

単純な構造をもつネットワーク故障復旧問題について

A Network Failure Recovery Problem with Simple Structures

独立行政法人産業技術総合研究所・安全科学研究部門 竹下 潤一

Jun-ichi Takeshita

Research Institute of Science for Safety and Sustainability (RISS),

National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST)

早稲田大学・商学大学院 毛利 裕昭

Hiroaki Mohri

Faculty of Commerce, Waseda University

概要

本稿の狙いはネットワーク故障復旧問題の定式化を行うことである。地震などの災害によって道路網などのライフラインが断線した場合を想定する。復旧計画を策定をする際に、リソースが無限にある場合は場当たりの復旧を進めればよい。しかしながら、現実ではリソースが有限であるため、そのリソースを最大限有効活用するには、どのような計画を立てれば良いかを考察することは重要な問題である。本稿ではライフラインをグラフと見立て、数学的に単純な構造を持つケースにおいて、与えられた有限個数を復旧対象とする際に、どの箇所を復旧対象とすれば効率的であるか考察する問題を、離散最適化問題として定式化する。

Keywords: リスク管理, ネットワーク故障復旧問題, グラフ, 木構造, 離散最適化問題

1 はじめに

本稿では、ネットワーク故障復旧問題を離散最適化問題として定式化することを目的とする。ネットワーク故障に関する研究として、従来よりネットワーク故障が起きにくいという意味での robust な構造の研究や、故障発生率に関する研究など多くの先行研究がある [3], [1]。これら先行研究は、故障の発生について焦点を当てているとまとめることができるであろう。一方で本稿で扱うネットワーク故障復旧問題は、故障が発生してしまっただけの問題を取り扱う。これら 2 つの研究は、同じネットワーク故障に関わる問題ではあるが、リスク管理の観点から見ると大きく異なる。

従来の一般的なある対象事象のリスク管理は、起きる事象の大きさ（ハザード）とその事象が発生する確率の積によりリスクを見積もり（リスク評価を行い）、そのリスクが受け入れられるレベルにコントロールすることにより行っている。これは対象事象が起きにくいように管理するという意味で「事前のリスク管理」と表現できる。一方、近年、特に2011年3月11日の東日本大震災による福島第一原子力発電所事故以降、リスク管理において、もし事故などの対象事象が発生してしまった場合にどのように対処すべきであるかについて事前にきちんと対策を考えておくことの重要性が増してきている。これは対象事象が起きてしまった後のことを考えるという意味で「事後のリスク管理」と表現できる。

現実問題を考えると、事前にリスク評価・管理を十分かつ適切に行ったとしても、ゼロリスクを追求することはコストが膨大にかかってしまい現実的な対策が不可能な場合や、技術的な問題で根本的に対策が不可能であったりする場合が少なくない。これは、事前に詳細で定量的なリスク評価を行い、それに基づき適切にリスク管理を行っても、対象事象を100%防止することは困難であることを意味している。このような性質を有するリスクを扱う場合には、事前のリスク管理だけではなく、対象事象が発生してしまった際にどうするのか、すなわち、危機管理の観点からの事後対応のあり方について、きちんと考察しておくことも重要な課題となる。東海 [2] でも、リスク評価の役割を、想定場面として「平常時」と「異常時」、「事前」と「事後」とに整理し、異常時でありかつ事後に関しては、現状把握、地域の将来像の策定、復旧・復興計画の策定をあげているが、これらに対するものとしては必ずしもきちんと準備されていないと述べられている。

そこで本稿では、ネットワーク故障を対象事例とし、このうち復旧・復興計画の策定に焦点をあてる。ネットワークで表現されるライフラインなどに限らず復旧作業においては、一般的にリソース（コスト、材料、人的リソース）は限られており、故障しまったライフラインをすべて一度に復旧するという対応は、事前のリスク管理におけるゼロリスクを追及することと同様に、（理想ではあるが）現実的に困難である。すべて復旧することが困難な場合においては、復旧計画を立てかたにより、有限なリソースを最大限に生かせる可能性もある一方で、非効率なリソース配分になってしまう可能性もある。

そこで、ライフラインなどのネットワークをグラフで表現し、数理的に取り扱いが比較的平易であり、かつ一般化するケースにおいて基礎となる木構造をもつグラフを対象とし、グラフのもつ要素（具体的にはノード）の重み、重要度による（故障枝の）復旧の優先順位付けを数理的に求める問題の定式化を行う。

本稿の構成は以下の通りである。第2節では、本稿の狙いをあらためて纏める。第3節では、ネットワーク復旧問題の単純なケースについて述べる。第4節では、重要なパスをもつネットワーク復旧問題を提案し、定式化を行う。最後に第5節はまとめにあてた。

2 本稿の狙い：ネットワーク復旧問題とは

道路網の復旧、電力供給システムの復旧、水供給システムの復旧、都市ガス供給システムの復旧、通信システムの復旧など身の回りにはライフラインの復旧と言っても多くの対象がある。しかし、これらは枝とノードを持つグラフで表現されるネットワーク故障の復旧と捉えることができる。

本稿の目的は、枝の一部が切れている（以後、切れている枝のことを故障枝と表現する。）グラフにおいて、どの枝を復旧すれば良いかについて考察することである。資源（コスト、時間、ヒト）が無限にあれば、全てを場当たりに復旧すればよいが、一般的に資源は有限である。そのため、その有限の資源を最大限に有効活用することを目指すのが次善の対策であろう。そこで「資源を最大限有効活用する」ことを、ネットワーク故障復旧問題を離散最適化問題として定式化し、その最適解によって特徴づけることを提案する。

3 問題の定式化：一般系

本稿では、以下を前提条件とする：

- グラフ（ネットワーク）は木構造を持っている。
- 故障しているのは枝のみで、ノードは故障しない。
- どこが故障枝であるか、という情報は与えられている。
- 任意のノード i に対して、重みを表す実数 w_i が付与されている。

次に本稿を通じて用いる記号を導入する：

- $G(N, E)$ で、ノード集合 N 、枝集合 E のグラフを表す。
- E_F を故障枝の集合とし、 $G(N, E, E_F)$ で $G(N, E)$ で特に故障枝を含むグラフを表す。
- $G(N_i, E_i)$ で、ノード集合 N_i 、枝集合 E_i の連結グラフを表す。ただし、 i は自然数である。

• $G(N, E) = \bigoplus_i G(N_i, E_i)$ である

例 3.1 図 1 において, 木全体が $G(N, E)$ であり, 四角で囲われている連結グラフが $G_i(N_i, E_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) である. なお, 図中, 点線は故障枝である.

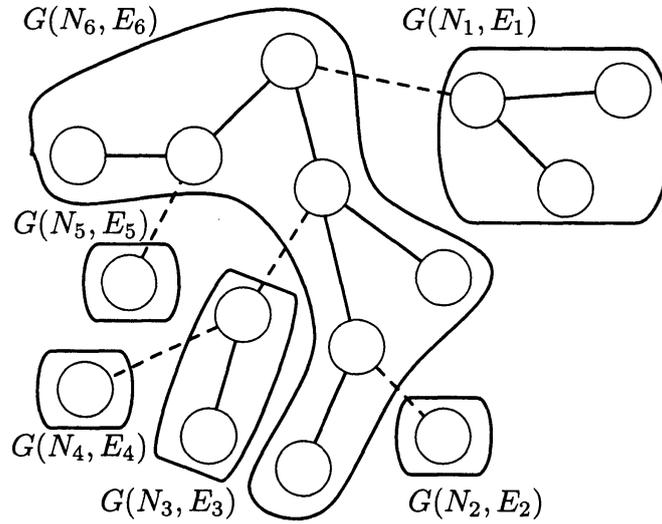


図 1 木構造を持つグラフ $G(N, E)$ の図. 連結グラフ $G(N_i, E_i)$ ($i = 1, \dots, 6$) を持ち, $G(N, E) = \bigoplus_{i=1}^6 G(N_i, E_i)$ である.

F を故障した連結部分を表す添数集合, k を復旧する枝の数, $N = \bigoplus_{i \in F} N_i$, $\alpha_i = \sum_{j \in N_i} w_j$ を連結グラフ i に含まれるノードの重みの総数とすると

$$\begin{aligned}
 (\text{P}_0) \quad & \max \quad \sum_{i \in F} \alpha_i x_i, \\
 & \text{subject to} \quad \sum_{i \in F} x_i = k, \\
 & \quad \quad \quad x_i \in \{0, 1\} \quad (i \in F).
 \end{aligned}$$

と表される.

4 重要なパスをもつネットワーク故障復旧問題

4.1 重要なパスをもつネットワーク故障復旧問題とは

問題 (P_0) は一般的な表現ではあるが、我々が想定している問題を記述しきれていない。そこで本節では問題をより具体化し、それに厳密に対応する表現を与える。本節では、以下の設定を仮定する:

- ネットワーク全体はひとつの地方自治体などで管理している。(この仮定は、復旧計画を策定できた場合に、それをネットワークに関して指示できる権限があることを意味している。もしネットワークが複数で管理されている場合は、どこに指示する権利があるかなどの問題も絡んできてより複雑となる。)
- 大きな都市は重要なパス π (幹線道路などを想定すればよい。) で繋がっている。
- 重要なパス π はユニーク (唯一) である。
- 各ノードには、復旧計画を実行できるだけの十分なリソース (お金, 資源, 施設, 人的リソースなど) がある。(現実問題としては、復旧計画を実行するだけのリソースが十分でない、もしくは、他箇所から持ってくる必要性があることなども考えられるが、そのようなことは本稿では考えないという仮定である。当然、利用可能なリソースに制約がある条件下での復旧計画を考えるという問題も考えられるが、より複雑になることは言うまでもない。)
- 各ノードの重み w_i は同等ではない。

また、本稿では次の状況下での復旧計画を考える:

- k 個の枝を復旧できる。
- 同時に復旧可能である。
- すべてのノードは重要なパス π 繋がるパスを持つ。
- 各ノードへの供給は、ルートから行われる。これは、復旧する場合、ルートへ繋がるパスを構築できない場合は無意味であることを意味する。

以上の条件下で問題を再定式化すると次のようになる:

- 重要なパス π をもつグラフ $G(N, E : E_F, \pi)$ が与えられる。ただし、 N はノードの集合、 E は枝の集合、 $E_F \subset E$ は故障枝の集合、 $\pi \subset E$ である。

- $G(N, E)$ は木である.
- 重要なパス π はユニーク (唯一) である.
- 故障は枝のみで起きている.
- 各ノードに正の実数 w_i が付随している.

4.2 例

本小節ではいくつかの例を与え、この重要なパスをもつネットワーク故障復旧問題が有する構造を考察する. 以下、枝 e_i ($i = 1, \dots, 5$) が故障している中で、復旧する 2 本の枝を選ぶ問題を考える. また図中、太線で重要なパス π 、点線で故障枝、ノード内の数字でそのノードに付随する重み w_i 、 R でルートをそれぞれ表す. なお復旧に無関係であるノードの重みの記載は省略している.

例 4.1 図 2 で与えられる問題を考える. 各枝を復旧した際に、新たにルートに繋がるパスが生成されるノードに付随する重みの総和は表 1 となる. そのため、 e_1 と e_3 を選ぶのが最適となる. これは、 e_1 から e_5 をノードの重みの総和でソートして得られる結果と同じである.

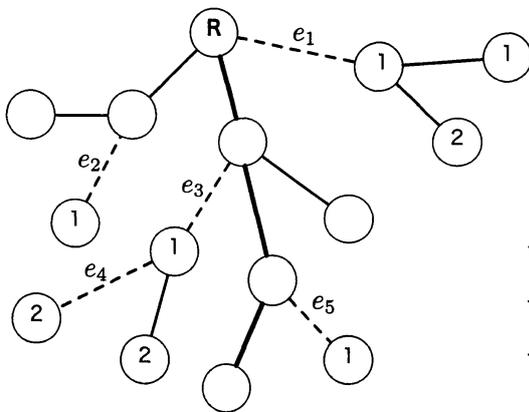


表 1 各枝を復旧した際に、新たにルートに繋がるパスが生成されるノードに付随する重みの総和.

枝	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
\sum ノードの重み	4	1	3	2	1

図 2 例 4.1 で考えるグラフ.

例 4.2 図 3 で与えられる問題を考える. 各枝を復旧した際に、ルートに繋がるパスが新たにできるノードの重みの総和は表 2 となる. そのため、 e_1 と e_3 を選ぶのが最適となる. 一方、 e_1 から e_5 をノードの重みの総和でソートし、上位 2 つの枝を選択すると e_1 と

e_4 が解となる。しかし、 e_3 を復旧せず e_4 のみを復旧しても、新たにルートに繋がるパスが生成されず無意味が復旧となる。これは、本稿が扱う問題に内在する構造のひとつである。

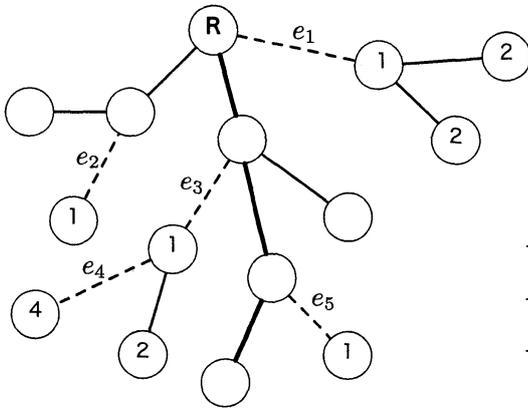


表 2 各枝を復旧した際に、新たにルートに繋がるパスが生成されるノードに付随する重みの総和.

枝	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
\sum ノードの重み	5	1	3	4	1

図 3 例 4.2 で考えるグラフ.

例 4.3 図 4 で与えられる問題を考える。各枝を復旧した際に、ルートに繋がるパスが新たにできるノードの重みの総和は表 3 となる。そのため、 e_3 と e_4 を選ぶのが最適となる。一方、 e_1 から e_5 をノードの重みの総和でソートし、上位 2 つの枝を選択すると e_1 と e_4 が解となる。例 4.2 と同様に、 e_3 を復旧せず e_4 のみを復旧しても無意味である。加えて、重要なパスに繋がっている枝 e_1, e_2, e_3, e_5 のみを対象にノードの重みの総和でソートし、解を得ようとしても e_1 と e_3 が選ばれ、本当の最適解は得られない。この例は、重要なパスに直接繋がることが出来ないある連結グラフを重要なパスに繋ぐために、あえて付随するノードの重みが相対的に小さいパスを選ぶことが全体として最適となるケースがあることを示している。これも、本稿が扱う問題に内在する構造のひとつである。

以上 3 つの例及び、これまでの議論から、本稿で提案する重要なパスを持つネットワーク復旧の問題の特徴として次の 3 点があげられる:

- (i) 付随するノードの重みに依存して、枝の操作を考える問題である。
- (ii) 木構造であるが、単純にソートでは最適解は得られない。
- (iii) 末端のリーフまで考慮して、上流の重要なパスに繋げることが可能な枝から順に復旧すべきかどうかの判定をする必要がある。

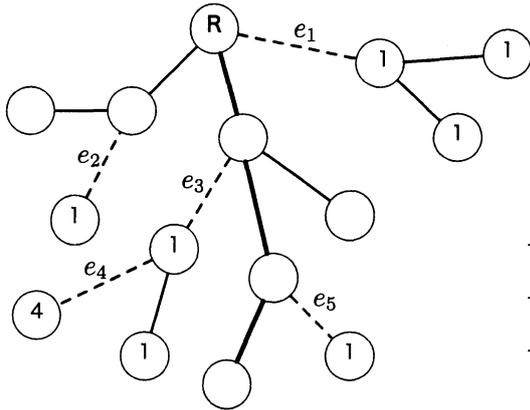


図4 例 4.3 で考えるグラフ.

表3 各枝を復旧した際に、新たにルートに繋がるパスが生成されるノードに付随する重みの総和.

枝	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
\sum ノードの重み	3	1	2	4	1

4.3 定式化

重要なパスをもつネットワーク故障復旧問題に厳密に対応した離散最適化問題の定式化をするため、対象とするグラフが有している構造について考察していく。

重要なパスをもつネットワーク故障復旧問題では、故障していない枝で重要なパス上にあるものは無関係であるため、それらの枝を $G(N, E)$ から取り除く。また、重要なパス上にあるノードで、そこから故障枝が繋がっていないノードも無関係であるため取り除く。さらに、連結グラフに含まれるノードに付随する重みの総和のみが問題となり、各連結グラフ内での構造も無関係であるため、ノードの縮約を行う。以上の操作で構築したグラフを $G(N', E', \pi)$ とする。すなわち、 E' は重要なパス上の枝と故障枝で構成される。図5に例4.3のグラフを例に、上記の操作前後のグラフを示す。

次に、重要なパスと故障枝との接続方向も問題を考える上で無関係であるため、故障枝は重要なパスから右方向に接続することとする。また、ダミーノードを導入することにより、重要なパス上の1つのノードから出ている故障枝が1つとなるようにする。以上の操作で導出されるグラフは図6となる。ここで、故障枝を e_{pq} 、それに付随するノード群の重みを α_{pq} (ただし、 p はルートに近い方からの縦方向の深さを、 q は重要なパスに近い方から右方向の深さを表す添数である。) と表現することにより、2次元配列での表現が可能となり、本稿で取り扱う重要なパスをもつネットワーク故障復旧問題は、次の離散

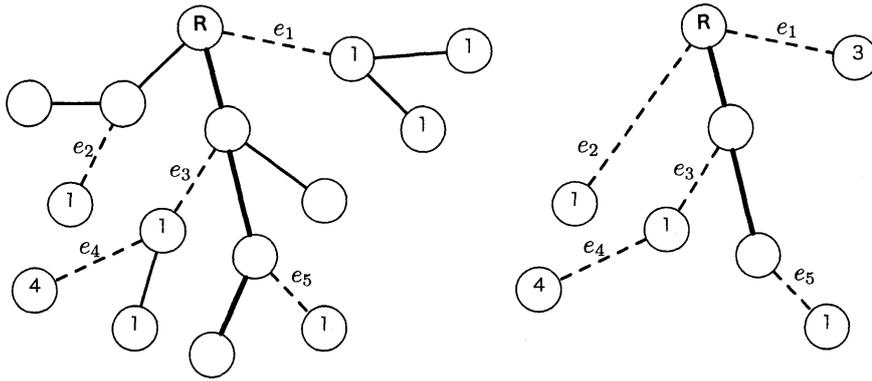


図5 左：例 4.3 の原問題 $G(N, E)$, 右：左のグラフを縮約したグラフ $G(N', E')$.

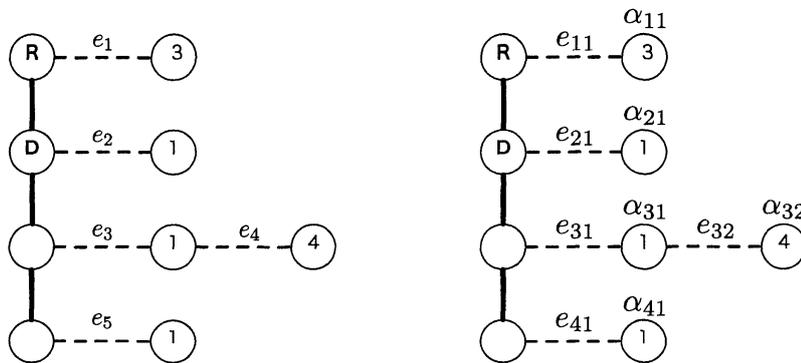


図6 左：例 4.3 を縮約したグラフ, 右：左のグラフにおいて, 故障している枝と, その復旧に付随するノードの重みの添え字を 2 次元配列で表現したもの.

最適化問題として定式化される:

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad & \max \quad \sum_{p \geq 1} \sum_{q(p) \geq 1} \alpha_{pq} x_{pq}, \\
 & \text{subject to} \quad \sum_{p \geq 1} \sum_{q(p) \geq 1} x_{pq} = k, \\
 & \quad x_{pq} \geq x_{p, q+1}, \\
 & \quad x_{pq} = \{0, 1\} \quad (\forall p, q).
 \end{aligned}$$

5 まとめ

本稿ではライフラインの復旧問題をネットワーク故障復旧問題と捉え、数理的には比較的単純な場合、具体的には木構造である場合について離散最適化問題として定式化した。しかし、リスク管理分野への貢献という観点からは、さらなる検討が必要であることは言うまでもない。そこで、最後に今後の方向性及び課題について述べる。

第1に本稿で提案した問題について、効率的な解法を与えることが最初に取りかかる課題である。

第2に木構造だけでは、現実問題のライフラインを記述しているとは言いがたい。そのため、構造の複雑化は必須である。数理的視点からは、森構造をもつものや直並列グラフなどに拡張していくのが自然であろう。

第3に、本稿では枝を復旧する際のコスト（実際のお金だけでなく、資源やヒューマンリソースなども含む）を全く考えていない。現実的には対策コストの上限が設けられている。またリスク管理分野では、各々の対策について費用対効果分析や費用便益分析を行うことによりその対策の効率性を評価する。そのため応用上の観点からは、復旧にかかるコストを考えることは重要となる。しかし、枝ごとの復旧コストを考えた場合、故障枝に付随するコストと、その枝に付随するノード群の重みの2つの要素を同時に考える必要がため、数理的な取り扱いがかなり複雑化することが予想される。

本稿は、ネットワーク故障を具体事例として取り上げ、事後のリスク管理への離散最適化理論からの貢献を目的としたものである。上記で述べたように、実社会への応用にはクリアすべき課題は山ほどあるが、本研究をベースに、離散最適化理論研究からリスク評価・管理研究への貢献を目指していきたいと考えている。

参考文献

- [1] T. Bedford and R. Cooke, **確率論的リスク解析**, 丸善出版, 東京, 2012.
- [2] A. Tokai, *Considerations on low probability high consequence risk event (in japanese)*, Japanese Journal of Risk Analysis **21** (2011), no. 4, 249–252.
- [3] 今井 浩, **ネットワーク信頼度計算の周辺—組合せ数え上げの新展開**, 離散構造とアルゴリズム V, ch. 1, 近代科学社, 東京, 1998.