

折り紙ユニットを用いた凸多面体の構成 —相互依存型決定過程によるアプローチ—

九州工業大学・大学院工学研究院 藤田 敏治
Toshiharu Fujita

Graduate School of Engineering, Kyushu Institute of Technology
九州工業大学・工学部 長友 健太郎

Kentaro Nagatomo
Faculty of Engineering, Kyushu Institute of Technology

1 はじめに

折り紙を用いて多面体を作成する代表的な手法として、折り紙ユニットと呼ばれる部品を複数組み合わせて作成する方法がある。折り紙ユニットとは、1枚の正方形あるいは長方形の折り紙から作成されるもので、継手や差し込み口をもつ多角形の形状をしたものである。ユニットの継手が、他のユニットの差し込み口に差し込まれることで、ユニット同士がつながっていく。1種類（場合によっては数種類）のユニットをもとに、折り目を工夫して組み合わせることで多様な多面体を作成できることが魅力である。代表的なユニットに園部式と呼ばれるものがあるが、他にも様々なユニットが考案され、美しい多面体を作成することが可能である。例えば [5, 6] の中で三村は、正方ユニットおよび三角ユニット、三角正方ユニットと呼ばれるものを用いて、正多面体や準正多面体をはじめ実に様々な多面体の構成方法を与えている。また、[7, 8, 9, 10] においては一般三角ユニットなるものが考案され、星形正多面体なども正確に実現されている。

このように多くの多面体が折り紙ユニットで作成できることは知られているが、一方で、折り紙ユニットで作成可能な多面体にはどのようなものがあり、いくつあるのか、といったことは調べられていない。本報告では、凸多面体に制限はするが、[5, 6] で用いられた正方ユニットおよび三角ユニットから如何なる多面体が作成できるかについて動的計画法を用いて調べていく。

2 正方ユニットによる凸多面体の作成

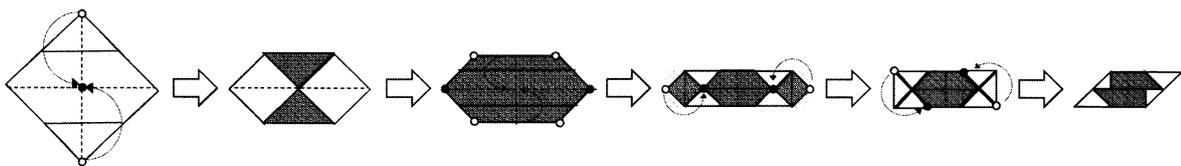


図 2.1: 正方ユニットの折り方

正方ユニットとは、正方形あるいは正方形を折ってできる図形を面として持つ立体を作成可能なもので、その作成方法を図 2.1 に示す。同種の立体を作成可能な園部式ユニットとの違いは、折り紙の両面が表に出てくると、差し込みが浅い点である。よって両面折り紙を用いることでより細かい模様の立体が作成でき、かつ複雑な折り目でも比較的簡単に組み合わせることが可能となっている。正方ユニットにおいて立体の面を構成するのは、中央の正方形部分である（図 2.2 参照）。残りの 2 個の直角 2 等辺三角形部分は継手となり、別のユニットとの接続に用いられる。図 2.3 のように、1 個の正方ユニットに対し 2 個のユニットが接続される。



図 2.2: 正方ユニット

本研究は科研費 23654038 の助成を受けたものです。

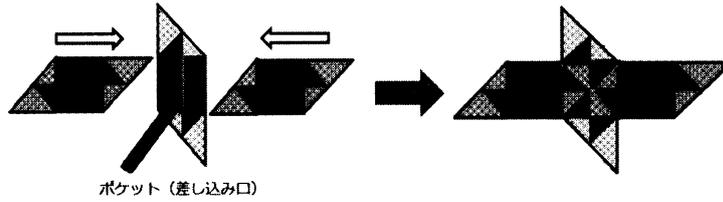


図 2.3: 正方ユニットの接続

ここで、例えば2個の正方ユニットにより構成可能な凸多面体を考える。この場合、その2個を接続したものの(図2.4)において、正方形2個が連なった長方形部分の図形が実際に立体の面となりうる部分に相当する。(以後、実際に立体が作成可能か否かに関わらず、この立体の面になりうる部分を展開図と呼ぶこととする。)これが継手によって接続されていくため、1個のユニットに対応する正方形の各辺を単位として、展開図内でどのように辺を組み合わせれば凸多面体になるかを考えればよい。この種の問題は、Lubiw と O'Rourke が [2, 4] において扱った問題と本質的に同じものであり、[3] において、相互依存型決定過程問題として動的計画の枠組みで定式化されている。よって、ここでは、その結果を利用し、凸多面体の構成を考えていく。

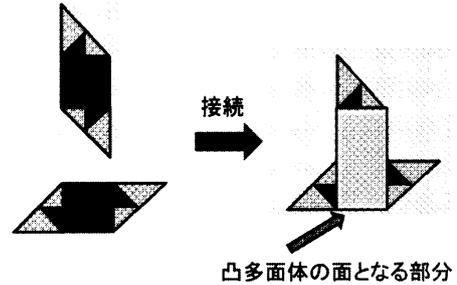


図 2.4: 正方ユニットと展開図

2.1 相互依存型決定過程による定式化

相互依存型決定過程とは、nonserialな状態推移 ([1, 11]) をもつ決定過程の一種で、複数の決定過程が互いにその利得関数を通して再帰的に依存しているものである。ここで考える凸多面体構成問題は2種の決定過程からなり、一方の決定過程における利得関数が、他方の最適値の関数として定まる。

正方形4個を縦に連ねた展開図(図2.5)を例に、[3] で扱った凸多面体構成問題の概略を述べる。まず、展開図において立方体の頂点・辺に対応する部分をそれぞれ図1のように $v_0, v_1, v_2, \dots, v_9$ および $e_0, e_1, e_2, \dots, e_9$ とおく。さらに、各頂点 v_i に対応する角の大きさを α_i ($0^\circ < \alpha_i < 360^\circ$) とおく。このとき、凸多面体になるための条件を考えながら辺と辺の可能な組み合わせを考える。

相互依存型決定過程における2つの状態空間は共通にとられ、以下のように定める。

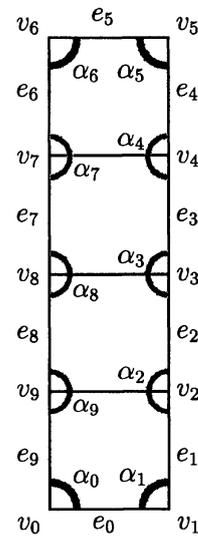


図 2.5: 正方形4個からなる展開図

$$X = \{(i, j, I) \mid i, j = 0, 1, \dots, 10, I \subset \{0, 1, \dots, 9\}\}$$

状態 $(i, j, I) \in X$ は、組み合わせが未決定の連続する辺を構成する頂点集合 $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_j\}$ および、この状態以前に頂点 v_i に集まった角 α_i のインデックス集合 I をあらわす。よって、初期状態は $x_0 = (0, 10, \phi)$ である。ただし、頂点 v_{10} は頂点 v_0 と同じ頂点をあわらし、便宜上の表現として加えている。

また、終了状態集合も共通にとられ

$$T = \{(i, j, I) \in X \mid i = j\}$$

で与えられる。すなわち、考慮すべき辺がなくなった時が終了期である。

次に、決定空間は

$$U = \{(a, b) \mid 0 \leq a < b \leq 9, b - a = 2n + 1 (n = 0, 1, 2, \dots)\}$$

で、決定 $(a, b) \in U$ は、辺 e_a と e_b を重ね合わせることをあらわし、条件式 $b - a = 2n + 1$ は、組み合わせる辺が継手に相当する部分と差し込み口に相当する部分のペアでなければならないことをあらわす。展開図において継手と差し込み口が交互に現れることから、間にある辺の数が偶数 $(0, 2, 4, \dots)$ でなければならないのである。なお、状態 $(i, j, I) \in X$ に対する可能決定集合は

$$U(i, j, I) = \{(i, b) \in U \mid i < b < j\}$$

ととる。これは対象とする頂点間の辺のなかで、最も若い番号の辺とどの辺を重ね合わせるかをあらわす決定の集合である。

確定的状態推移は、現状態 $(i, j, I) \in X \setminus T$ と決定 $(a, b) \in U(i, j, I)$ に対し、次で定められる (注：可能決定集合の定義より $i = a$ が成り立つ)。

$$f_1((i, j, I), (a, b)) = (a + 1, b, \phi)$$

$$f_2((i, j, I), (a, b)) = \begin{cases} (b + 1, j, I \cup \{i, j\}) & b \neq j - 1 \\ (i, a, I \cup \{i, j\}) & b = j - 1 \end{cases}$$

ただし、 f_2 における I の更新時、要素 10 は 0 と同一視する (同一の頂点をあらわすため)。

状態 $f_1((i, j, I), (a, b))$ は、辺 e_a を e_b に重ね合わせた際の、いわゆる前半の残りを現す頂点集合に対応し、 $f_2((i, j, I), (a, b))$ は後半のそれに対応する。この際、角 α_i, α_j は後半に位置し、必ず (重ね合わせの結果) 同一頂点となる $v_i = v_{b+1}$ に集まる。これがインデックス集合 I の更新に反映されている。

さらに、

$$c(i, j, I) = \sum_{k \in \{i, j\} \cap I^c} \alpha_k$$

とする。ただし、ここでも $\{i, j\} \cap I^c$ における 0 と 10 は同一視し、 I の補集合については

$$I^c = \{0, 1, \dots, 9\} \setminus I$$

とする。また $i = j$ の時 $\sum_{k \in \{i, j\} \cap I^c}$ は $\sum_{k \in \{i\} \cap I^c}$ を意味するものとし、もし $\sum_{k \in \phi}$ となった時の値は 0 とする。この $c(i, j, I)$ を用いて、終端利得関数を次のように定める。

$$r_G(i, j, I) = I_{(360, \infty)}(c(i, j, I)) \quad (= I_{(360, \infty)}(\alpha_i) = 0)$$

$$q_G(i, j, I) = c(i, j, I) \quad (= 0)$$

このとき、解くべき問題は初期状態 $\bar{x}_0 = (0, 10, \phi)$ に対する主決定過程問題

$$\begin{aligned} P(x_0) \quad & \text{Minimize } r(x_0, u_0) \vee r(x_1, u_1) \vee \dots \vee r(x_{M-1}, u_{M-1}) \vee r_G(x_M) \\ & \text{subject to } x_{n+1} = f_1(x_n, u_n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ & \quad \quad \quad u_n \in U(x_n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ & \quad \quad \quad N = N(x_0, u_0, x_1, u_1, \dots) \end{aligned}$$

で与えられ、副決定過程問題は

$$\begin{aligned} Q(x, u) \quad & \text{Minimize } I_{(360, \infty)} \left[c(x) + q(x_0, u_0) + q(x_1, u_1) + \cdots + q(x_{M-1}, u_{M-1}) + q_G(x_M) \right] \\ & \text{subject to } x_0 = f_2(x, u) \\ & \quad x_{n+1} = f_Y(x_n, u_n) \quad n = 0, 1, \dots, M-1 \\ & \quad u_n \in U(x_n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \\ & \quad M = M(x_0, u_0, x_1, u_1, \dots) \end{aligned}$$

となる。ただし、 \vee は最大演算子 ($a \vee b = \max(a, b)$) とし、 $x_0 = f_2(x, u) \notin T$ なる (x, u) に対し

$$r(x, u) = \min_{x_{n+1}=f_2(x_n, u_n), u_n \in U(x_n)} I_{(360, \infty)} \left[c(x) + q(x_0, u_0) + q(x_1, u_1) + \cdots + q_G(x_M) \right]$$

であり、また K を $K > 360$ なる定数とおき、 $x_0 = f_1(x, u) \notin T$ なる (x, u) に対し

$$q(x, u) = c(x) \vee \left(K \times \min_{x_{n+1}=f_1(x_n, u_n), u_n \in U(x_n)} \left[r(x_0, u_0) \vee r(x_1, u_1) \vee \cdots \vee r_G(x_N) \right] \right)$$

である。おおまかに言えば、副決定過程では、辺を接続した結果、重なる頂点に集まる角の大きさの和が 360° 以下か否かを判定し、主決定過程では、 360° 以下が全ての頂点で満たされているかを判定している。いずれも最小値が 0 のとき、条件は満たされている。

この問題に対する相互依存型再帰式は

$$W(x) = 0 \quad x \in T$$

$$W(x) = \min_{u \in U(x)} \left[Z \left(f_2(x, u), c(x) \right) \vee W(f_1(x, u)) \right] \quad x \notin T$$

$$Z(x, \mu) = I_{(360, \infty)}(\mu) \quad x \in T, \mu \in \mathbf{R}$$

$$Z(x, \mu) = \min_{u \in U(x)} Z \left(f_2(x, u), \mu + \left[c(x) \vee \{ K \times W(f_1(x, u)) \} \right] \right) \quad x \notin T, \mu \in \mathbf{R}$$

で与えられる。

求める最適値は $W(0, 10, \phi)$ であり、その値が 0 のとき、凸多面体は構成可能となり、最適政策が辺の組み合わせ方を与える。

2.2 正方ユニットで構成される凸多面体

2.1 節の再帰式を計算した結果を以下に示す。最適値は 0 となり、凸多面体は作成可能。辺の組み合わせは次の 12 通りが得られた。

- | | |
|--|--|
| [1] $e_0 - e_1, e_2 - e_5, e_3 - e_4, e_6 - e_9, e_7 - e_8$ | [2] $e_0 - e_1, e_2 - e_9, e_3 - e_8, e_4 - e_7, e_5 - e_6$ |
| [3] $e_0 - e_3, e_1 - e_2, e_4 - e_5, e_6 - e_9, e_7 - e_8$ | [4] $e_0 - e_3, e_1 - e_2, e_4 - e_9, e_5 - e_8, e_6 - e_7$ |
| [5] $e_0 - e_5, e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_6 - e_7, e_8 - e_9$ | [6] $e_0 - e_5, e_1 - e_2, e_3 - e_4, e_6 - e_9, e_7 - e_8$ |
| [7] $e_0 - e_5, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_6 - e_7, e_8 - e_9$ | [8] $e_0 - e_5, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_6 - e_9, e_7 - e_8$ |
| [9] $e_0 - e_7, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_5 - e_6, e_8 - e_9$ | [10] $e_0 - e_7, e_1 - e_6, e_2 - e_5, e_3 - e_4, e_8 - e_9$ |
| [11] $e_0 - e_9, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_5 - e_8, e_6 - e_7$ | [12] $e_0 - e_9, e_1 - e_8, e_2 - e_7, e_3 - e_6, e_4 - e_5$ |

なお、ここで現れる凸多面体には体積 0 の 2 面体も含まれる。この結果から、図 2.5 の展開図により構成可能な凸多面体は 5 種類で、2 面体を除くと 2 種類になる。4 個の正方ユニットにより作成された凸多面体、および辺の組み合わせ [1]~[12] との対応を図 2.6 に示す。辺の組み合わせとの対応がない図形は、同じく 4 個の正方ユニットから構成されるが、ユニットの接続を変えた場合に (すなわち異なる展開図から) 生じるものである。

定式化においては、展開図として図 2.5 のものを対象としたが、その他の展開図についても頂点数と各頂点に対応する角の大きさ $\{\alpha_i\}$ を適切に設定することで再帰式をそのまま利用できる。例えば、1 個の正方ユニットに対応する展開図 (図 2.7A)、2 個の正方ユニットに対応する展開図 (図 2.7B) および 3 個の正方ユニットに対応する展開図 (図 2.7C,D) に対しては、それぞれ

$$x_0 = (0, 4, \phi), \quad \{\alpha_i\} = \{90, 90, 90, 90\}$$

$$x_0 = (0, 6, \phi), \quad \{\alpha_i\} = \{90, 90, 180, 90, 90, 180\}$$

$$x_0 = (0, 8, \phi), \quad \{\alpha_i\} = \{90, 90, 180, 180, 90, 90, 180, 180\}$$

$$x_0 = (0, 8, \phi), \quad \{\alpha_i\} = \{90, 180, 90, 90, 270, 90, 90, 180\}$$

とし、再帰式を用いて $W(x_0)$ を求めればよい。

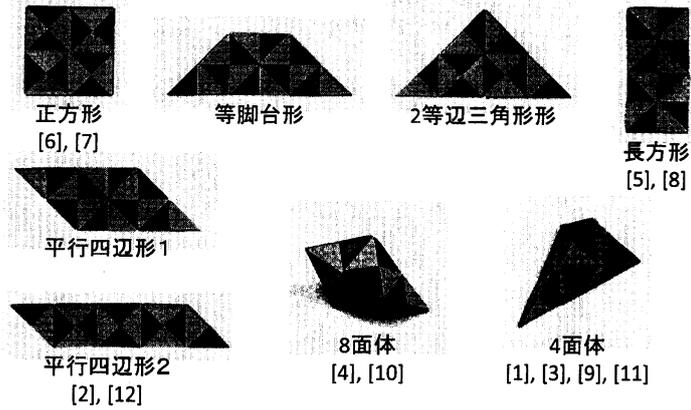


図 2.6: 4 個の正方ユニットによる凸多面体

2.3 三角ユニットで構成される凸多面体

三角ユニットとは、正三角形あるいは正三角形を折ってできる図形を面として持つ立体を作成可能なもので、作成方法等の詳細は [5] に譲る。三角ユニットは、図 2.8 の形をしており、中央の (正三角形 2 つからなる) ひし形部分が立体の面を構成し、残りの 2 つの正三角形部分が継手となる。正方ユニットと同様に、1 個のユニットに対し 2 個のユニットが接続される。

この三角ユニットを用いて作成可能な凸多面体を調べるには、正方ユニットに対して導いた解法が適用できる。例えば、4 個の三角ユニットを図 2.9 のように接続したのものに対しては、展開図に相当する部分の図形から

$$x_0 = (0, 10, \phi)$$

$$\{\alpha_i\} = \{240, 120, 60, 240, 60, 240, 60, 240, 60, 120\}$$

とし、 $W(x_0)$ を求めればよい。この場合、最適値は 0 となり、凸多面体は作成可能。辺の組み合わせは次の 8 通りが得られた。

- | | |
|---|---|
| [1] $e_0 - e_1, e_2 - e_3, e_4 - e_9, e_5 - e_8, e_6 - e_7$ | [2] $e_0 - e_1, e_2 - e_9, e_3 - e_8, e_4 - e_5, e_6 - e_7$ |
| [3] $e_0 - e_3, e_1 - e_2, e_4 - e_5, e_6 - e_9, e_7 - e_8$ | [4] $e_0 - e_3, e_1 - e_2, e_4 - e_9, e_5 - e_8, e_6 - e_7$ |
| [5] $e_0 - e_5, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_6 - e_7, e_8 - e_9$ | [6] $e_0 - e_5, e_1 - e_4, e_2 - e_3, e_6 - e_9, e_7 - e_8$ |
| [7] $e_0 - e_7, e_1 - e_6, e_2 - e_3, e_4 - e_5, e_8 - e_9$ | [8] $e_0 - e_9, e_1 - e_8, e_2 - e_3, e_4 - e_5, e_6 - e_7$ |

これは、正 8 面体の展開図にあたるが、他に 6 面体と 3 種の 2 面体 (2 等辺三角形, 平行四辺形, 台形) が作成可能であることが分かった。

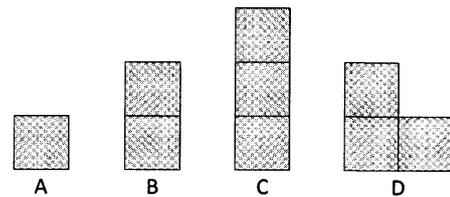


図 2.7: 1~3 個の正方ユニットに対応する展開図

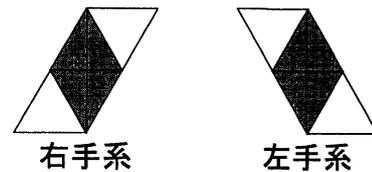


図 2.8: 三角ユニット

3 ユニット接続問題

前節において、特定の形に接続したユニットからどのような多面体が構成可能かについては解決した。しかし、一定数のユニットを利用した場合でも、その接続の仕方によって展開図に相当する部分の形が異なり、作成できる凸多面体も一般に異なる。よって、ユニットのあらゆる接続の仕方を考慮しなければならないが、ユニット数が増えるにつれ、その種類は爆発的に増加する。そこで、ユニットの接続法も含めて動的計画問題として定式化し、一定数のユニットを用いてどのような凸多面体が構成可能であるかを考える。

正方ユニットに比べて、三角ユニットの場合がより細かく接続状況を考慮する必要があるため、ここでは三角ユニットについて説明を進める。(正方ユニットの場合も同様に処理することは可能である。)

定式化にあたり、初期状態を1個のユニットに対応する展開図(すなわちひし形)とし、ステージごとにユニットを1個接続していき、対応する展開図を次状態として表す。そして、最終状態として現れる展開図に前節の解法を適用して、その展開図で凸多面体が作成可能か否かを判定する。

まず、状態は展開図における頂点数 d と各頂点に対応する角の大きさ $\{\alpha_i\}$ ($\alpha_i > 0$) からなる $y = (d, \{\alpha_i\})$ とし、決定はユニットの種類 H とユニットを接続する辺番号 m からなる (H, m) であらわす。なお、ここでいう頂点とは、三角ユニット1個に対応するひし形の頂点で、重なるものを同一視したものである。反時計回りに v_0, v_1, \dots とし(図 2.9 参照)、頂点 v_i に対応する角の大きさを α_i であらわす点は2節と同じである。辺についても、2節同様に辺 $v_i v_{i+1}$ を e_i で表すこととし、ここでは、偶数番号の辺が継手部分に、奇数番号の辺が接続口に対応するものとする。そして、ユニットの種類 H とは、その期に接続する三角ユニットの種類を表すものであり、 $H = R$ のときは右手系ユニットを、 $H = L$ のときは左手系ユニットを接続するものとする。例えば、決定 $(R, 3)$ は右手系ユニットを e_3 に接続することを表す。ここで、追加する側のユニットについてはひし形のどの辺を接続するかの指定が不要である点、補足しておく。まず、接続される側の辺番号を指定することで、そこが継手か接続口かが決まるので、追加する側のユニットにおいて接続する辺が2つに限定される。そして、ユニットの対称性から、その2つのうちいずれを選んでも結果としてできる展開図は同じになるのである。

以上のことから、状態空間と決定空間、可能決定集合はそれぞれ

$$\text{状態空間} : Y = \{(d, \{\alpha_i\}) \mid d = 4, 5, \dots; \alpha_i = 60, 120, \dots, 360 \ (i = 0, 1, \dots, d-1)\}$$

$$\text{決定空間} : V = \{(H, m) \mid H = R, L, m = 0, 1, \dots\}$$

$$\text{可能決定集合} : V(d, \{\alpha_i\}) = \{(H, m) \in V \mid m \leq d-1\} \quad (d, \{\alpha_i\}) \in Y$$

となる。なお、初期状態は右手系と左手系のどちらを選択しても、作成可能な展開図の形は本質的に変わらないので、右手系である $y_0 = (4, \{60, 120, 60, 120\})$ とする。また、現状態 $y = (d, \{\alpha_i\})$ と決定 $v = (H, m) \in V(y)$ に対する次状態を以下のように定める。

まず

$$\beta_1^1 = 60, \beta_2^1 = 120, \beta_3^1 = 60, \beta_4^1 = 120$$

$$\beta_1^2 = 120, \beta_2^2 = 60, \beta_3^2 = 120, \beta_4^2 = 60$$

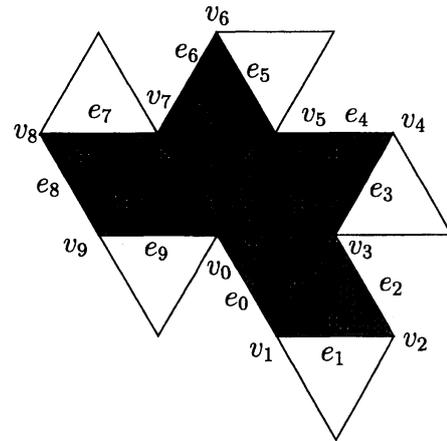


図 2.9: 4 個の接続例

とおき、「 $H = R, m$:偶数」または「 $H = L, m$:奇数」のとき $\tau = 1$, 「 $H = L, m$:偶数」または「 $H = R, m$:奇数」のとき $\tau = 2$ とする。このとき,

$$\alpha'_i = \begin{cases} \alpha_i & m-d+1 < i < m \\ \alpha_i + \beta_1^\tau & i = m \\ \beta_2^\tau & i = m+1 \\ \beta_3^\tau & i = m+2 \\ \alpha_{i-2} + \beta_4^\tau & i = (m+3) \pmod{d+2} \\ \alpha_{i-2} & m+4 \leq i \leq d \end{cases}$$

および $d' = d+2$ がユニットを 1 個追加した際の展開図部分をあらわす。ここで, 冗長な辺を削除するため, $\alpha'_i = 360$ なる i が存在すれば,

$$\alpha''_j = \alpha'_j \quad (j = 0, 1, \dots, i-2), \quad \alpha''_{i-1} = \alpha'_{i-1} + \alpha'_{i+1}, \quad \alpha''_j = \alpha'_{j+2} \quad (j = i, i+1, \dots, d'-3)$$

ただし, $i = 0$ のときは

$$\alpha''_0 = \alpha'_1 + \alpha'_9, \quad \alpha''_j = \alpha'_{j+1} \quad (j = 1, 2, \dots, d'-3)$$

$i = 1$ のときは

$$\alpha''_0 = \alpha'_0 + \alpha'_2, \quad \alpha''_j = \alpha'_{j+2} \quad (j = 1, 2, \dots, d'-3)$$

$i = 9$ のときは

$$\alpha''_0 = \alpha'_0 + \alpha'_8, \quad \alpha''_j = \alpha'_j \quad (j = 1, 2, \dots, d'-3)$$

とし, $\{\alpha''_i\}$ と $d'-2$ をあらためて $\{\alpha'_i\}$, d' とみなす。この操作を $\alpha'_i = 360$ なる i が存在しなくなるまで繰り返す。このとき, 状態推移法則 f は次式で定義される。

$$f(y, v) = (d', \{\alpha'_i\})$$

利得関数 R および終端利得関数 K については

$$R((d, \{\alpha_i\}), (H, m)) = \begin{cases} 1 & (\exists i; \alpha_i > 360) \\ I_{(360, \infty)}(\alpha_m + \beta_1^\tau) \vee I_{(360, \infty)}(\alpha_{m+1} + \beta_4^\tau) & (\text{その他}) \end{cases}$$

$$K((d, \{\alpha_i\})) = (\{\alpha_i\} \text{ を与えたときの } P(0, d, \phi) \text{ の最適値})$$

と定める。ただし, $m+1 = d$ のとき, $m+1$ は 0 とみなし, $P(0, d, \phi)$ は第 2 節の主決定過程問題を表す。利得関数値は, ある期の展開図において, すでに頂点に集まっている角の大きさが 360° を超えているか, ユニットを接続することで頂点に集まる角の大きさが 360° を超えれば 1 となり, そうでない場合は 0 となる。また, 終端利得関数は, 終端状態であらわされる展開図に対して, 凸多面体が構成可能であれば 0 を, そうでなければ 1 をとる。そして, 期数 N を

$$N = (\text{接続する 3 角ユニットの数}) - 1$$

と定めるとき, $N+1$ 個の三角ユニットで凸多面体が構成可能かどうかを調べる問題は次の最大型評価最小化問題となる。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } R(y_0, v_0) \vee R(y_1, v_1) \vee \dots \vee R(y_{N-1}, v_{N-1}) \vee K(y_N) \\ & \text{subject to } y_{n+1} = f(y_n, v_n), \quad v_n \in V(y_n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

表 1: 展開図数

ユニット数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
正方ユニット	1	1	2	5	12	35	108	369	1280	4587	16472	59323
三角ユニット	1	2	9	40	238	1514	10145	68657	458118			

この問題の最小値が0のとき、 $N + 1$ 個の三角ユニットにより凸多面体は構成可能となる。また、その時の最適政策が凸多面体を構成するための展開図を与え、さらに最終状態に対応して解かれた主決定過程問題の最適政策が凸多面体となるための辺の組み合わせを与える。

最大型評価最小化問題に対する部分問題は、

$$W^n(y_n) = \min_{\substack{y_{m+1}=f(y_m, v_m) \\ v_m \in V(y_m) \\ m=n, n+1, \dots, N-1}} [R_n(y_n, v_n) \vee \dots \vee R_{N-1}(y_{N-1}, v_{N-1}) \vee K(y_N)],$$

$$y_n \in X, n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W^N(y_N) = K(y_N), \quad y_N \in X$$

と表され、次の再帰式が導かれる。

$$W^n(y) = \min_{v \in V(y)} [R_n(y, v) \vee W^{n+1}(f(y, v))], \quad y \in X, n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$W^N(y) = K(y), \quad y \in X$$

4 結果と補足

3節の解法は、 β_i^T をすべて90とおくことで、そのまま正方ユニット接続問題に適用できる。ただし正方ユニットの場合、右手系・左手系のどちらか一方のユニットを考えるだけで十分であり（混在させた場合、逆に作成可能な多面体が制限される）、実際はより簡単な設定で問題は定式化されるが、詳細は省略する。

以下、得られた計算結果を紹介する。表1はユニット数に応じて、凸多面体を作成可能な展開図が何種類あるかをまとめたものである。解として生じる展開図には、同じ展開図だが頂点の付け方が異なるもの、あるいは鏡像関係にあるものも含まれるが、表1においては除外している。

実際に作成可能な凸多面体の種類については、数が膨大ですべては調べきれていないが、判明しているものについて表2に示す。なお、図形として合同でも、折り紙ユニットによる作成方法は1通りとは限らない（折り目の付け方は一意ではない）。図4.1は、6個の正方ユニットから構成可能な凸多面体で、図4.2は、4個の三角ユニットから構成可能な凸多面体である。いずれも2面体は除いているが、前者については7種（長方形、平行四辺形2種、台形2種、五角形、六角形）、後者については8種（正3角形、2等辺3角形、長方形、平行四辺形3種、台形2種）の2面体が作成可能である。

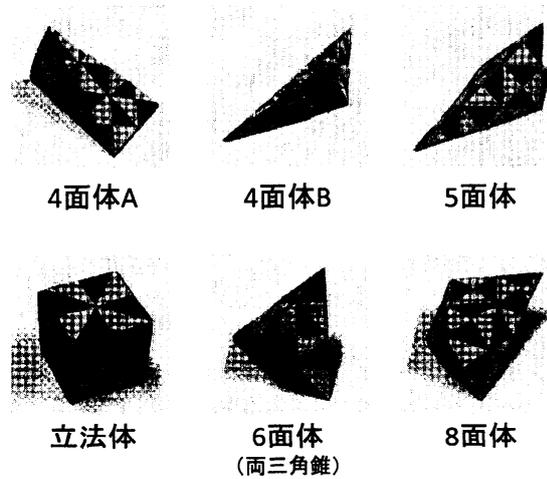


図 4.1: 6個の正方ユニットによる凸多面体

表 2: 凸多面体数

ユニット数	1	2	3	4	5	6
正方ユニット	1	3	3	8	7	13
カッコ内は2面体の数(内数)	(1)	(3)	(2)	(6)	(5)	(7)
三角ユニット	1	4	7	13		
カッコ内は2面体の数(内数)	(1)	(3)	(5)	(8)		

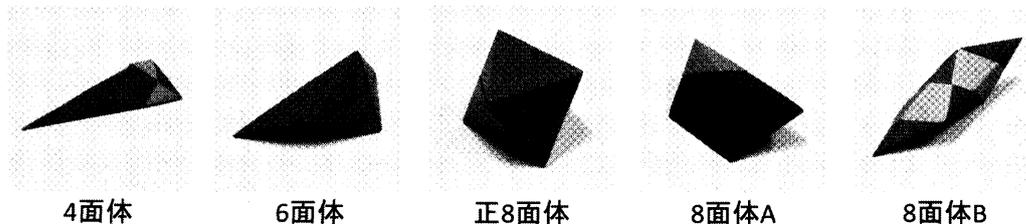


図 4.2: 4個の三角ユニットによる凸多面体

参考文献

- [1] U. Bertelé and F. Brioschi, Nonserial Dynamic Programming, Academic Press, New York, 1972
- [2] E. D. Demaine and J. O'Rourke, Geometric Folding Algorithms, Cambridge Univ. Press, 2007
- [3] 藤田敏治, 結合型評価をもつ相互依存型決定過程, 京都大学数理解析研究所講究録 1802, 78-84, 2012
- [4] A. Lubiw and J. O'Rourke, When can a polygon fold to a polytope?, Technical Report 048, Smith College, 1996
- [5] 三村文武, ユニットにより構成される多面体の模型, 九州工業大学研究報告(工学) 47, 87-97, 1983
- [6] 三村文武, ユニットにより構成される多面体の模型 II, 九州工業大学研究報告(工学) 49, 69-76, 1984
- [7] 三村文武, ユニットにより構成される多面体の模型 III, 九州工業大学研究報告(工学) 49, 77-85, 1984
- [8] F. Mimura, Some Stellated Polyhedrons Constructed by Paper Units, HUE Journal of Humanities, Social and Natural Sciences, 32, 3-8, 2009
- [9] F. Mimura, Two Compounds Constructed by Paper Units, HUE Journal of Humanities, Social and Natural Sciences 32, 27-30, 2009
- [10] 三村文武, 岩下有里, ユニットによる星形多面体の構成, 広島経済大学研究論集 34, 23-34, 2011
- [11] G. L. Nemhauser, Introduction to Dynamic Programming, Wiley, New York, 1966