数理解析研究所講究録
第 1915 巻 2014 年 149-157

自己入射的加群と EXTENDING な加群の捩れ理論的拡張

函館工業高等専門学校
Yasuhiko Takehana

アブストラクト. 加群 M の部分加群 N が M の nonzero 部分加群と常に nonnzero な共通部分加群を持つとき N は essential な部分加群であると言う. 加群 M の部分加群 N が closed であるとは,N は M の中に真の essential な拡大を持たないときに言う. M の部分加群 X が M の中で complement であるとは,M のある部分加群 Y があって X は $X\cap Y=0$ が成り立つ極大な M の部分加群であるときに言う. 良く知られているように部分加群が complement であることと closed であることは同じである. 加群 M の任意の部分加群が M のある直和因子の中で essential であるとき, 加群 M が extending (あるいは M は条件 C_1 を持つ) であると呼ばれる. 良く知られているように自己入射的加群は extending である. ここでは遺伝的捩れ理論を用いて extending 加群を一般化し関連する事柄を述べる.

1. INTRODUCTION

R は単位元を持つ非可換環で右 R 加群は unitary であるとする. Mod-R は右 R 加群全体のなすカテゴリーとする. Mod-R の恒等関手の部分関手を前根基と言う. 前根基 σ に対し $\mathcal{T}_\sigma := \{M\in \text{Mod-}R|\sigma(M)=M\}$ と置き $\mathcal{T}_\sigma$ の元は σ-torsion であると言う. また $\mathcal{F}_\sigma := \{M\in \text{Mod-}R|\sigma(M)=0\}$ と置き $\mathcal{F}_\sigma$ の元は σ-torsion free であると言う. 前根基 t は任意の加群 M に対し $t(t(M))=t(M)(t(M/t(M))=0)$ が成り立つとき冪等 (根基) であると言う.

$\mathcal{C}$ ⊂Mod-R とする. $\mathcal{C}$ に関する捩れ理論 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ とは $\mathcal{T}\subset\mathcal{C},\mathcal{T}\subset\mathcal{C}$ であって次の条件 (i)(ii)(iii) を満たすものである.

(i) 任意の $T\in\mathcal{T}$, $F\in\mathcal{F}$ に対し, いつでも $\mathrm{Hom}_R(T,F)=0$ が成り立つ.

(ii) 任意の $F\in\mathcal{F}$ に対し $\mathrm{Hom}_R(M,F)=0$ であるなら $M\in\mathcal{T}$ が成り立つ.

(iii) 任意の $T\in\mathcal{T}$ に対し $\mathrm{Hom}_R(T,N)=0$ であるなら $N\in\mathcal{F}$ が成り立つ.

$t(M)=\sum_{\mathcal{T}\ni N\subset M} N\ (=\cap_{M/N\in\mathcal{F}} N)$ とすると $\mathcal{T}=\mathcal{T}_t$ 及び $\mathcal{F}=\mathcal{F}_t$ が成り立ち, さらに t が冪等根基になる. 逆に t が冪等根基であるならば $(\mathcal{T}_t,\mathcal{F}_t)$ は捩れ理論になる. 任意の加群 M とその部分加群 N に対し $\sigma(N)=N\cap\sigma(M)$ が成り立つ時に弱根基 σ は左完全であるという. 左完全な弱根基は冪等である. 加群 M とその部分加群 N に対し $M/N\in\mathcal{T}_\sigma$ のとき N を M の σ-dense な部分加群という. N は essential で σ-dense な M の部分加群のとき N は σ-essential な M の部分加群と言う. またそのとき M は N の σ-essential な拡大であるといい

$N \subset_{\sigma-ess} M$ で表すことにする．σ は冪等根基であるとする．$\mathrm{Hom}_R(M,-)$ が $C \in \mathcal{T}_\sigma$ である短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ の完全性を保つとき加群 M は σ-入射的であると言う．加群 M に対し M を essential な加群として含む入射加群を移入包絡といい $E(M)$ で表す．$E(M)$ は存在し同型を除いて一意的に決定する.$E_\sigma(M)$ は $E_\sigma(M)/M := \sigma(E(M)/M)$ で定義される．σ は根基であるから $E(M)/E_\sigma(M) \in \mathcal{F}_\sigma$ である. 従って任意の加群 M に対し $E_\sigma(M)$ は σ-入射的であることがわかる.σ は冪等であるから M は $E_\sigma(M)$ の σ-essential な部分加群である.

2. COMPLEMENT と CLOSED な部分加群

加群 M の部分加群 B は M の中に σ-essential な拡大をもたないとき B は M の σ-closed な部分加群であると言うことにする．加群の complement と closed な部分加群は一致するが, これを捩れ理論的に拡張する．次の命題は σ が恒等関手のときを考えれば [2] の Proposition 1.4 の拡張になっている．

命題 1. σ は左完全根基とする．B は M の部分加群とし $\overline{B}/B := \sigma(M/B)$ と定義する．そのとき次の条件は同値である．

(1) B は $\overline{B}$ の closed な部分加群である．

(2) B は M の σ-closed な部分加群である．

(3) B は $\overline{B}$ のある部分加群の $\overline{B}$ における complement である．

(4) X は $\overline{B}$ における B の complement であるならば B は $\overline{B}$ における X の complement である．

(5) $B = E_\sigma(B) \cap M$ が成り立つ．

(6) $\overline{B} \supseteq_{ess} X \supseteq B$ であるならば $X/B \subset_{ess} \overline{B}/B$ が成り立つ．

(7) $B = E(B) \cap \overline{B}$ が成り立つ．

(8) $M \supseteq M_1 \supseteq K$ であり $M/M_1 \in \mathcal{F}_\sigma$ である M の部分加群 M_1, K があって B は M_1 における K の complement になる．

(9) $M/X \in \mathcal{T}_\sigma$ で $B \subseteq X \subseteq_{ess} M$ であるならば $X/B \subseteq_{ess} M/B$ となる．

証明. (2)→(1): B は M で σ-closed であるとする．$B \subseteq_{ess} H \subseteq \overline{B}$ である H に対し $H/B \subseteq \overline{B}/B = \sigma(M/B) \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $H/B \in \mathcal{T}_\sigma$ となる．よって $B \subseteq_{\sigma-ess} H \subseteq M$ が成り立ち (2) より $H = B$ が従う．

(1)→(2): B は $\overline{B}$ で closed とする.$B \subseteq_{\sigma-ess} N \subseteq M$ であるとき $B \subseteq_{ess} N$ で $N/B \in \mathcal{T}_\sigma$ である．そのとき $N/B \subseteq \sigma(M/B) = \overline{B}/B$ であるから $B \subseteq_{ess} N \subseteq \overline{B}$ が成り立ち (1) より $B = N$ が従う．

(2)→(6): B は M で σ-closed で $\overline{B} \supseteq_{ess} X \supseteq B$ とする．$Y/B \subseteq \overline{B}/B$ で $X/B \cap Y/B = \overline{0}$ とする．そのとき $X \cap Y = B$ となる．$X \subseteq_{ess} \overline{B}$ であるから $B = Y \cap X \subseteq_{ess} Y \cap \overline{B} = Y$ となる．$Y/B = Y/(Y \cap X) \cong (Y+X)/X \subseteq \overline{B}/X \twoheadleftarrow \overline{B}/B \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $B \subseteq_{\sigma-ess} Y$ である．B は M において σ-closed であるから $Y = B$ が従い $X/B \subseteq_{ess} \overline{B}/B$ が成り立つ．

(6)→(4): X は $\overline{B}$ において B の complement とする. B' は $\overline{B}$ における B を含む X の complement とする. そのとき $(X \oplus B) \cap B' = (X \cap B') \oplus B = B$ が従うので $((X \oplus B)/B) \cap (B'/B) = \bar{0}$ が成り立つ.$X \oplus B \subseteq_{ess} \overline{B}$ であるから (6) より $(X \oplus B)/B \subseteq_{ess} \overline{B}/B$ である. $((X \oplus B)/B) \cap (B'/B) = \bar{0}$ であるから $B' = B$ が言える.

(4)→(3): Zorn の補題より $\overline{B}$ に B の complement はいつでも存在するから明らかである.

(3)→(2): B は $\overline{B}$ の部分加群 K の $\overline{B}$ における complement とする. そのとき B は $\overline{B}$ において closed である. B は M で σ-closed であることを示す.$B \subseteq_{\sigma-ess} B' \subseteq M$ とする. そのとき $B \cap \overline{B} = B \subseteq_{ess} B' \cap \overline{B}$ となる.B は $\overline{B}$ において essentially closed であるから,$B = B' \cap \overline{B}$ が従う.

$\mathcal{T}_\sigma \ni B'/B = B'/(B' \cap \overline{B}) \cong (B' + \overline{B})/\overline{B} \subseteq M/\overline{B} \cong (M/B)/\sigma(M/B) \in \mathcal{F}_\sigma$ であるから $B' = B$ が従う.

(2)→(5): $B \subseteq_{\sigma-ess} E_\sigma(B) \cap M \subseteq M$ であるから (2) より $E_\sigma(B) \cap M = B$ が従う.

(5)→(2): $B \subseteq_{\sigma-ess} X \subseteq M$ とする. そのとき $E_\sigma(B) = E_\sigma(X)$ が成り立つから (5) により $B = E_\sigma(B) \cap M$ が従う. $B \subseteq X \subseteq E_\sigma(X) \cap M = E_\sigma(B) \cap M = B$ であるから $X = B$ が従う.

(1)→(7): $B \subseteq_{ess} E(B) \cap \overline{B} \subseteq \overline{B}$ であるから $B = E(B) \cap \overline{B}$ が従う.

(7)→(1): $B \subseteq_{\sigma-ess} X \subseteq \overline{B}$ とする. そのとき $E(X) = E(B)$ が従う.$B \subseteq X \subseteq E(X) \cap \overline{B} = E(B) \cap \overline{B} = B$ であるから $B = X$ が成り立つ.

(2)→(8): B は σ-closed な M の部分加群とする.$\overline{B}$ の定義により $M/\overline{B} \in \mathcal{F}_\sigma$ である.$\overline{B}$ における B の complement を K とする. そのとき良く知られているように $B \oplus K \subseteq_{ess} \overline{B}$ であり $(B \oplus K)/K \subseteq_{ess} \overline{B}/K$ である. L は K の $\overline{B}$ における complement で B を含むものを取る. $(B \oplus K)/K \subseteq_{\sigma-ess} \overline{B}/K$ であるから $(B \oplus K)/K \subseteq_{\sigma-ess} (L \oplus K)/K$ である. よって $L \subseteq_{\sigma-ess} B$ であるから (2) により $B = L$ が従う. それで B は $\overline{B}$ における K の complement である.

(8)→(2): $K \subseteq M_1, M/M_1 \in \mathcal{F}_\sigma$ であり B は M_1 における K の complement であるような M の部分加群 K, M_1 を考える. そのとき B は M_1 において closed である.B は M において σ-closed であることを言いたい.$B \subseteq_{\sigma-ess} B_1 \subseteq M$ とする. そのとき $B = B \cap M_1 \subseteq_{ess} B_1 \cap M_1 (\subseteq M_1)$ である.B は M_1 において closed であるから $B = B_1 \cap M_1$ が従う. また $\mathcal{T}_\sigma \ni B_1/B = B_1/(B_1 \cap M_1) \cong (B_1 + M_1)/M_1 \subseteq M/M_1 \in \mathcal{F}_\sigma$ であるから $B_1 = B$ が従う.

(2)→(9): B は M の σ-closed な部分加群とする. $M/X \in \mathcal{T}_\sigma$ で $B \subseteq X \subseteq_{ess} M$ とする. $B \subseteq Q \subseteq M$ で $(X/B) \cap (Q/B) = 0$ とする. $B = Q \cap X \subseteq_{ess} Q \cap M = Q$ であり $Q/B = Q/(Q \cap X) \cong (Q + X)/X \subseteq M/X \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $B \subseteq_{\sigma-ess} Q \subseteq M$ である. B は M の σ-essentially closed な部分加群であるから , $B = Q$ であり,$(Q/B) = 0$ となる. よって $X/B \subseteq_{\sigma-ess} M/B$ と

なる.

(9)→(2): $B \subseteq_{\sigma-ess} X \subseteq M$ とする. B' は M における B の complement とする. そのとき $B \oplus B' \subseteq_{ess} M$ である. (9) より $(B \oplus B')/B \subseteq_{ess} M/B$ である. $B \cap (B' \cap X) = 0$ であるから $B' \cap X = 0$ である. $((B \oplus B')/B) \cap (X/B) = [(B \oplus B') \cap X]/B = [B \oplus (B' \cap X)]/B = 0$ であるから $(X/B) = 0$ となる.

3. σ-自己入射的加群

加群 M の任意の σ-dense な部分加群 N に対し関手 $\mathrm{Hom}_R(\_, A)$ が短完全列 $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ の完全性を保持するとき, 加群 A は σ-M-入射的であると言う. また加群 M が σ-自己入射的であるのは,M が σ-M-入射的であるときに言う. 次の命題は [1] の Theorem 15 を一般化する.

命題 2. σ は左完全根基とする. A は σ-M-入射的であるための必要充分条件は $\mathrm{Hom}_R(E_\sigma(M), E_\sigma(A))$ の任意の元 f に対し $f(M) \subseteq A$ がいつでも成り立つことである.

証明.(←): N は M の σ-dense な部分加群とする. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to N & \to & M \to M/N \to 0 \\ \downarrow_f & & \downarrow_g & \\ 0 \to A & \longrightarrow & E_\sigma(A) & \end{array}$$

,$f \in \mathrm{Hom}_R(N, A)$ は $g \in \mathrm{Hom}_R(M, E_\sigma(A))$ に拡張でき,

g は $h \in \mathrm{Hom}_R(E_\sigma(M), E_\sigma(A))$ に拡張できる. 仮定より $g(M) = h(M) \subseteq A$ が成り立つので f は $h|_M \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$ に拡張できる. よって A は σ-M-入射的になる.

(→): $f \in \mathrm{Hom}_R(E_\sigma(M), E_\sigma(A))$ に対し $f|_{M \cap f^{-1}A} \in \mathrm{Hom}_R(M \cap f^{-1}(A), A)$ である. $M/(M \cap f^{-1}(A)) \simeq (M + f^{-1}(A))/f^{-1}(A) \simeq (f(M) + A)/A \subseteq E_\sigma(A)/A \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $M/(M \cap f^{-1}(A)) \in \mathcal{T}_\sigma$ である. 次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & M \cap f^{-1}(A) & \to M \to M/(M \cap f^{-1}(A)) \to 0 \\ & {}_f\downarrow \quad \swarrow_g & \\ & A & \end{array}$$

A は σ-M-入射的であるから $f|_{M \cap f^{-1}(A)}$ は $g \in \mathrm{Hom}_R(M, A)$ に拡張できる. $(g - f)(M \cap f^{-1}(A)) = 0$ であるから $\ker(g - f) \supseteq M \cap f^{-1}(A)$ である. $x \in (g - f)^{-1}(A)$ なら $a \in A$ があって $g(x) - f(x) = a$ となる. そしてそのとき $f(x) = g(x) - a \in A$ であるから $x \in f^{-1}(A)$ が得られる. 従って $(g - f)^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(A)$ が成り立ち $M \cap (g - f)^{-1}(A) \subseteq M \cap f^{-1}(A) \subseteq \ker(g - f)$ が言える. もし $a \in A$ と $m \in M$ で $a = (g - f)(m) \in (g - f)M \cap A$ であるなら $m \in (g - f)^{-1}a \subseteq M \cap (g - f)^{-1}A \subseteq \ker(g - f)$ となる. よってそのとき $0 = (g - f)(m) = a$ となる. よって $(g - f)M \cap A = 0$ が得られる. $A \subseteq_{ess} E_\sigma(A)$ であるから $(g - f)M = 0$ が得られる. 従って $f(M) = g(M) \subseteq A$ が得られる.

次は [4] の Johnson &Wong's Theorem の一般化である.

Corollary 3. σ は左完全根基とする.

A は σ-自己入射的 $\Longleftrightarrow f \in \mathrm{Hom}_R(E_\sigma(A), E_\sigma(A))$ ならば $f(A) \subseteq A$

次の補題は [3] の Proposition 2.3 を拡張する.

補題 4. A は σ-自己入射的で $E_\sigma(A) = M \oplus N$ であるなら $A = (M \cap A) \oplus (N \cap A)$ が成り立つ.

証明. $p_M(p_N)$ は各々$E_\sigma(A)$ から $M(N)$ への標準的射影とする. そのとき Corollay 3 により $p_M(A) \subseteq A$ と $p_N(A) \subseteq A$ が成立する. $m \in M$ と $n \in N$ に対し $A \ni a = m+n \in M+N$ とすると $A \ni p_M(a) = p_M(m+n) = m \in M$ である. よって $m \in A \cap M$ であり, 同様に $n \in A \cap N$ も成り立つ. よって $A \subseteq (M \cap A) \oplus (N \cap A)$ となる.

4. σ-C_iCONDITIONS

加群 M が条件 (C_i) を満たす定義を次に述べて置く.

(C_1) M の任意の部分加群が M のある直和因子の中で essential である.

(C_2) M の直和因子に同型な M の部分加群は M の直和因子である.

(C_3) M の直和因子 X, Y で $X \cap Y = 0$ であるものに対して $X \oplus Y$ も M の直和因子になる.

C_1 を満たす加群は extending (あるいは CS) と呼ばれる. C_1 と C_3 を満足する加群は quasi-continuous (あるいは π-injective) であると言われる. C_1 と C_2 を満足する加群は continuous であると言われる. 詳しくは [5] とその参考文献を参照されたい.

次に条件 (C_i) を捩れ理論を用いて考えることにする.

$N \subseteq_\oplus M$ で N は M の直和因子であることを表すことにする. 次の命題は [5] の Proposition 2.1 を拡張する.

命題 5. σ-自己入射的加群は次の 2 つの条件を満たす.

(σ-C_1)(:σ-extending) 任意の M の σ-dense 部分加群は M のある直和因子の中で essential である.

(σ-C_2)$M/A \in \mathcal{T}_\sigma, A \cong A_1 \subseteq_\oplus M$ のとき $A \subseteq_\oplus M$ が成り立つ.

証明. M は σ-自己入射的加群とする.

(σ-C_1): N は M の σ-dense な部分加群とする. 次の短完全列を考える. $0 \to M/N \to E_\sigma(M)/N \to E_\sigma(M)/M \to 0$. $\mathcal{T}_\sigma$ は extension で閉じているから $E_\sigma(M)/N \in \mathcal{T}_\sigma$ が成り立つ. さらに $\mathcal{T}_\sigma$ は factor で閉じているから $E_\sigma(M)/E_\sigma(N) \in \mathcal{T}_\sigma$ が成り立つ. $E_\sigma(N)$ は σ-入射的であるから $E_\sigma(M)$ の部分加群 E が存在して $E_\sigma(M) = E_\sigma(N) \oplus E$ と書ける. 補題4を用いて $M = (M \cap E_\sigma(N)) \oplus (M \cap E)$ が得られる. そのとき $N \subseteq_{\sigma-ess} (M \cap E_\sigma(N)) \subseteq_\oplus M$.

(σ-C_2): M は σ-M-入射的である. $M/A \in \mathcal{T}_\sigma, A \cong A_1 \subseteq_\oplus M$ とする. 次の図式を考える.

$$
\begin{array}{l}
0 \to A \xrightarrow{i} M \to M/A (M/A \in \mathcal{T}_\sigma) \\
\quad\ \ \downarrow_h \quad \downarrow_f \\
\quad\ \ A_1 \subseteq_\oplus M,
\end{array}
$$

, そこで h は A から A_1 への同型写像であり,i は A から M への inclusion である. M は σ-自己入射的であるから $fi = h$ を満たす $f : M \to M$ が存在する. $A_1 \subseteq_\oplus M$ であり,h は同型であるから i は split する. よって A は M の直和因子である.

次に C_3 の条件を 2 通りに拡張する.

(σ-C_3'):$M_1 \subseteq_\oplus M$, $M_2 \subseteq_\oplus M$ であり $M_1, M/M_2 \in \mathcal{T}_\sigma$ であって $M_1 \cap M_2 = 0$ とする. そのとき $M_1 \oplus M_2 \subseteq_\oplus M$ となる.

(σ-C_3):$M_1 \subseteq_\oplus M$, $M_2 \subseteq_\oplus M$ であり $M/(M_1 \oplus M_2) \in \mathcal{T}_\sigma$ であって $M_1 \cap M_2 = 0$ とする. そのとき $M_1 \oplus M_2 \subseteq_\oplus M$ となる.

このとき (σ-C_3) $\Rightarrow$ (σ-C_3') は明らかである.

次の命題は [5] の Proposition 2.2 を拡張する.

命題 6. 加群 M が (σ-C_2) の条件を満たすなら M は (σ-C_3') の条件も満たす.

証明. $M_1 \subseteq_\oplus M$, $M_2 \subseteq_\oplus M$ であり $M_1, M/M_2 \in \mathcal{T}_\sigma$ であって $M_1 \cap M_2 = 0$ とする. M_1 は M の直和因子であるからある部分加群 M_1' が存在して $M = M_1 \oplus M_1'$ と書ける. π を $M = M_1 \oplus M_1' \to M_1'$ の projection とする. modular law より次が成り立つ. $M_1 \oplus M_2 = M \cap (M_1 \oplus M_2) = (M_1 \oplus M_1') \cap (M_1 \oplus M_2) = M_1 \oplus (M_1' \cap (M_1 \oplus M_2))$. よって $\pi\ (M_2) = \pi\ (M_1 \oplus M_2) = \pi\ (M_1 \oplus (M_1' \cap (M_1 \oplus M_2))) = M_1' \cap (M_1 \oplus M_2)$ が成立する. よって $M_1 \oplus M_2 = M_1 \oplus \pi\ (M_2)$ であり $\pi\ (M_2) \subseteq M_1'$ が成り立つ. そのとき $\ker \pi\ |M_2 = \ker \pi \cap M_2 = M_1 \cap M_2 = 0$ であるから $\pi\ |M_2 : M_2 \twoheadrightarrow \pi\ (M_2) (\subseteq M)$ は同型である. $M_1'/\pi\ (M_2) \simeq M/M_2 \in \mathcal{T}_\sigma$ であり $M/M_1' \simeq M_1 \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから次の短完全列の中央の項が $\mathcal{T}_\sigma$ にある. $0 \to M_1'/\pi\ (M_2) \to M/\pi\ (M_2) \to M/M_1' \to 0$. よって $\pi\ (M_2)$ は M の σ-dense な部分加群である. よって (σ-C_2) の条件を用いて $\pi\ (M_2) \subseteq_\oplus M$ が得られる. よって M にある部分加群 X が存在して $M = X \oplus \pi\ (M_2)$ となる. modular law により $M_1' = (X \cap M_1') \oplus \pi\ (M_2)$ が成り立つ. よって $M = M_1 \oplus M_1' = M_1 \oplus (X \cap M_1') \oplus \pi\ (M_2) = (M_1 \oplus \pi\ (M_2)) \oplus (X \cap M_1') = M_1 \oplus M_2 \oplus (X \cap M_1')$ であり, 従って $M_1 \oplus M_2 \subseteq_\oplus M$ が得られる.

次の命題は [5] の Proposition 2.4 を一般化する.

命題 7. 加群 M が (σ-C_1) を満たすことと, closed で σ-dense な M の部分加群が M の直和因子であることは同値な条件である.

証明. $\Rightarrow$): N は M の closed で σ-dense な部分加群とする. $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $N \subseteq_{\sigma-ess} X \subseteq M$ で $M = X \oplus Y$ が成り立つ. N は M で closed であるから $N = X$ が得られる. よって $M = N \oplus Y$ となる.

$\Leftarrow$): N は M の σ-dense な部分加群とする．X は M における N の complement とする．Y は M における X の complement で,Y は N を含むものとする．そのとき Y は closed である．Y は N を含むから Y は M の σ-dense な部分加群である．仮 $\subseteq$ 定により Y は M の直和因子である． $N \subseteq_{\sigma-ess} Y$ を示したい． N は Y で essential でなければ, Y のゼロでない部分加群 H があって $N \cap H = 0$ となる． $N \cap (X \oplus H) \ni n = x + h, n \in N, x \in X$, $h \in H$ とする．そのとき $x = n - h \in X \cap Y = 0$ であるから $x = 0$. 従って $n = h \in N \cap H = 0$. 従って $N \cap (X \oplus H) = 0$ が得られる.X の取り方から $X = X \oplus H$ であり従って $H = 0$ が得られる. かくして N は Y において essential である.$M/N \supseteq Y/N$ であるから $Y/N \in \mathcal{T}_\sigma$ が成り立つ．よって $M/N \in \mathcal{T}_\sigma$ のとき M の部分加群 Y があって $Y \supseteq_{\sigma-ess} N$ であり $M \supseteq_\oplus Y$ となる.

命題 8. A は M の部分加群とする．A は M の直和因子の中で σ-closed な部分加群ならば A は M の中で σ-closed である.

証明. M は $M = M_1 \oplus M_2$ と分解されていて A は M_1 で σ-closed であるとする．π は $M_1 \oplus M_2 \twoheadrightarrow M_1$ の標準的な projection とする． $A \subseteq_{\sigma-ess} B \subseteq M$ とする．このとき $A = \pi(A) \subseteq_{\sigma-ess} \pi(B) \subseteq M_1$ は成り立つ． A は M_1 で σ-closed であるから $\pi(B) = A \subseteq B$ である．従って $(1-\pi)(B) \subseteq B$ である. $(1-\pi)(B) \cap A = 0$ であり $A \subseteq_{ess} B$ であるから $(1-\pi)(B) = 0$ が成立する．よって $A \subseteq_{\sigma-ess} B = \pi(B) \subseteq M_1$.$A$ は M_1 において σ-closed であるから $A = B$ が従う。

補題 9. もし $M = A \oplus B$ で $M \supseteq K_{ess} \supseteq A$ であるなら,$K = A$ が成り立つ.

証明. modular law により $K = A \oplus (K \cap B)$ が成立し $A \cap (K \cap B) = 0$ が成立する． $A \subseteq_{ess} K$ であるから $K \cap B = 0$ が成り立ち $K = A \oplus (K \cap B) = A$ が従う.

つぎの命題は [5] の Theorem 2.8 を一般化する.

命題 10. 次の条件 (1)(2)(3)(4) に対し (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (2) が成立する. もし $\ker f \in \mathcal{T}_\sigma$ が任意の $f \in \mathrm{End}_R(E_\sigma(M))$ に対し成立するなら (2) $\rightarrow$ (3) が成り立つ.

(1) M は条件 (σ-C_1) と (σ-C_3) を満たす.

(2) X, Y は M の σ-dense な部分加群で,X は Y の M の中での complement で Y は X の M の中での complement であるとき $M = X \oplus Y$ が成り立つ.

(3) 任意の冪等元 $f \in \mathrm{End}_R(E_\sigma(M))$ に対して $f(M) \subseteq M$ が成り立つ.

(4) $E_\sigma(M) = \oplus_{\in I} E_i$ のとき $M = \oplus_{i \in I}(M \cap E_i)$ が成り立つ.

証明. (1) $\rightarrow$ (2): X, Y は M の σ-dense な部分加群で,X は Y の M の中での complement で,Y は X の M の中での complement であるとする．X と Y は M において closed であるから,(σ-C_1) より X と Y は M の直和因子である．そのとき $X \oplus Y \subseteq_{\sigma-ess} M$ であるから (σ-C_3) により $X \oplus Y$ は M の

直和因子である．よって $M = X \oplus Y \oplus Z \supseteq_{ess} (X \oplus Y)$ であるから $Z = 0$ が従い $M = X \oplus Y$ となる．

(2) → (3): ここでは任意の冪等元 $f \in \mathrm{End}_R(E_\sigma(M))$ に対して $\mathrm{ker} f \in \mathcal{T}_\sigma$ であることを仮定する．$A_1 = M \cap f(E_\sigma(M))$, $A_2 = M \cap (1-f)(E_\sigma(M))$ と決める．そのとき明らかに $A_1 \cap A_2 = 0$ である．任意の冪等元 $f \in \mathrm{End}_R(E_\sigma(M))$ に対し $E_\sigma(M) = f(E_\sigma(M)) \oplus \mathrm{ker} f$ である．

$M/A_i \simeq (M + f(E_\sigma(M)))/f(E_\sigma(M)) \subseteq E_\sigma(M)/f(E_\sigma(M)) \simeq \mathrm{ker} f \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $M/A_i \in \mathcal{T}_\sigma$ となる． B_1 は M の中で考えて A_2 を含む A_1 の complement とする．B_2 は M の中で考えて A_2 を含む B_1 の complement とする．そのとき仮定より $M = B_1 \oplus B_2$ となる．π は $B_1 \oplus B_2 \twoheadrightarrow B_1$ の標準的な projection とする．次に $M \cap (f - \pi)(M) = 0$ を示す．$x, y \in M$ で $(f - \pi)(x) = y$ とする．そのとき $f(x) = y + \pi(x) \in M$ であるから $f(x) \in A_1$ となる．さらに $(1-f)(x) \in M$ であるから $(1-f)(x) \in A_2$ となる．従って $x = f(x) \oplus (1-f)(x) \in A_1 \oplus A_2 \subseteq B_1 \oplus B_2 = M$ である．また $\pi(x) = \pi(f(x)) + \pi(1-f)(x) = f(x) + 0$ であるから $y = 0$ が得られる．よって $M \cap (f - \pi)(M) = 0$ となる．$M \subseteq_{ess} E_\sigma(M)$ であるから $(f - \pi)(M) = 0$ が従い $f(M) = \pi(M) \subseteq M$ となる．

(3) → (4): $E_\sigma(M) = \oplus_{i \in I} E_i$ とする．明らかに $M \supseteq \oplus_{i \in I}(M \cap E_i)$ は成り立つ．$m \in M \subseteq E_\sigma(M) = \oplus_{i \in I} E_i$ とする．そのとき I の有限部分集合 F があって $m \in \oplus_{i \in F} E_i$ となる． $E_\sigma(M) = (\oplus_{i \in F} Ei) \oplus (\oplus_{i \in I-F} E_i)$ と書く．そのとき直交冪等元 $f_i \in \mathrm{End}_R(E_\sigma(M))(i \in F)$ があって $E_i = f_i(E_\sigma(M))$ となる．仮定より $f_i(M) \subseteq M$ であるから $m = \oplus_{i \in F} f_i(m) \in \oplus_{i \in F}(M \cap E_i)$ である．よって $M \subseteq \oplus_{i \in I}(M \cap Ei)$ となり $M = \oplus_{i \in I}(M \cap E_i)$ が得られる．

(4) → (1): A は M の σ-dense な部分加群とする．次の短完全列を考える．$0 \to M/A \to E_\sigma(M)/A \to E_\sigma(M)/M \to 0.\mathcal{T}_\sigma$ は i extension で閉じているから $E_\sigma(M)/A \in \mathcal{T}_\sigma$ が得られる．$E_\sigma(M)/A \twoheadrightarrow E_\sigma(M)/E_\sigma(A)$ であるから $E_\sigma(M)/E_\sigma(A) \in \mathcal{T}_\sigma$ となる．よって $0 \to E_\sigma(A) \to E_\sigma(M) \to E_\sigma(M)/E_\sigma(A)$ は split する．．従ってある部分加群 E があって $E_\sigma(M) = E_\sigma(A) \oplus E$ となる．仮定より $M = (M \cap E_\sigma(A)) \oplus (M \cap E)$. が得られる．$(M \cap E_\sigma(A))/A \subseteq E_\sigma(A)/A \in \mathcal{T}_\sigma$ であるから $A \subseteq_{\sigma-ess} M \cap E_\sigma(A) \subseteq_\oplus M$ が成り立つ．よって M は $(\sigma\text{-}C_1)$ の条件を満たす．

次に $(\sigma\text{-}C_3)$ の条件を示す．M_1 と M_2 は M の直和因子で $M_1 \cap M_2 = 0$ であるものとする．そのとき $M/(M_1 \oplus M_2) \in \mathcal{T}_\sigma$ は明らかである．次の短完全列を考える．$0 \to M/(M_1 \oplus M_2) \to E_\sigma(M)/(M_1 \oplus M_2) \to E_\sigma(M)/M \to 0.\mathcal{T}_\sigma$ は extension で閉じているから $E_\sigma(M)/(M_1 \oplus M_2) \in \mathcal{T}_\sigma$ となる．よってさらに $E_\sigma(M)/(E_\sigma(M_1) \oplus E_\sigma(M_2)) \in \mathcal{T}_\sigma$ も成立する．$E_\sigma(M_1) \oplus E_\sigma(M_2)$ は σ-入射的だから次の短完全列は分解する．$0 \to E_\sigma(M_1) \oplus E_\sigma(M_2) \to E_\sigma(M) \to E_\sigma(M)/(E_\sigma(M_1) \oplus E_\sigma(M_2)) \to 0$. よって $E_\sigma(M)$ の部分加群 E があって $E_\sigma(M) = E_\sigma(M_1) \oplus E_\sigma(M_2) \oplus E$ となる．そのとき仮定より

$M=(M\cap E_\sigma(M_1))\oplus(M\cap E_\sigma(M_2))\oplus(M\cap E)$ となる．M_i は M の直和因子で $M_i\subseteq_{ess} M\cap E_\sigma(M_i)$ であるから補題 9 より $M_i=M\cap E_\sigma(M_i)$ が成立する．よって $M=M_1\oplus M_2\oplus(M\cap E)$ が成立する．

(4) → (3): $\mathrm{End}_R(E_\sigma(M))$ の元から冪等元 f をとる．そのとき良く知られているように $E_\sigma(M)=(\mathrm{Im}f)\oplus(\ker f)$ となる．よって仮定より $M=(M\cap\mathrm{Im}f)\oplus(M\cap\ker f)$ が成立する．よって M の任意の元 m は $x\in M\cap\mathrm{Im}f$ と $y\in M\cap\ker f$ があって $m=x+y$ となる．このとき $f(m)=f(x)+f(y)=x+0\in M$ であるから $f(M)\subseteq M$ が成り立つ．

参考文献

1. G. Azumaya, **M-projective and M-injectives modules,** unpublished. (1974)

2. K. R. Goodearl, "**Ring Theory**", Dekker, New York, (1976)

3. M. Harada, **Note on quasi-injective modules**, Osaka J. Math. 2 (1965), 351-356.

4. R. E. Johnson and E. T. Wong, **Quasi-injective modules and irreducible rings**, J. London Math. Soc. 36(1961), 260-268.

5. S. H. Mohamed and B. J. Muller, "**Continuous and discrete modules**", Cambridge Univ. Press, (1990)

GENERAL EDUCATION
HAKODATE NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY
14-1 TOKURA-CHO HAKODATE-SI HOKKAIDO, 042-8501 JAPAN
E-mail address: takehana@hakodate-ct.ac.jp