q/p}$.

定理 2 (Discounted primal-dual inequality I) $x,\,\mu$ が非負順序制約

$$c = x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0, \quad \mu_1 \geq \rho\mu_2 \geq \cdots \geq \rho^{n-1}\mu_n \geq 0 \tag{22}$$

を満たすとき、

$$x_0\mu_1 \leq \frac{1}{p}g(x) + \frac{1}{q}g^*(\mu) \tag{23}$$

が成り立つ。$x_0 > 0$ の場合、等号は

$$\begin{array}{lll} (x_k - x_{k+1})^{p-1} = \mu_{k+1}, & x_{k+1}^{p-1} = \mu_{k+1} - \rho\mu_{k+2} & 0 \leq k \leq n-2 \\ (x_{n-1} - x_n)^{p-1} = \mu_n, & (1+k)x_n^{p-1} = \mu_n & \end{array} \tag{24}$$

のときに限り成り立つ。この $x,\,\mu$ は

$$g(x) = g^*(\mu) = c\mu_1 \tag{25}$$

を満たす。逆に、$x,\,\mu$ が *(25)* を満たせば、*(23)* の等号が成り立つ。$x_0 = 0$ の場合、不等号が成り立つ。

参考文献

[1] E.F. Beckenbach and R.E. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Ergebnisse **30**, 1961.

[2] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[3] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming I, II, III, J. Math. Anal. Appl. **58**(1977), 113–134, 247–279, 439–448.

[4] S. Iwamoto, Dynamic programming approach to inequalities, J. Math. Anal. Appl. **58**(1977), 687–704.

[5] S. Iwamoto, On Bellman's allocation processes, *J. Math. Anal. Appl.* **111**(1985), no. 1, 65–89.

[6] S. Iwamoto, R.J. Tomkins and C.-L. Wang, Inequalities and mathematical programming III, Proceedings of the 5th International Conference on General Inequalities, Oberwolfach, West Germany, May 1986, *General Inequalities* **V**, Ed. W. Walter, Bikhauser Verlag, Basel and Stuttugart, ISNM (1987), 419–432.

[7] 岩本誠一、動的計画論、九大出版会、1987.

[8] 岩本誠一、最適経路 — フィボナッチから黄金へ — 、「不確実性下における意思決定問題」、京大数理研講究録 1734、２０１１年３月、ｐｐ．１９６−２０４．

[9] S. Iwamoto, On Fibonacci identities, *preprint.*

[10] 岩本誠一、最適化の数理 II ベルマン方程式、知泉書館、2013.