数理解析研究所講究録
第1914巻 2014年 139-154

退化拡散項を持つ放物型-放物型Keller-Segel系に対する勾配流の方法

東京理科大学・理工学部数学科 三村 与士文
Yoshifumi MIMURA, Tokyo University of Sciences, Japan

1 導入

本論では, 次の退化拡散項を持つ Keller-Segel 系を勾配流として定式化し, 時間大域解の存在を示す.

$$\begin{cases} \partial_t u = \nabla \cdot (u^m - \chi u \nabla v) & \text{in } \Omega, t > 0, \\ \varepsilon \partial_t v = \Delta v - \gamma v + \alpha u & \text{in } \Omega, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0 & x \in \Omega, \end{cases} \tag{KS}$$

ここで, $\alpha, \chi, \varepsilon$ は正定数, γ は非負定数とする. また, Ω は $\mathbb{R}^d$ の滑らかな境界を持つ有界領域として, 次の境界条件を課す.

$$\frac{\partial u^m}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \chi u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = v = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{BC}$$

この境界条件により, 領域 Ω に含まれる細胞性粘菌の総質量は保存される. さらに我々は,

$$m \geq 2 - \frac{2}{d},\ d > 2$$

の場合を考察する.

方程式 (KS) は, 細胞性粘菌の走化性による集中現象を記述した数理モデルとして知られており, u と v はそれぞれ, 細胞性粘菌の個体密度と走化性物質 (細胞性粘菌を誘引する化学物質) の濃度を表す. したがって, 我々は (KS) の非負値解に興味がある. また, 指数 $m = 2 - 2/d$ は, 次のように解の振る舞いを隔てる臨界指数として知られている.

(i) **劣臨界指数** $m > 2 - 2/d$
(KS) の全ての解は時間大域的に存在する[23, 27, 24, 25, 18, 14].

(ii) **優臨界指数** $m < 2 - 2/d$
時間大域解と爆発解が共存する. 時間大域解の存在については [10, 24, 25, 27, 15] を参照せよ. 爆発解の存在については [8, 25, 9] を参照せよ.

(iii) **臨界指数** $m = 2 - 2/d$
次を満たす質量の臨界値 M_c の存在が予想され, 研究されてきた.

(iii)-1 $\|u_0\|_{L^1} < M_c$ ならば, 全ての解は時間大域的に存在する. 放物型-楕円型系 ($\varepsilon = 0$) については, $d = 2$ の場合は [5] を, $d > 2$ の場合は [4, 28] を参照せよ. 放物型-放物型 ($\varepsilon > 0$) については, $d = 2$ の場合 [22, 7, 21, 20] を参照せよ. $d > 2$ の場合は, 本論において議論する. また [6] と [19] を参照されたい.

(iii)-2 任意の $M > M_c$ に対して, $\|u_0\|_{L^1} = M$ を満たす爆発解が存在する. 放物型-楕円型系 ($\varepsilon = 0$) については, [5, 4, 28] を参照せよ. また, 放物型-放物型 ($\varepsilon > 0$) については, 部分的な解答ではあるが, [12, 13] を参照せよ.

本論では, 放物型-放物型系 ($\varepsilon = 0$), $d > 2$ の場合を考察し, (i) と (iii)-1 の証明を与える. 証明は, 勾配流としての定式化に基づき, (KS) の Lyapunov 汎関数

$$\phi_m(u,v) := \frac{1}{m-1}\int_\Omega u^m\,dx - \chi\int_\Omega uv\,dx + \frac{\chi}{2\alpha}|\nabla v|^2 + \gamma v^2\,dx \tag{1}$$

の下からの有界性が重要な役割を演じる. 境界条件 (BC) を考慮して ϕ_m を

$$X_M := \{(u,v) \in L^m(\Omega) \times H_0^1(\Omega)\ ;\ \|u\|_{L^1} = M\}$$

上で考察する.

定理 1.1 (ϕ_m の下からの有界性). $m > 2 - 2/d$ のとき, ϕ_m は X_M 上で下に有界である. 他方, $m = 2 - 2/d$ のとき, ある $M_* > 0$ が存在して, $M \leq M_*$ のときに限り X_M 上で下に有界である.

注意 1.1. [4] によって示された放物型-楕円型系の閾値 M_c は, (KS) の第 2 方程式において $\varepsilon = \gamma = 0$ とおいた方程式

$$-\Delta v = \alpha u$$

を $\mathbb{R}^d$ 上の $-\Delta$ の基本解 G を用いて v について解き, (1) に代入して得られる一変数の汎関数

$$\mathcal{F}(u) := \frac{1}{m-1}\int_{\mathbb{R}^d} u^m\,dx - \frac{\chi}{2}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} G(x-y)u(x)u(y)\,dxdy \tag{2}$$

の $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^m(\mathbb{R}^d)$ 上での下からの有界性に関する閾値として得られた. 我々の汎関数 ϕ_m の下からの有界性に関する M_* は, α, χ, d に依存して, γ と領域 Ω に依存せず, $M_* = M_c$ が成り立つことを示すことができる.

次に (KS) の時間大域解に対する結果を述べる. ここで, 解は後に述べる定義 1.4 の弱解を意味する.

定理 1.2 (劣臨界指数での時間大域解の存在). $m > 2 - 2/d, d > 2$ とする. $(u_0, v_0) \in (L^2(\Omega) \cap L^m(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ かつ $u_0 \geq 0,\ v_0 \geq 0$ を仮定する. このとき, (KS) の時間大域解が存在する.

定理 1.3 (臨界指数での時間大域解の存在). $m = 2 - 2/d$ とする. このとき,

$$\int_\Omega u_0 \, dx < M_*$$

を満たす任意の $(u_0, v_0) \in (L^2(\Omega) \cap L^m(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ かつ $u_0 \geq 0$, $v_0 \geq 0$ に対して, (KS) の時間大域解が存在する.

注意 1.2. 劣臨界指数での時間大域解の存在は, 本論と異なる弱解の定義の下で, 石田と横田 [15] によって得られた. 本論による議論の利点は, Lyapunov 汎関数の下からの有界性が時間大域解の存在を保証する点である.

注意 1.3. Blanchet と Laurençot[6] は, 定理 1.3 と同様の結果を $\Omega = \mathbb{R}^d$ の場合に得た. すなわち, [4] で得られた放物型-楕円型系の閾値 M_c を用いて, $\|u_0\|_{L^1} < M_c$ であるならば, (KS) かつ $\Omega = \mathbb{R}^d$ の時間大域解が存在する. 証明は, 勾配流としての定式化に基づき, 注意 1.1 で述べたように, $M_* = M_c$ が成り立つので, 定理 1.3 と彼らの結果は酷似している. 定理 1.3 と [6] の双方において証明の困難さは, 変分的に構成した近似解が (KS) の解に収束することを示すことにある. この問題を解決するために我々は, 近似解の構成法に修正を施した. この構成法が [6] との違いであり, 比較的容易に離散解の正則性を得ることができる.

定義 1.4 (弱解). 次の (i) から (v) を満たす非負値関数 (u, v) を (KS) の時間区間 $[0, T]$ 上の弱解という.

(i) $(u, v) \in L^\infty(0, T; L^m(\Omega)) \times L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ かつ $\|u(\cdot, t)\|_{L^1} = \|u_0\|_{L^1}$.

(ii) $u \in L^{2p}(0, T; L^2(\Omega))$ for $p = 2((m-1)d + 1)/d \geq 2 - 2/d$ かつ $u^m \in L^2(0, T; W^{1,1}(\Omega)), v \in L^2(0, T; W^{2,2}(\Omega))$.

(iii) $\lim_{t \downarrow 0} d_W(u(t)/\|u_0\|_{L^1}, u_0/\|u_0\|_{L^1}) = 0$ and $\lim_{t \downarrow 0} \|v(t) - v_0\|_{L^2} = 0$, ここで, d_W は定義 4.1 で定義される Wasserstein 距離である.

(iv) (u, v) は次の正則性を持つ:

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{|\nabla u^m - \chi u \nabla v|^2}{u} \, dxdt < +\infty,$$
$$\int_0^T \int_\Omega |\Delta v - \gamma v + \alpha u|^2 \, dxdt < +\infty.$$

(v) 任意の $a, b \in [0, T]$ と任意の $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ に対して, (u, v) は

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (u(b) - u(a))\varphi \, dx + \int_a^b \int_\Omega \langle \nabla u^m - \chi u \nabla v, \nabla \varphi \rangle \, dxdt = 0, \\ \displaystyle\varepsilon \int_\Omega (v(b) - v(a))\psi \, dx = \int_a^b \int_\Omega (\Delta v - \gamma v + \alpha u)\psi \, dxdt, \end{cases} \tag{3}$$

を満たす.

注意 1.4 (弱解の満たす境界条件). (3) の第 1 式は, $C_c^\infty(\Omega)$ より広い $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ の任意のテスト関数 φ に対して成り立つので, 自然境界条件から,

$$\frac{\partial u^m}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \chi u \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0 \text{ on } \partial\Omega \times (0,T).$$

を弱い意味で満たす. さらに $v \in H_0^1(\Omega)$ を考慮して, 我々の弱解は, 境界条件 (BC) を自動的に満たすことがわかる.

2 証明の方針

放物型-楕円型系の Keller-Segel 系では, $\mathbb{R}^d$ 上の $-\Delta$ の基本解 (あるいは Bessel-ポテンシャル) を用いて単独の発展方程式に帰着させることにより, Wasserstein 空間での勾配流として定式化することができる ([3] を見よ). 他方, 放物型-放物型系はこのような勾配流構造を持たないが, Wasserstein 空間と L^2-空間との直積空間での勾配流として定式化することができる.

(1) (KS) を勾配流として定式化

$$\begin{cases} \partial_t u = -\nabla_u \phi_m(u,v) & (\nabla_u \text{ は, } u \text{ に関する Wasserstein 空間での勾配}) \\ \partial_t v = -\nabla_v \phi_m(u,v) & (\nabla_v \text{ は, } v \text{ に関する } L^2\text{-空間での勾配}) \end{cases}$$

(2) 時間を離散化: $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k < \cdots$

(3) 近似解の構成 (時間離散化法)
各時間ステップ t_k $(k = 1, 2, \ldots)$ での値を変分問題の解として定め, (KS) の近似解を定義 (勾配流の持つ変分的な性質に由来).

(4) 近似解のコンパクト性
Lyapunov 汎関数 ϕ_m の下からの有界性 ($L^m(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ での強圧性と同値) により, $\|u_0\|_{L^1} < M_*$ ならば, 近似解は $L^m(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ の弱位相でコンパクト.

(5) 近似解の収束
近似解が満たす Euler-Lagrange 方程式において, 時間ステップサイズ $t_k - t_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を 0 に近づけ, 近似解が (KS) の解に収束することを示す.

本論で紹介した定理や補題には, 証明を付けなかった. 詳細な議論と証明については, [19] を参照されたい.

3 Euclid 空間での勾配流と距離空間での勾配流

(KS) を勾配流として定式化するにあたって, Euclid 空間や距離空間での勾配流の概念と時間離散解法と呼ばれる解の構成法について復習する. 周知の通り, 関数 $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ に対して, Euclid 空間での f の勾配流は

$$\dot{y} = -\nabla f(y) \tag{4}$$

と表される. 他方, Euclid 空間上の微分可能な曲線 x に対して, 合成関数の微分とCauchy-Schwarz の不等式および相加平均相乗平均の関係式により

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(x(t)) &= \langle \nabla f(x(t)), \dot{x}(t)\rangle \\ &\geq -|\nabla f(x(t))||\dot{x}(t)| \\ &\geq -\frac{1}{2}|\nabla f(x(t))|^2 - \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2\end{aligned} \tag{5}$$

が成り立つ. 特に, 等号成立は x が f の勾配流であるときに限る. すなわち, 曲線 x が勾配流であることと,

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) \leq -\frac{1}{2}|\nabla f(x(t))|^2 - \frac{1}{2}|\dot{x}(t)|^2 \tag{6}$$

を満たすことは同値である.

今, $\tau > 0$ を時間ステップサイズ, $y_\tau^0 := y_0 \in \mathbb{R}^d$ を初期値として, $y_\tau^k, k = 1, 2, 3, \ldots,$ を関数

$$x \in \mathbb{R}^d \mapsto f(x) + \frac{1}{2\tau}|x - y_\tau^{k-1}|^2$$

を最小化するするように逐次定義する. このとき,

$$\nabla f(y_\tau^k) + \frac{y_\tau^k - y_\tau^{k-1}}{\tau} = 0 \tag{7}$$

が成り立つ. これは, 勾配流 (4) に対する Euler の後退差分式に他ならない. したがって, $t = k\tau$ において y_τ^k を通る曲線 $\{y_\tau(t)\}_{t>0}$ は, $\tau \downarrow 0$ のとき, (4) の解に収束することが期待できる.

実際, このことは f の条件次第で正しく, この議論はより抽象的な距離空間で取り扱うことができる. すなわち, $\tau > 0$ を時間ステップサイズ, $u_\tau^0 := u_0$ を初期値として, 距離空間 $(\mathscr{S}, d)$ 上の汎関数 ϕ に対して, $u_\tau^k, k = 1, 2, 3, \ldots,$ を汎関数

$$u \mapsto \phi(u) + \frac{1}{2\tau}d^2(u, u_\tau^{k-1})$$

の最小点として定義する. このことを

$$u_\tau^k \in \operatorname*{argmin}_{u \in \mathscr{S}} \left\{\phi(u) + \frac{1}{2\tau}d^2(u, u_\tau^{k-1})\right\} \tag{8}$$

と書く. 離散解 $\overline{u}_\tau$ を

$$\overline{u}_\tau(t) := u_\tau^k \quad t \in ((k-1)\tau, k\tau]$$

と定義すると, ϕ が適切な条件をみたすならば, $\overline{u}_\tau$ は,

$$\frac{d}{dt}\phi(u(t)) \leq -\frac{1}{2}|\partial\phi|^2(u(t)) - \frac{1}{2}|u'|^2(t) \tag{9}$$

をみたす曲線 u に収束する．ここで, metric slope $|\partial\phi|$, metric derivative $|u'|$ はそれぞれ,

$$|\partial\phi|(u) := \limsup_{v\to u}\frac{(\phi(u)-\phi(v)}{d(u,v)}, \quad \lim_{s\to t}\frac{d(u(t),u(s))}{|t-s|} \tag{10}$$

で定義され, Hilbert 空間では $\|\nabla\phi(u)\|$, $\|\dot{u}\|$ に相当する．したがって, (9) は (6) の距離空間への一般化である．(9) を満たす曲線を最大勾配曲線という．

最大勾配曲線は微分構造を持たない距離空間でも定義される．離散解の最大勾配曲線への収束の理論については, [1] の前半に記述されている．また, Euclid 空間で最大勾配曲線と勾配流が同値であったように, 考える距離空間によっては, 劣微分の概念と合わせて, 最大勾配曲線が満たす (勾配流) 方程式を導くことができる．例えば, 距離空間として Wasserstein 距離を備えた確率測度の距離空間 Wasserstein 空間を用いて, 保存則の成り立つ発展方程式の時間大域的存在や解の一意性などを扱うことができる．この理論については, [1] の後半を見よ．

しかし, [1] の理論が適用可能なのは, 汎関数がある種の凸性を持っている場合やある種の正則性を持っている場合である．我々の Lyapunov 汎関数 ϕ_m は, このような凸性を持っておらず, その上, 正則性かどうかを調べるのも困難なため, [1] の理論を適用するのは難しい．本論では, Euler-Lagrange 方程式 (7) に対応する方程式を我々の問題において導出し, その極限が (3) を満たすことを示す．その際, Euler-Lagrange 方程式を厳密に導くために, 離散解の正則性が必要になる．我々は十分な正則性を持った離散解を構成するために (8) による構成法を修正する．

4 Wasserstein 空間での勾配流

ここでは, Wasserstein 距離の定義とこの距離を用いて勾配流として定式化できる偏微分方程式について触れる．1998 年に Jordan, Kinderlehrer, Otto らによって, Wasserstein 距離の偏微分方程式への応用がなされた．彼らは (8) において,

$$\phi(u) := \int_{\mathbb{R}^d} u\log u\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} u\Psi\,dx, \quad d = d_W\text{: Wasserstein 距離}$$

とした離散解の極限として, 次の Fokker-Planck 方程式の解を構成した．

$$\partial_t u = \Delta u + \nabla\cdot(u\nabla\Psi) \quad \text{in } \mathbb{R}^d\times(0,\infty),$$

ここで, $\Psi:\mathbb{R}^d\to[0,\infty)$ は滑らかな関数である．Wasserstein 距離は最適輸送の問題として現れた確率測度空間上の距離であり, 大雑把に言えば, Fokker-Planck 方程式は, L^2-空間などの従来の関数空間では勾配流として扱うことはできないが, Wasserstein 距離を備えた確率測度の完備距離空間 (Wasserstein 空間) での勾配流と見なすことができる．Ambrosio, Gigli, Savaré らは, 微分構造を持たない抽象的な距離空間に勾配流を含むより広い概念である最大勾配曲線の概念を導入し, 劣微分の概念と合わせて, Wasserstein 空間上の勾配流として考えられる偏微分方程式を体系的に取り扱った [1]．また, Blanchet, calvez, Carrillo らは, 2 次元空間における放物型-楕円型系の Keller-Segel 系を単独の方程式

$$\partial_t u = \Delta u - \chi\nabla\cdot(u\nabla(K*u))$$

に帰着することで, Wasserstein 空間での勾配流として定式化し, u の総質量が閾値に満たない場合の時間大域解の存在を示した [3].

さて, 次の連続方程式を満たす確率測度空間上の曲線 $\{u(t)\}_{t\in[0,1]}$ を考える.

$$\partial_t u + \nabla\cdot(u\boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d \times (0,1). \tag{11}$$

u の速度ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ を曲線 u の接ベクトルと見なし, 二つの接ベクトル $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2$ に対して, 次の内積を導入する.

$$\langle \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2\rangle_{L^2(u)} = \int \langle \boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2\rangle u\, dx. \tag{12}$$

この計量において, 汎関数 $\phi(u) := \int_{\mathbb{R}^d} F(u)\, dx$ が最も早く現象するような曲線 u を形式的に求める. $\phi(u(t))$ の時間微分を形式的に計算すると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\phi(u(t)) &= \int F'(u)\partial_t u\, dx \\
&= -\int F'(u)\nabla\cdot(u\boldsymbol{\xi})\, dx \\
&= \int \langle \nabla F'(u), \boldsymbol{\xi}\rangle u\, dx \\
&\geq -\|\nabla F'(u)\|_{L^2(u)}\|\boldsymbol{\xi}\|_{L^2(u)} \\
&\geq -\frac{1}{2}\|\nabla F'(u)\|_{L^2(u)}^2 - \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\xi}\|_{L^2(u)}^2.
\end{aligned}$$

特に, 上記の式において, 全ての等号成立は $\boldsymbol{\xi} = -\nabla F'(u)$ のときに限る. これを (11) に代入して,

$$\partial_t u = \nabla\cdot(u\nabla F'(u))) \tag{13}$$

を得る. したがって, 計量 (12) において汎関数 ϕ を最も早く現象させる曲線は, (13) を満たす. 我々は, (13) の形の発展方程式を Wasserstein 空間の勾配流として扱うことができる. また, (11) を満たす曲線 u の $t=0$ から $t=1$ におけるエネルギーの最小値

$$E(u_0,u_1) := \inf\left\{\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2\, udxdt\ ;\ \partial_t u + \nabla\cdot(u\boldsymbol{\xi}) = 0, u|_{t=0} = u_0, u|_{t=1} = u_1\right\}$$

は, 次で定義される Wasserstein 距離 $d_W(u_0,u_1)$ の自乗と一致することが知られている (Benamou-Brenier の定理).

定義 4.1 (Wasserstein 距離 d_W). μ,ν を $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度 $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ の元とする.

$$d_W^2(\mu,\nu) := \inf_{p\in\Gamma(\mu,\nu)}\int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |x-y|^2\, dp(x,y),$$

ここで, $\Gamma(\mu,\nu)$ の元 p は, 任意の有界連続なテスト関数 $b\in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^d} b(x)\, dp(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} b(x)\, d\mu(x), \quad \int_{\mathbb{R}^d} b(y)\, dp(x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} b(y)\, d\nu(y)$$

を満たす $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ 上の確率測度 $p\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d)$ の集合である.

Wasserstein 距離 d_W を備えた第2モーメントが有限となる $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度の部分集合

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d) := \left\{ \mu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d) \; ; \; \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \, d\mu(x) < \infty \right\}$$

は, 完備距離空間となることが知られており, Wasserstein 空間と呼ばれる. Wasserstein 空間の上の曲線 μ_t で, (10) によって定義される metric derivative が可積分となるとき, (11) を超関数の意味で満たす速度ベクトル ξ が存在することも知られている [1, Thm. 8.3.1].

注意 4.1 (Wasserstein 距離の意味付け). Wasserstein 距離は, 砂を穴に運ぶ際の最小の総コストと解釈できる. 今, 堆積した砂を穴に運ぶ問題を考える. その際, 砂の総質量と穴の総容量は同じであると仮定し, 正規化することによって確率測度によってモデルする. u を砂の分布, v を砂を収める穴の分布, $w(x,y)$ を x から y に運ばれた砂の量として,

$$d\mu(x) = u(x)dx, \quad d\nu(y) = v(y)dy, \quad dp(x,y) = w(x,y)dxdy$$

とおく. このとき, Fubini の定理を用いることによって, $p \in \Gamma(\mu,\nu)$ は次を満たすことがわかる.

- 点 x の近傍に堆積した砂は, いずれかの点 y に運ばれる:

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} w(x,y)\, dy.$$

- 点 y の近傍にある砂は, いずれかの点 x から運ばれたものである:

$$v(y) = \int_{\mathbb{R}^d} w(x,y)\, dx.$$

ゆえに, 確率測度 μ から確率測度 ν へ移す輸送の問題において, $\Gamma(\mu,\nu)$ は運び方の候補として解釈できる. さて, 点 x から点 y に運ぶのに $|x-y|^2$ のコストがかかるとき, 総コストは

$$\iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x-y|^2 \; w(x,y)\, dxdy$$

で与えられる. したがって, Wasserstein 距離は一つの確率測度を別の確率測度に移す際の最小の総コストと言える.

さて, この節の終わりに push-forward と Brenier の定理について触れておく.

定義 4.2 (push-forward). $\mu,\nu \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ とする.

$$\int_{\mathbb{R}^d} b(y)\, d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^d} b(T(x))\, d\mu(x)$$

が成り立つような μ-可測関数 $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ が存在するとき, ν は T による μ の push forward であるといい, $\nu = T_{\#}\mu$ と書く.

命題 4.3 (Brenier の定理). $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d)$ とする. また, μ は Lebusgue 測度について絶対連続であるとする. このとき, $\nu = T_{\#}\mu$ となる可測関数 T が存在して, $p_0 = (\boldsymbol{id} \otimes T)_{\#}\mu$ に対して,

$$d_W^2(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^2 \, dp_0(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} |x - T(x)|^2 \, d\mu(x)$$

が成り立つ.

5 方程式 (KS) に対する時間離散化法

この節では, (8) を我々の問題に適用して, (KS) の近似解を構成することを目的とする. 前節で議論した Wasserstein 距離や命題などは, $\mathbb{R}^d$ 上で定義したが, 零拡張によって $\Omega \in \mathbb{R}^d$ の集合上でも定義されることを注意されたい. (8) の時間離散化法に基づいて, $w_\tau^k = (u_\tau^k, v_\tau^k)$ を汎関数

$$w = (u, v) \in \mathscr{P}_2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto \phi_m(w) + \frac{1}{2\tau}\left(d_W^2(u, u_\tau^{k-1}) + \frac{\varepsilon\chi}{\alpha}\|v - v_\tau^{k-1}\|_{L^2}^2\right)$$

の最小点として定義することは自然である. しかしながら, この方法によって定義された離散解が満たす Euler-Lagrange 方程式を導くためには, 離散解の正則性が必要になる. なぜならば, 仮に (u_τ^k, v_τ^k) が (KS) の第一方程式に対する Euler の後退差分式を超関数の意味で満たすとすると,

$$\int_\Omega \frac{u_\tau^k - u_\tau^{k-1}}{\tau} \varphi \, dx = -\int_\Omega \langle \nabla (u_\tau^k)^m - \chi u_\tau^k \nabla v_\tau^k, \nabla \varphi \rangle \, dx$$

が任意の $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ に対して成り立つ. ϕ_m の定義域から $u_\tau^k, v_\tau^k \in L^m(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ はすぐにわかるので, 右辺第一項は,

$$\int_\Omega (u_\tau^k)^m \Delta \varphi \, dx$$

とすれば意味を持つ. しかし, 第 2 項は意味を持たないため, (u_τ^k, v_τ^k) にさらなる正則性が必要になる. Blanchet と Laurençot[6] は, (u_τ^k, v_τ^k) から出発するある勾配流の解の性質から, (u_τ^k, v_τ^k) の正則性を導いた. 本論では, 十分な正則性を持った離散解を次のように構成する.

$$\begin{cases} v_\tau^k \in \underset{v \in H_0^1(\Omega)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \phi_m(u_\tau^{k-1}, v) + \dfrac{\varepsilon\chi}{2\alpha\tau}\|v - v_\tau^{k-1}\|_{L^2}^2 \right\} \\ u_\tau^k \in \underset{u \in \mathscr{P}_2(\Omega)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \phi_m(u, v_\tau^k) + \dfrac{1}{2\tau} d_W^2(u, u_\tau^{k-1}) \right\} \end{cases} \tag{14}$$

すなわち, 汎関数

$$v \in H_0^1 \mapsto \phi_m(u_\tau^{k-1}, v) + \frac{\varepsilon\chi}{\alpha}\|v - v_\tau^{k-1}\|_{L^2}^2$$

の最小点として v_τ^k を定義する．また, 汎関数

$$u \in \mathscr{P}_2(\Omega) \mapsto \phi_m(u, v_\tau^k) + \frac{1}{2\tau} d_W^2(u, u_\tau^{k-1})$$

の最小点として u_τ^k を定義する．

命題 5.1. $m \geq 2-2/d$ とする．任意の初期値 $(u_0, v_0) \in (L^2(\Omega) \cap L^m(\Omega)) \cap H_0^1(\Omega)$ かつ $u_0 \geq 0, v_0 \geq 0$ と任意の $\tau > 0$ に対して, (14) の $\{(u_\tau^k, v_\tau^k)\}_{k=1}^\infty$ は一意的に定義される．特に, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $u_\tau^k, v_\tau^k \geq 0$ である．

定義 5.2 (離散解). (14) で定められる $\{(u_\tau^k, v_\tau^k)\}_{k=1}^\infty$ に対して, 離散解 $(\overline{u}_\tau, \overline{v}_\tau)$ を次式で定義する．

$$\begin{aligned} \overline{u}_\tau(t) &:= u_\tau^k \qquad t \in ((k-1)\tau, k\tau], \\ \overline{v}_\tau(t) &:= v_\tau^k \qquad t \in ((k-1)\tau, k\tau]. \end{aligned} \tag{15}$$

我々は, $\|u_0\|_{L^1} < M_*$ のとき, 時間大域的に定義された離散解 $(\overline{u}_\tau, \overline{v}_\tau)$ が時間ステップサイズ τ を零に近づけたとき, (KS) の解に収束することを示し, (KS) の時間大域解を得る．次の節で, $\|u_0\|_{L^1} < M_*$ であれば, Lyapunov 汎関数 ϕ_m が強圧性を満たすことを示し, 離散解 $(\overline{u}_\tau, \overline{v}_\tau)$ のコンパクト性を示す．

6　汎関数 ϕ_m の強圧性

ここでは, $m > 2-2/d$ あるいは $m = 2-2/d$ かつ $\|u_0\|_{L^1} < M_*$ のとき, 汎関数は下から有界であり, $L^m(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ での強圧性を持つことを示す．まず, Lyapunov 汎関数 (1) の第 2 項は次のように評価される．

$$\begin{aligned} \int_\Omega uv\,dx &\leq \|u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} \|v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \\ &\leq C_s \|u\|_{L^1}^{1-\theta} \|u\|_{L^m}^{\theta} \|\nabla v\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{16}$$

ここで, 補間不等式

$$\|u\|_{L^{\frac{2d}{d+2}}} \leq \|u\|_{L^1}^{1-\theta} \|u\|_{L^m}^{\theta}, \quad m \geq 2 - \frac{2}{d},\ \theta = \frac{m(d-2)}{2d(m-1)} \in (0,1),$$

と Sobolev の不等式

$$\|v\|_{L^{\frac{2d}{d-2}}} \leq C_s \|\nabla v\|_{L^2} \ \text{ for } v \in H_0^1(\Omega)$$

を用いた．したがって, (16) の右辺に相加平均と相乗平均の関係式を適用して,

$$\int_\Omega uv\,dx \leq \frac{(\alpha+\delta) C_s^2 \|u\|_{L^1}^{2(1-\theta)}}{2} \|u\|_{L^m}^{2\theta} + \frac{1}{2(\alpha+\delta)} \|\nabla v\|_{L^2}^2$$

が任意の $\delta \geq 0$ に対して成り立つ．ゆえに, 汎関数 ϕ_m は, $L^m(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ 上で次のように下から評価される．

$$\phi_m \geq \frac{1}{m-1} \int_\Omega u^m\,dx - \frac{(\alpha+\delta)\chi C_s^2 \|u\|_{L^1}^{2(1-\theta)}}{2} \|u\|_{L^m}^{2\theta} + \frac{\delta\chi}{2\delta(\alpha+\delta)} \|\nabla v\|_{L^2}^2.$$

ここで, $m > 2-2/d$であれば, $2\theta < m$より, ϕ_m は下に有界であることがわかる. $m = 2-2-2/d$ であれば, $2\theta = m$ であるので, 次のように同類項をまとめることができる.

$$\phi_m \geq \frac{\alpha\chi C_s^2}{2}\left(\frac{2}{\alpha\chi(m-1)C_s^2} - \frac{(\alpha+\delta)}{\alpha}\|u\|_{L^1}^{2/d}\right)\|u\|_{L^m}^m + \frac{\delta\chi}{2\delta(\alpha+\delta)}\|\nabla v\|_{L^2}^2.$$

この式は, ソボレフ定数 C_s を次式で定義される $C_*(\leq C_s)$ に変えても成り立つことがわかる.

$$C_* = \sup_{L^m(\Omega)\times H_0^1(\Omega)} \frac{\|uv\|_{L^1}}{\|u\|_{L^1}^{1/d}\|u\|_{L^m}^{m/2}\|\nabla v\|_{L^2}}.$$

ゆえに,

$$\|u\|_{L^1} < \left(\frac{2}{\alpha\chi(m-1)C_*^2}\right)^{d/2} \tag{17}$$

ならば, ϕ_m は $L^m(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ で強圧性を持つことがわかる. 我々は, (17) の右辺を M_* として定義する. このとき, $\|u\|_{L^1} > M_*$ ならば ϕ_m は下に非有界であることも示される. これを示すには, 変数変換 $(u,v)\mapsto(U_\lambda, V_\lambda)$

$$U_\lambda = \begin{cases}\lambda^d u(\lambda x), & \lambda x\in\Omega,\\ 0, & \mathbb{R}^d\setminus\Omega,\end{cases} \qquad V_\lambda = \begin{cases}\lambda^{d-2} v(\lambda x), & \lambda x\in\Omega,\\ 0, & \mathbb{R}^d\setminus\Omega,\end{cases} \tag{18}$$

によって, $\phi_m(u,v) < 0$ となる (u,v) が存在することと ϕ_m の下からの非有界性が同値であることを用いて, $\phi_m(u,v)<0$ となる元 $(u,v)\in L^m(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ を見つければよいが, ここでは割愛する.

7 離散解のコンパクト性

我々の定義した離散解は, 定義からあるコンパクト性を有して, 離散解の極限関数の存在を保証する. この極限関数の集合は Minimizing movement と呼ばれている ([1] の第 2 節を参照). v_τ^k の定義から,

$$\phi_m(u_\tau^{k-1}, v_\tau^k) + \frac{\varepsilon\chi}{2\alpha\tau}\|v_\tau^k - v_\tau^{k-1}\|^2 \leq \phi_m(u_\tau^{k-1}, v_\tau^{k-1})$$

が成り立つ. 他方, u_τ^k の定義から

$$\phi_m(u_\tau^k, v_\tau^k) + \frac{1}{2\tau}d_W^2(u_\tau^k, u_\tau^{k-1}) \leq \phi_m(u_\tau^{k-1}, v_\tau^k)$$

が成り立つ. これらを合わせて,

$$\frac{1}{2\tau}\left(d_W^2(u_\tau^k, u_\tau^{k-1}) + \frac{\varepsilon\chi}{\alpha}\|v_\tau^k - v_\tau^{k-1}\|_{L^2}^2\right) \leq \phi_m(u_\tau^{k-1}, v_\tau^{k-1}) - \phi_m(u_\tau^k, v_\tau^k)$$

$k=1$ から $N\in\mathbb{N}$ まで加えて,

$$\frac{1}{2\tau}\sum_{k=1}^N\left(d_W^2(u_\tau^k, u_\tau^{k-1}) + \frac{\varepsilon\chi}{\alpha}\|v_\tau^k - v_\tau^{k-1}\|_{L^2}^2\right) \leq \phi_m(u_0, v_0) - \phi_m(u_\tau^N, v_\tau^N)$$

を得る．$M < M_*$ ならば ϕ_m は下に有界，したがって任意の $N \in \mathbb{N}$ について $\phi_m(u_\tau^N, v_\tau^N)$ は下に有界であるので，上記の式は離散解が t について同程度連続であることを示している．また上記の式から任意の $t > 0$ に対して

$$\phi_m(\overline{u}_\tau(t), \overline{v}_\tau(t)) \le \phi_m(u_0, v_0)$$

が成り立つので，$M < M_*$ であれば，汎関数 ϕ_m の強圧性から離散解 $(\overline{u}_\tau(t), \overline{v}_\tau(t))$ は，各 t を固定するごとに $L^m(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ で弱コンパクトである．ゆえに，Ascoli-Arzelà の定理と同様の論法によって，任意の $t > 0$ に対して，離散解 $(\overline{u}_\tau(t), \overline{v}_\tau(t))$ が $L^m(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ の弱位相である関数 $(u(t), v(t))$ に収束するような部分列 τ_n が存在する．

8 離散解の正則性

前節によって，我々は離散解の極限が存在することがわかった．しかし，離散解の極限の存在だけなら，通常の (8) による構成法でも容易に示されることである．ここでは，(14) によって離散解が持つ正則性について議論する．ここでの正則性は，離散解が (KS) の解に収束することを示すために重要である．[6] における (8) によって定義された離散解の正則性の議論と比較されたい．

定義 8.1 (metric slopes)**.** 距離 d_1 と d_2 を

$$d_1(u_1, u_2) := d_W(u_1, u_2) \quad \text{for } u_1, u_2 \in \mathscr{P}_2(\Omega) \subset \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^d),$$
$$d_2(v_1, v_2) := \sqrt{\frac{\varepsilon\chi}{\alpha}} \|v_1 - v_2\|_{L^2} \quad \text{for } v_1, v_2 \in L^2(\Omega)$$

とする．このとき，ϕ_m の $(u, v) \in \mathcal{D}(\phi_m)$ における **metric slopes** $|\partial_1 \phi_m|(u, v)$ と $|\partial_2 \phi_m|(u, v)$ of ϕ_m

$$|\partial_1 \phi_m|(u, v) := \limsup_{\tilde{u} \to u} \frac{\left(\phi_m(u, v) - \phi_m(\tilde{u}, v)\right)^+}{d_1(u, \tilde{u})},$$
$$|\partial_2 \phi_m|(u, v) := \limsup_{\tilde{v} \to v} \frac{\left(\phi_m(u, v) - \phi_m(u, \tilde{v})\right)^+}{d_2(v, \tilde{v})},$$

によって定義する．ここで，$\mathcal{D}(\phi_m)$ は ϕ_m の有効領域 (effective domain) を表す．すなわち，

$$\mathcal{D}(\phi_m) := \{(u, v)\,;\, \phi_m(u, v) < +\infty\}.$$

$\mathcal{D}(|\partial_1 \phi_m|)$ と $\mathcal{D}(|\partial_2 \phi_m|)$ も同様に定義される．

補題 8.2. $\{(u_\tau^k, v_\tau^k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ を (14) の解とする．このとき，次の評価が成り立つ．

(i) <u>slope 評価</u>: 任意の $k = 1, 2, 3, \ldots$ に対して，

$$\begin{cases} |\partial_1 \phi_m|(u_\tau^k, v_\tau^k) \le \dfrac{d_1(u_\tau^k, u_\tau^{k-1})}{\tau}, \\ |\partial_2 \phi_m|(u_\tau^{k-1}, v_\tau^k) \le \dfrac{d_2(v_\tau^k, v_\tau^{k-1})}{\tau}, \end{cases} \tag{19}$$

が成り立つ．

(ii) 勾配エネルギー評価: 任意の $T>0$ に対して,

$$\int_0^T |\partial_1\phi_m|^2(\overline{u}_\tau(t),\overline{v}_\tau(t))\,dt + \int_0^T |\partial_2\phi_m|^2(\underline{u}_\tau(t),\overline{v}_\tau)\,dt \le 2\left(\phi_m(u_0,v_0)-\phi_m(\overline{u}_\tau(T),\overline{v}_\tau(T))\right),$$

ここで, $(\overline{u}_\tau,\overline{v}_\tau)$ は, 定義 *5.2* で定義された離散解であり, $\underline{u}_\tau$ は次式で定義される. $\underline{u}_\tau(t) := u_\tau^{k-1}$ *for* $t\in((k-1)\tau,k\tau]$, すなわち $\underline{u}_\tau(t)=\overline{u}_\tau(t-\tau)$.

補題 8.3 (Gâteaux 微分). $(u,v)\in\mathcal{D}(|\partial_1\phi_m|)$ と $v\in W^{2,2}(\Omega)$ を仮定する. このとき, 任意の $\boldsymbol{\xi}\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$ に対して, 関数 $t\mapsto\phi_m((\boldsymbol{id}+t\boldsymbol{\xi})_\# u,v)$ は $t=0$ において微分可能であり,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\phi_m((\boldsymbol{id}+t\boldsymbol{\xi})_\# u,v)\right]\Big|_{t=0} = \displaystyle\int_\Omega \langle \nabla u^m - \chi u\nabla v, \boldsymbol{\xi}\rangle\,dx, \\ \displaystyle\int_\Omega \frac{|\nabla u^m-\chi u\nabla v|^2}{u}\,dx \le |\partial_1\phi_m|^2(u,v) \end{cases} \tag{20}$$

が成り立つ. 他方, $(u,v)\in\mathcal{D}(|\partial_2\phi_m|)$ と $u\in L^2(\Omega)$ を仮定すると, 任意の $\eta\in C_c^\infty(\Omega)$ に対して, 関数 $t\mapsto\phi_m(u,v+t\eta)$ は $t=0$ において微分可能であり,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\phi_m(u,v+t\eta)\right]\Big|_{t=0} = \dfrac{\chi}{\alpha}\displaystyle\int_\Omega(-\Delta v+\gamma v-\alpha u)\eta\,dx, \\ \dfrac{\chi}{\alpha\varepsilon}\displaystyle\int_\Omega|\Delta v-\gamma v+\alpha u|^2\,dx \le |\partial_2\phi_m|^2(u,v), \end{cases} \tag{21}$$

が成り立つ.

補題 8.4. $(u,v)\in\mathcal{D}(|\partial_1\phi_m|)$ かつ $v\in W^{2,2}(\Omega)$ であれば, $u\in L^2(\Omega)$ が成り立つ. 他方, $(u,v)\in\mathcal{D}(|\partial_2\phi_m|)$ かつ $u\in L^2(\Omega)$ であれば, $v\in W^{2,2}(\Omega)$ が成り立つ.

系 8.5 (離散解の正則性). $(u_0,v_0)\in(L^2(\Omega)\cap L^m(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ を仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} \overline{u}_\tau(t)&\in L^2(\Omega) &&\forall t>0,\\ \overline{v}_\tau(t)&\in W^{2,2}(\Omega) &&\forall t>0, \end{aligned}$$

が成り立つ.

次の補題は, L^2-空間での

$$\frac{d}{dt}\|v+t\eta-v_*\|_{L^2}]\Big|_{t=0} = 2\int_\Omega(v-v_*)\eta\,dx$$

に対応するものである. [1, Prop.8.5.6] を見よ.

補題 8.6 (Wasserstein 距離の Gâteaux 微分). $\mu := u\mathscr{L}^d\in\mathscr{P}_2(\Omega)$, $\mu_* := u_*\mathscr{L}^d\in\mathscr{P}_2(\Omega)$ とする. このとき, 任意の $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して, 関数 $t\mapsto d_1^2((\boldsymbol{id}+t\nabla\varphi)_\# u,u_*)$ は微分可能であり,

$$\frac{d}{dt}\left[d_1^2((\boldsymbol{id}+t\nabla\varphi)_\# u,u_*)\right]\Big|_{t=0} = 2\int_\Omega(u-u_*)\varphi\,dx + O(d_1^2(u,u_*))$$

が成り立つ.

9 離散解が満たす Euler-Lagrange 方程式

離散解の正則性から, 離散解が Euler-Lagrange を導くことができる. この Euler-Lagrange 方程式を通して, 離散解の極限が (3) を満たすことを述べる.

さて, $(U_t, V_t) := ((id + \nabla\varphi)_{\#}u_\tau^k, v_\tau^k + t\psi)$ とおく. (14) から, 2 つの関数

$$t \mapsto \phi_m(U_t, v_\tau^k) + \frac{1}{2\tau}d_W^2(U_t, u_\tau^{k-1}),$$
$$t \mapsto \phi_m(u_\tau^{k-1}, V_t) + \frac{\varepsilon\chi}{2\alpha}\|V_t - v_\tau^{k-1}\|_{L^2}^2$$

はそれぞれ, $t=0$ において最小値を取る. したがって, それぞれの Gâteaux 微分は, $t=0$ において零になる. ゆえに, 補題 8.3 と補題 8.6 により次を得る.

補題 9.1 (Euler-Lagrange 方程式). $\{(u_\tau^k, v_\tau^k)\}_{k=0}^\infty$ を最小化問題 (14) の解とする. このとき, 任意の $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ と任意の $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ に対して, (u_τ^k, v_τ^k) は次を満たす:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (u_\tau^k - u_\tau^{k-1})\varphi\,dx + \tau\int_\Omega \langle \nabla(u_\tau^k)^m - \chi u_\tau^k \nabla v_\tau^k, \nabla\varphi\rangle dx \\ \qquad\qquad\qquad\qquad = O(d_W^2(u_\tau^k, u_\tau^{k-1})), \\ \displaystyle\varepsilon\int_\Omega (v_\tau^k - v_\tau^{k-1})\psi\,dx - \tau\int_\Omega (\Delta v_\tau^k - \gamma v_\tau^k + \alpha u_\tau^{k-1})\psi\,dx = 0, \end{cases} \tag{22}$$

さて, $a, b \geq 0$ を任意に固定する. このとき, 任意の $\tau > 0$ に対して,

$$(\ell_\tau^a - 1)\tau < a \leq \ell_\tau^a\tau, \quad \lim_{\tau\downarrow 0}\ell_\tau^a\tau = a,$$
$$(\ell_\tau^b - 1)\tau < b \leq \ell_\tau^b\tau, \quad \lim_{\tau\downarrow 0}\ell_\tau^b\tau = b.$$

を満たす $\ell_\tau^a \in \mathbb{N}$ と $\ell_\tau^b \in \mathbb{N}$ が存在する. 式 (22) を $k = \ell_\tau^a$ から ℓ_τ^b まで加えて,

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\overline{u}_\tau(b) - \overline{u}_\tau(a))\varphi\,dx + \int_{\ell_\tau^a\tau}^{\ell_\tau^b\tau}\int_\Omega \langle \nabla\overline{u}_\tau^m - \chi\overline{u}_\tau\nabla\overline{v}_\tau, \nabla\varphi\rangle\,dxdt = R(\tau), \\ \displaystyle\varepsilon\int_\Omega (\overline{v}_\tau(b) - \overline{v}_\tau(a))\psi\,dx - \int_{\ell_\tau^a\tau}^{\ell_\tau^b\tau}\int_\Omega (\Delta\overline{v}_\tau - \gamma\overline{v}_\tau + \alpha\overline{u}_\tau)\psi\,dxdt = 0 \end{cases} \tag{23}$$

を得る. ここで, $R(\tau) = O(\sum_{k\in\mathbf{N}} d_1^2(u_\tau^k, u_\tau^{k-1})) = O(\tau)$ である. 離散解のコンパクト性により, 任意の $t > 0$ に対して, 部分列 $(\overline{u}_{\tau_n}(t), \overline{v}_{\tau_n}(t))$ は, ある関数 $(u(t), v(t))$ に収束する. また, 補題 8.2-(ii) と補題 8.3 から, $p = 2((m-1)d+1)/d \geq 2 - 2/d$ と任意の $T > 0$ に対して,

$$\sup_{\tau>0}\int_0^T \|\overline{u}_\tau(t)\|_{L^2}^{2p}\,dt < +\infty$$

$$\sup_{\tau>0}\int_0^T \|\nabla\overline{u}_\tau^m\|_{L^1}^2\,dt < +\infty, \quad \sup_{\tau>0}\int_0^T \|\Delta\overline{v}_\tau\|_{L^2}^2\,dt < +\infty$$

が成り立つ. これより,

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_\Omega \langle \nabla \overline{u}_{\tau_n}^m - \chi \overline{u}_{\tau_n} \nabla \overline{v}_{\tau_n}, \nabla \varphi \rangle \, dxdt = \int_a^b \int_\Omega \langle \nabla u^m - \chi u \nabla v, \nabla \varphi \rangle \, dxdt, \\ \lim_{n\to\infty} \int_a^b \int_\Omega (\Delta \overline{v}_{\tau_n} - \gamma \overline{v}_{\tau_n} + \alpha \overline{u}_{\tau_n}) \psi \, dxdt = \int_a^b \int_\Omega (\Delta v - \gamma v + \alpha u) \psi \, dxdt, \end{cases}$$

が従う. したがって, (23) において, 部分列 τ_n と $n \to \infty$ の極限を取ることにより, 離散解の極限関数 (u, v) は (3) を満たす. (u, v) が他の弱解の性質を満たすことについては, 離散解の持つ性質から従う.

References

[1] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, Lectures in Mathematics, Birkhäuser, (2005).

[2] J. Bedrossian, N. Rodríguez, A. Bertozzi, *Local and global well-posedness for aggregation equations and Patlak-Keller-Segel models with degenerate diffusion*, Nonlinearity 24 (2011), no. 6, 1683-1714.

[3] A. Blanchet, V. Calvez, and J. A. Carrillo, *Convergence of the mass-transport steepest descent scheme for the subcritical Patlak-Keller-Segel model*, SIAM J. Numer. Anal. 46 (2008), pp.691-721.

[4] A. Blanchet, J. A. Carrillo, and PH.Laurençot, *Critical mass for a Patlak-Keller-Segel model with degenerate diffusion in higher dimensions*, Calc. Var. Partial Differential Equations 35 (2009), pp.133-168.

[5] A. Blanchet, J. Dolbeault and B. Perthame, *Two-dimensional Keller-Segel model: optimal critical mass and qualitative properties of the solutions*, Electron. J. Differential Equations 44 (2006), 32 pp. (electronic).

[6] Blanchet and Laurençot, *The parabolic-parabolic Keller-Segel system with critical diffusion as a gradient flow in* $\mathbb{R}^d, d \geq 3$, arXiv: 1203.3573v1 [math.AP] 15 Mar 2012.

[7] V. Calvez and L. Corrias *The parabolic-parabolic Keller-Segel model in* $\mathbb{R}^2$, Commun. Math. Sci. 6 (2008), no. 2, 417-447.

[8] L. Chen, Li, J-G. Liu, J. Wang, *Multidimensional degenerate Keller-Segel system with critical diffusion exponent* $2n/(n+2)$, SIAM J. Math. Anal. 44 (2012), no. 2, 1077-1102.

[9] T. Cieślak and C. Stinner, *Finite-time blowup and global-in-time unbounded solutions to a parabolic-parabolic quasilinear Keller-Segel system in higher dimensions*, J. Differential Equations 252 (2012), no. 10, 5832-5851.

[10] L. Corrias, B. Perthame and H. Zaag, *Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis systems in high space dimensions*. Milan J. Math. 72 (2004), 1-28.

[11] H. Gajewski and K. Zacharias, *Global behavior of a reaction-diffusion system modeling chemotaxis*, Math. Nachr. 195 (1998), 77-114.

[12] M. A. Herrero and Velázquez, *Chemotaxis collapse for Keller-Segel model*, J. Math. Biol. 35 (1996), 177-194.

[13] D. Horstmann and G. Wang, *Blow-up in a chemotaxis model without symmetry assumptions* European J. Appl. Math. 12 (2001), no. 2, 159-177.

[14] S. Ishida and T. Yokota, *Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type*, J. Differential Equations 252 (2012) 1421-1440.

[15] S. Ishida and T. Yokota *Global existence of weak solutions to quasilinear degenerate Keller-Segel systems of parabolic-parabolic type with small data*, J. Differential Equations 252 (2012) 2469-2491.

[16] R. Jordan, D. Kinderlehrer and F. Otto, *The variational formulation of the Fokker-Planck equation*, SIAM J. Math. Anal. 29 (1998) 1-17 (electronic).

[17] E. F. Keller and L. A. Segel, *Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability*, J. Theor. Biol. 26 (1970), 399-415.

[18] R. Kowalczyk and Z. Szymańska, *On the global existence of solutions to an aggregation model*, J. Math. Anal. Appl., 343 (2008), pp. 379-398.

[19] Y. Mimura, *Variational formulation of the fully parabolic Keller-Segel system with degenerate diffusion*, Preprint.

[20] N. Mizoguchi, *Global existence for the Cauchy problem of the parabolic-parabolic Keller-Segel system on the plane*, Calc. Var. Partial Differential Equations, online 25 September 2012.

[21] T. Nagai and T. Ogawa, *Brezis-Merle inequalities and application to the global existence of the Cauchy problem of the Keller-Segel system*, Commun. Contemp. Math. 13 (2011), no. 5, 795—812.

[22] T. Nagai, T. Senba and K.Yoshida, *Application of the Trudinger-Moser inequality to a parabolic system of chemotaxis*, Funckcial. Ekvac. 40 (1997), 411-433.

[23] T. Senba and T. Suzuki, *A quasi-linear parabolic system of chemotaxis*, Abstr. Appl. Anal. 2006, Art. ID 23061, 21 pp.

[24] Y. Sugiyama, *Application of the best constant of the Sobolev inequality to degenerate Keller-Segel models* Adv. Differential Equations 12(2007), pp. 121-144.

[25] Y. Sugiyama, *Global existence in the sub-critical cases and finite time blow-up in the super-critical cases to degenerate Keller-Segel systems*, Differential Integral Equations 19 (2006) 841-876.

[26] Y. Sugiyama, *Time global existence and asymptotic behavior of solutions to degenerate quasi-linear parabolic systems of chemotaxis*, Differential Integral Equations 20 (2007) 133-180.

[27] Y. Sugiyama and H. Kunii, *Global existence and decay properties for a degenerate Keller-Segel model with a power factor in drift term*, J. Differential Equations 227 (2006), no. 1, 333-364.

[28] T. Suzuki, R. and Takahashi, Ryo, *Degenerate parabolic equation with critical exponent derived from the kinetic theory. II. Blowup threshold*, Differential Integral Equations 22 (2009), no. 11-12, 1153-1172.