

探索者が初期位置を選ぶことができるようなグラフ上の探索問題

兵庫県立大学経営学部 菊田 健作 (Kensaku KIKUTA)
School of Business Administration, University of Hyogo

1. はじめに

本稿では次のような探索ゲームを扱う。hider と呼ばれる player が 1 個の静止目標物を有限グラフ上のノードのどれかに隠す。もう 1 人の探索者と呼ばれる player はグラフの辺上を移動しながらノードにある静止目標物を探す。探索者がノードを調べるときに調査費用が、また辺上を移動するときに移動費用が発生する。探索者は総費用が小さくなるようにノードを探索する順序を決めねばならない。両 player の戦略の個数は有限であるので、両 player の利得の和をゼロとして、モデルは行列ゲームとして表現される。Kikuta [6] では、ツリーグラフ上で探索者および hider の最適戦略を考察した。Kikuta [7] では、車輪型グラフで調査費用がある条件を満たす場合の探索者との最適戦略を検討した。Gluss [5], Kikuta [6,7], Kikuta/Ruckle [8] で扱われた探索問題あるいは探索ゲームにおいては、探索者は特定の初期位置 (ノード) から出発していた。本稿の目的は、探索者の初期位置 (ノード) が特定されていないような探索ゲームを扱った Baston/Kikuta [3] の内容を紹介し、かつ今後の課題を述べることである。Alpern/Gal [2] と Ruckle [9] は探索ゲームについて解説したテキストである。Dagan/Gal [4] では hider がグラフ上の任意の点 (ノードおよび辺上) に 1 個の静止目標物を隠し、探索者は任意の点から探索を開始できるようなモデルを解析している。Gluss [5] はゲームではなく費用最小化問題を扱っているが、この分野の草分けの論文と考えることができる。

2. グラフ上の探索ゲーム

本節では、移動費用と調査費用を考慮した有限グラフ上の探索ゲームについてさらに詳しく述べる。 $G = (N, E)$ を連結な無向有限グラフとする。ここに $N = \{1, \dots, n\}$, $n \geq 2$, はノードの集合, $E \subseteq N \times N$ は辺の集合である。2 人の player, hider と探索者がおり, hider は N に含まれるノードのどれか 1 つを選びそこに静止目標物を隠す。探索者は hider がどのノードを選んだかを知らずに任意のノードを選びそこを調べて目標物がないならば、そこから辺上を移動しながら各ノードを調べて行く。ノードを調べずに通過することもできる。ノードを通過するのに要する時間は、そのノードを調べても調べなくても同じで 0 である。静止目標物が見つかった時点で探索は終了する。探索者が静止目標物が存在するノードを調べたときその静止目標物を見逃す確率はどのノードについても 0 である。したがって探索者が同一のノードを 2 度以上調べることはない。ノード $i \in N$ を調べる費用は $c_i > 0$ である。 $(i, j) \in E$ のとき、ノード i から j への移動費用は $d(i, j)$ である。 $(i, j) \notin E$ のときは、 i と j を結ぶ路に関する移動費用を考えその最小値を $d(i, j)$ とする。すべての $i, j \in N$ に対し $d(i, j) = d(j, i)$ である。ただし、 $d(i, i) = 0$

とする。hider の（純粋）戦略はノード $i \in N$ を選ぶことである。探索者の（純粋）戦略は、探索を開始する前に、探索するノードの順序を決定することである。探索者の戦略を $\sigma \equiv [\sigma(1), \dots, \sigma(n)]$ と表す。 σ は N 上の置換である。探索者が探索を開始するノードが $\sigma(1)$ である。hider, 探索者がそれぞれ i, σ を選んだとき、探索者が静止目標物を見つけた時点で探索は終了する。このときの探索費用は

$$\sum_{x=1}^{\sigma^{-1}(i)-1} [d(\sigma(x+1), \sigma(x)) + c_{\sigma(x+1)}] + c_{\sigma(1)}$$

となる。双方が混合戦略をとったとき、目標物を発見するまでの期待探索費用が計算される。これを hider の利得と考え、探索者はこれをできるだけ小さく、一方 hider はできるだけ大きくしたい、として 2 人有限ゼロ和ゲームモデル $\Gamma = (G, c, d)$ を得る。

minimal tour Q とは全てのノードを最小距離で訪問し終える閉じた経路をいう。minimal tour Q は $q: \{0, 1, 2, \dots, L\} \rightarrow N$ によって表される。ここに、 $\{q(j) : 0 \leq j \leq L\} = N$ であり $q(L) = q(0)$ を満たす。記号 \bar{q} により q の逆順を表す。つまり、 $\bar{q}(t) = q(L-t), 0 \leq t \leq L$ が成立する。 Q が minimal tour であり、 ρ が全てのノード上の確率分布であるとする。cycle strategy $\{Q, \rho\}$ を次のように定義する。

(i) 確率分布 ρ に従って初期ノード i を選ぶ、

(ii) ノード i から始めて、確率 $1/2$ ずつで minimal tour Q 上の探索方向を q または \bar{q} を選び、 Q に沿って調べて行く。

3. 得られた成果

探索者の戦略を工夫することによりゲームの値の上界を、また hider の戦略を工夫することによりゲームの値の下界が得られる。

3.1. ゲームの値の上界

任意の minimal tour Q と次の確率分布 ρ

$$\rho_i = \frac{\lambda + nc_i}{n(C + \lambda)}$$

からなる cycle strategy $\{Q, \rho\}$ によって次のようなゲームの値の上界 \tilde{V} が得られる：

$$\tilde{V} = \frac{\lambda + C}{2} - \frac{\lambda}{2n} + \frac{\lambda C}{2n(\lambda + C)} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{2(\lambda + C)}$$

ここで、 ρ_i は探索者がノード i から探索を開始する確率、 λ は minimal tour の長さであり $C = \sum_{i=1}^n c_i$ である (Baston/Kikuta [3])。

グラフにハミルトン路がある場合には、探索者はハミルトン路に沿って両方向に等確率で調べて行くことによりゲームの値の上界が得られる。つまり、 G がハミルトン路を持つグラフであるとする。探索者

は次の値を超えない期待費用で hider を見つけることができる.

$$\frac{\max_{1 \leq i \leq n} c_i + \mu + \sum_{i=1}^n c_i}{2}$$

ここに, μ はグラフにおけるハミルトン路の最小の長さである (Baston/Kikuta [3]).

3.2. ゲームの値の下界

グラフ G においてすべての辺の長さが 1 であると仮定する. hider がノード i に確率

$$\frac{1 + c_i}{C + n}$$

で静止目標物を隠すならば, 探索者がそれを見つけるまでの期待費用は少なくとも \tilde{v} である. ここに

$$\tilde{v} = \frac{n-1}{2} + \frac{C}{2} + \frac{C}{2(n+C)} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{2(n+C)}$$

であり $C = \sum_{i=1}^n c_i$ である. さらに, グラフ G がハミルトン路を持たないならば期待費用は \tilde{v} より大きくなる (Baston/Kikuta [3]).

3.3. ゲームの値が得られる場合

3.1 節, 3.2 節の結果を応用して次の定理が得られる.

定理 1. (Baston/Kikuta [3])

グラフ G が n 個のノードを持つハミルトングラフでありすべての辺の長さが 1 であると仮定する. このとき, ゲームの値は

$$\tilde{v} = \frac{n-1}{2} + \frac{C}{2} + \frac{C}{2(n+C)} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i^2}{2(n+C)}$$

で与えられる. ここに $C = \sum_{i=1}^n c_i$ である.

定理 2. (Baston/Kikuta [3])

グラフ G が n 個のノードを持ち, ハミルトン路があると仮定する. すべての辺の長さが 1 でありかつすべてのノードの調査費用が c であればゲームの値は

$$\frac{n-1 + (n+1)c}{2}.$$

次に, $\Gamma^* = (G^*, c, d)$ を星形グラフ $G^* = (N^*, E^*)$ 上の探索ゲームであるとする. ここに, $N^* = \{0, 1, 2, \dots, n\}$, であり $E^* = \{(0, i) : i \in N^* \setminus \{0\}\}$, さらに各 $i \in N^* \setminus \{0\}$ に対し d_i は辺 $(0, i)$ の長さであるとする.

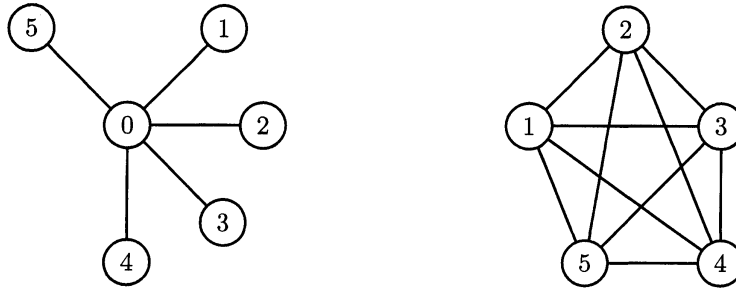


図1：星形グラフ ($n = 5$) と完全グラフ

hider は静止目標物を $N^* \setminus \{0\}$ に属するノードの1つに隠すと仮定する。探索者は探索の開始ノードを選ぶことができる。探索者は高々 \tilde{V} の期待費用で静止目標物を見つけるような戦略を持つ、ここに $\lambda = 2 \sum_{i=1}^n d_i$ である。一方、全ての $i \in N^* \setminus \{0\}$ に対し $d_i = 1/2$ である場合には、hider は期待探索費用が少なくとも \tilde{V} であるような戦略を持つ。なお、このゲームは n 個のノード $1, 2, \dots, n$ からなる完全グラフ上のゲームと同値である (図1参照)。

4. 簡単な例

本節では2つの例を与える。1つ目の例は、ゲームの値が第3節で与えた上界と下界の間にあるような状況が、簡単なグラフの場合に起こりえることを示している。

例1. $\Gamma = (G, c, d)$ が次のような探索ゲームであるとする：

$$N = \{1, 2, 3\}, E = \{(1, 2), (2, 3)\} \text{ かつ } d(1, 2) = 1 = d(2, 3).$$

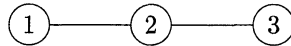


図2 線グラフ ($n = 3$)

記号 $b(i) = 1 + c_i, i = 1, 2, 3$ を用いる。まず、 $b(1) \geq b(3)$ であると仮定し

$$\delta = \frac{b(1)b(3) - b^2(2)}{b(12)(1 + b(N))}, \delta^+ = \max\{0, \delta\} \text{ and } \delta^- = -\min\{0, \delta\}$$

とおく。探索者の最適戦略は各ノードを次のように調べて行くことである。

$$\begin{cases} 123, & \text{with probability } \frac{b(1)}{b(12)} - \delta^+; \\ 321, & \text{with probability } \frac{b(2)}{b(12)} - \delta^-; \\ 312, & \text{with probability } \delta^+; \\ 213. & \text{with probability } \delta^-. \end{cases}$$

一方, hider の 1 つの最適戦略はノード i を確率 p_i で選びそこに静止目標物をかくすことである :

$$p_1 = \frac{b(1) + 1}{b(N) + 1} \quad p_2 = \frac{b(2) - 1}{b(N) + 1}, \quad p_3 = \frac{b(3) + 1}{b(N) + 1} \quad \text{if } \delta \geq 0$$

かつ

$$p_1 = \frac{b(1)}{b(12)} - \frac{b(3)(1 + b(1))}{b(12)(b(N) + 1)} \quad p_2 = \frac{b(2)}{b(12)} + \frac{b(3)(1 - b(2))}{b(12)(b(N) + 1)} \quad p_3 = \frac{b(3)}{b(N) + 1}, \quad \text{if } \delta < 0.$$

ゲームの値は $b(1) - 1 + p_2 b(2) + p_3 b(23)$ である, ここに確率 p_2 と p_3 は上に与えられたものである. 興味のある読者は, このゲームの値が 3.1 節, 3.2 節で与えた上界, 下界の間にあることが起こりえることを確認されたい.

さて, 本稿で扱っているモデルはサイズ $n \times n!$ の行列ゲームであるから, 線形計画法によって解くことができる. 以下の例 2 では, 4 個のノードからなる線グラフ上のゲームの値をシミュレーションによって求めている.

例 2. 探索ゲーム $\Gamma = (G, c, d)$ において

$$N = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\} \text{ かつ } d(1, 2) = d(2, 3) = d(3, 4) = 1.$$

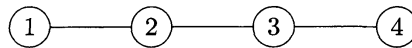
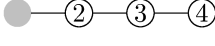
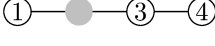



図 3 線グラフ ($n = 4$)

とする. 以下の表では探索者の最適戦略において, 正の確率で用いる順列を示している. ここに, 順列 [1234], [4321] は計算で得られたすべての最適戦略に含まれていたため記載していない. 探索者の最適戦略がユニークであるかどうかの検証, すべての最適戦略に順列 [1234], [4321] が含まれることの検証, は今後の検討課題である.

表 1

	a	調査費用	探索者の戦略
	$a = 2, 100, 1 + 1/10$	$c_1 = c_4 = a, c_2 = c_3 = 1$	[1243],[4312]
	$a = 1/2, 1/10, 1/100$	$c_1 = c_4 = a, c_2 = c_3 = 1$	[2341],[3214]
	$a = 2, 100, 1 + 1/1000$	$c_1 = c_3 = a, c_2 = c_4 = 1$	[3124],[4312]
	$a = 1/2,$	$c_1 = c_3 = a, c_2 = c_4 = 1$	[1243],[2341]
	$a = 1/100,$	$c_1 = c_3 = a, c_2 = c_4 = 1$	[1243],[2431]

	a	調査費用	探索者の戦略
	$a = 2, 100, 1 + 1/10$	$c_1 = a, c_2 = c_3 = c_4 = 1$	[1243],[4312]
	$a = 1/2, 1/10, 1/100$	$c_1 = a, c_2 = c_3 = c_4 = 1$	[2341]
	$a = 2, 100, 1 + 1/10$	$c_2 = a, c_1 = c_3 = c_4 = 1$	[2341],[4213]
	$a = 1/2, 1/10, 1/100$	$c_2 = a, c_1 = c_3 = c_4 = 1$	[1342],[4312]
	$a = 2, 100, 1 + 1/10$	$c_1 = c_2 = a, c_4 = c_3 = 1$	[2134],[4213]
	$a = 1/2, 1/10, 1/100$	$c_1 = c_2 = a, c_4 = c_3 = 1$	[3412]

5. おわりに

今後の課題として次のような点がある。

(1) 上記の主要結果では枝の長さを1と仮定している。この仮定をはずすとノードの個数が4の円グラフのような簡単なグラフの場合においても厳密な解を得るのは簡単でない。

(2) 第4節の例2では順列 [1234], [4321] が扱われた全ての数値の場合において正の確率で用いられている。これが一般的に成立するかどうかを調べること。ノード数が5以上の場合や円グラフの場合にシミュレーションを行うこと。

(3) Alpern [1] では探索者が進む向きによって移動費用が異なるような探索ゲームを調べている。ここでは、Kikuta [6] で扱われた探索ゲームの解が特殊ケースとして得られることが述べられている。この方面でのさらなる研究も課題である。

謝辞

本研究に関して科学研究費補助金（基盤研究 (C)20510139）の助成を受けている。

参考文献

- [1] S. Alpern (2010), Search games on trees with asymmetric travel times. *SIAM Journal of Control and Optimization*. Vol. 48, pp.5547-5563.
- [2] S. Alpern and S.Gal (2003), *The theory of search games and rendezvous*. Kluwer's INTERNATIONAL SERIES.

- [3] V.Baston and K.Kikuta(2013), Search games on networks with travelling and search costs and with arbitrary searcher starting points. *Networks*, Vol. 62, pp. 72-79.
- [4] A. Dagan and S. Gal(2008), Network search games, with arbitrary searcher starting points. *Networks*, Vol. 52, pp. 156-161.
- [5] B.Gluss (1961), Approximately optimal one-dimensional search policies in which search costs vary through time. *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 8, pp. 277-283.
- [6] K.Kikuta (1995), A search game with traveling cost on a tree. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol.38, pp.70-88.
- [7] K.Kikuta (2004), A search game on a cyclic graph. *Naval Research Logistics*, Vol.51, pp.977-993.
- [8] K.Kikuta and W.Ruckle (1994), Initial point search on weighted trees. *Naval Research Logistics*, Vol.41, pp.821-831.
- [9] W. Ruckle (1983), *Geometric games and their applications*, Pitman Research Notes in Mathematics 82, Boston.