数理解析研究所講究録
第 1916 巻 2014 年 55-69

ヘッセ領域上の α-接続による調和写像について

(Harmonic maps relative to α-connections on Hessian domains)

東北学院大学工学部機械知能工学科　　魚橋 慶子
Keiko Uohashi
Department of Mechanical Engineering & Intelligent Systems,
Faculty of Engineering, Tohoku Gakuin University
uohashi@mail.tohoku-gakuin.ac.jp

1. はじめに

調和写像は，通常レビ・チビタ接続を用いて定義される．本発表ではヘッセ領域を統計多様体とみなし，レビ・チビタ接続と限らない α-接続による調和写像の定義・性質・例を統計部分多様体（等位曲面など）に対して紹介する．まずヘッセ領域上の双対平坦構造について確認する．次にヘッセ領域の等位曲面（リーマン計量のポテンシャル関数が一定の値をとるような曲面）の性質を述べる．そして通常の調和写像の定義，α-接続による調和写像の定義を（共同研究会場で述べなかった定義も含めて）紹介し，ヘッセ領域の等位曲面に関する例を挙げる．

背景を説明する．

リーマン多様体の調和写像の代表例として測地線，ケーラー多様体間の正則写像などが挙げられる．またリーマン多様体間の写像のホモトピー類の代表元として調和写像がしばしば選ばれる．しかしある条件の下，エルミート多様体からリーマン多様体への写像のホモトピー類の代表元として調和写像ではなく，エルミート調和写像を選ぶことができるという報告がある [JY][Ni][GK]．かつエルミート調和写像の類似であるアファイン調和写像に関しても，ケーラー・アファイン多様体上で同様の定理がある [JŞ]．

アファイン幾何学，ヘッセ幾何学にもレビ・チビタ接続以外の接続による調和写像は現れる．野水・佐々木は中心アファインはめ込みのラプラシアンを，情報幾何学の言葉で言えば，双対接続に関し計算している [NS1][NS2]．志磨は n 次元等位曲面から $(n+1)$ 次元双対アファイン空間への調和写像を，情報幾何学の言葉で言えば，双対接続に関し計算している [S1]．しかし双対接続によるその他の調和写像ならびに同次元曲面間の調和写像について，あまり調べられていないようである．そこで等位曲面間の α-接続による調和写像についての結果を紹介する．

写像のホモトピーに関する応用も無く，統計学・データ解析学に関する応用も見つけていない．しかし見通しの良くなる現象があることを期待しつつ定義・性質を挙げる．

2. ヘッセ領域の双対平坦構造

実アファイン空間 $\mathbf{A}^{n+1}$（real affine space of $\dim(n+1)$）上の標準平坦アファイン接続（canonical flat affine connection）を D，アファイン座標系を $\{x^1,\cdots,x^{n+1}\}$ とする（i.e. $Ddx^i=0$, $i=1,\cdots,n+1$）．領域 $\Omega\subset\mathbf{A}^{n+1}$ と Ω 上の関数 φ に対し，$g=Dd\varphi=(\partial^2\varphi/\partial x^i\partial x^j)dx^idx^j$ を擬リーマン計量（pseudo-Riemannian metric）とす

る．このとき (Ω, D, g) をヘッセ領域（Hessian domain）という．

多様体 N 上の擬リーマン計量 h と捩率0のアファイン接続 ∇ に対し，∇h が対称 $(0,3)$-テンソル場であるとする．このとき (N, ∇, h) は統計多様体（statistical manifold）とよばれる（注：統計多様体の定義は何通りかある [M]．しかしヘッセ領域との関連を調べるため上述の定義とする.）．

以下 g を正定値とする．

ヘッセ領域 $(\Omega, D, g = Dd\varphi)$ は平坦統計多様体である．逆に，平坦統計多様体は局所的にヘッセ領域となる [AN][S2][S3].

$\mathbf{A}^{n+1}$ の双対アファイン空間（dual affine space）を $\mathbf{A}^*_{n+1}$ とする．$\{x^1, \cdots, x^{n+1}\}$ に関する双対アファイン座標系を $\{x^*_1, \ldots, x^*_{n+1}\}$ とし，$\mathbf{A}^*_{n+1}$ 上の標準平坦アファイン接続を D^* とする．ヘッセ領域 (Ω, D, g) から $(\mathbf{A}^*_{n+1}, D^*)$ への勾配写像（gradient mapping）ι を次で定義する．

$$x^*_i \circ \iota = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad i = 1, \cdots, n+1 \tag{1}$$

さらに Ω 上の平坦アファイン接続 D' を次で定義すると，D' は D の双対平坦アファイン接続（dually flat affine connection）となる．ここで ι_* は写像 ι の微分である．

$$\iota_*(D'_X Y) = D^*_X \iota_*(Y), \qquad X, Y \in \Gamma(T\Omega) \tag{2}$$

ここで $\Gamma(T\Omega)$ を Ω 上のなめらかなベクトル場全体とする．ヘッセ領域 (Ω, D, g) を統計多様体とみなすとき，(Ω, D', g) は (Ω, D, g) の双対平坦統計多様体である．

3. ヘッセ領域の等位曲面の1-共形平坦性

ヘッセ領域の等位曲面に関する定理をいくつか紹介する.「等位曲面は1-共形平坦統計多様体（1-conformally flat statistical manifold）である」という定理と「1-共形平坦統計多様体からヘッセ領域が誘導される」という定理に，大雑把だが分類することができる．

統計多様体や情報幾何学の研究に1-共形平坦統計多様体がしばしば利用される理由として，次の事実が挙げられる．

Fact 1. ([K]) 統計多様体 (M, ∇, h) が1-共形平坦となるのは，双対接続 ∇ が対称リッチテンソルをもつ射影平坦接続となる場合に限る．

Fact 2. ([K]) 単連結統計多様体 (M, ∇, h) が $\mathbf{R}^{n+1}$ へ実現可能なのは，(M, ∇, h) が1-共形平坦となる場合に限る．

上記は文献 [K] Proposition 1，Corollary の和訳（意訳）である.（注：第41回幾何学シンポジウム講演要旨（1994年，於 筑波大学）の黒瀬俊先生の頁に，文献 [K] の内容が日本語で記されている．そこには統計多様体ではなく「統性多様体」という絶滅危惧用語が使われている.）Fact 2 の「実現可能」とは,「等積はめこみ（equiaffine immersion）からアファイン接続 ∇ とリーマン計量 h が得られる」という意味である．実現するための等積はめこみは，アファイン変換の自由度を除き一意に定まる．

M を $(n+1)$ 次元ヘッセ領域 $(\Omega, D, g = Dd\varphi)$ 上の関数 φ の，単連結な n 次元等位曲面（level surface）とする（$n \geq 2$）．M 上に誘導される部分多様体としての接続，リーマン計量を同じ記号 D, g で表す.（注：文献 [HS]，[UOF1] ではヘッセ領域を $(\Omega, \tilde{D}, \tilde{g})$，等位曲面を (M, D, g) と区別している.）このとき次が従う.

Theorem 1. ([UOF1]) ヘッセ領域 (Ω, D, g) を平坦統計多様体とみなすとき，等位曲面 (M, D, g) は (Ω, D, g) の 1-共形平坦統計部分多様体となる.

Theorem 2. ([UOF1]) リーマン計量をもつ n 次元 1-共形平坦統計多様体（$n \geq 2$）は，局所的に $(n+1)$ 次元平坦統計多様体の統計部分多様体として表される.

Theorem 1 の証明概要: $\tilde{E}$ を g による Ω 上の勾配ベクトル場とする．すなわち $X \in T\Omega$ に対し，$g(X, \tilde{E}) = d\varphi(X)$ と定義する．領域 Ω の部分集合 $\Omega_o = \{x \in \Omega \mid d\varphi_x \neq 0\}$ のベクトル場 E を次で定める.

$$E = -d\varphi(\tilde{E})^{-1}\tilde{E} \quad \text{on} \quad \Omega_o \quad \text{：正規化された勾配ベクトル場} \tag{3}$$

$x \in \Omega_o$ に対し，ベクトル E_x はリーマン計量 g に関して接空間 T_xM に直交する．ここで M は関数 φ の等位曲面で x を含むものとする（M は n 次元であることに注意）．id を等位曲面 M から Ω への標準的はめ込みとする．アファイン接続 D とアファインはめ込み (id, E) に対し，M 上の誘導アファイン接続 D^E，アファイン基本形式 g^E を次で定義する.

$$D_X Y = D_X^E Y + g^E(X, Y)E \quad \text{for} \quad X, Y \in \Gamma(TM) \tag{4}$$

このとき部分多様体としての構造 (M, D, g) とアファインはめ込みとしての構造 (M, D^E, g^E) が一致することを，計算により確認することができる．また横断的ベクトル場 E を次のように分解する.

$$D_X E = S^E(X) + \tau^E(X)E \quad \text{for} \quad X \in \Gamma(TM) \tag{5}$$

ここで S をシェイプ作用素（shape operator），τ を横断的接続形式（transversal connection form）という．文献 [HS] には $\tau^{\tilde{E}}(X) = (d\log|d\varphi(\tilde{E})|)(X)$ が示されている．しかし正規化された E に対しては $\tau^E(X) = 0$ が成り立つ．すなわち (id, E) は非退化等積アファインはめ込みであり，Fact 2 より (M, D^E, g^E) は 1-共形平坦統計多様体となる．ゆえに統計部分多様体 (M, D, g) は 1-共形平坦である．◇

Theorem 2 を示すには，1-共形平坦統計多様体を実現するアファインはめ込みを，横断的ベクトル場 E に沿って各点を移動させ，次元が 1 だけ高い統計多様体を構成すればよい.

さて Theorem 2 は，1 個の 1-共形平坦統計多様体が平坦統計多様体（ヘッセ領域）の部分多様体（特に等位曲面）として表されるというものである．ゆえに次の問題が生じる.

問題： 1-共形平坦統計多様体の複数個（連続濃度）の集合（葉層構造（foliation））が与えられたとき，それぞれを部分多様体とするような $(n+1)$ 次元平坦統計多様体（$(n+1)$ 次元ヘッセ領域）を「共通に」1つ選ぶことは可能だろうか．

それぞれの1-共形平坦統計多様体を実現するアファインはめこみに対するシェイプ作用素 S，横断的ベクトル場 E がいくつかの条件をみたすとき，この問題は肯定的に解決される（注：文献 [U3] と [U5] に説明されている．[U5] の方がより正確である.）．葉層構造上にアファイン接続とリーマン計量を定義し，それらがコダッチ方程式（Codazzi equation）をみたすことを示せばよい．なお平坦多様体において，リーマン計量 g がヘッセ計量であることと，コダッチ方程式 $(D_X g)(Y,Z) = (D_Y g)(X,Z)$ をみたすことは同値である [S2] [S3].

4. 等位曲面とアファインはめこみ

同一ヘッセ領域の異なる等位曲面間の関係について述べる．そのため等位曲面を実現するアファインはめこみ，余法線はめ込み，α-共形同値性について最初に説明する．統計多様体の立場で言えば，アファインはめこみが主座標に関連し，余法線はめ込みが双対座標に関連する．なお次節以降の内容と直接には無関係の内容もあるが，第3節の問題の解決に必要な設定を，多く説明する [I] [NP] [NS1] [UOF2].

Theorem 1 の証明概要に挙げられた等位曲面 (M, D, g)，アファインはめ込み (id, E)，分解 (4) を考える．このとき式 (1) で定義された勾配写像 ι の M への制限写像（同じ記号 ι であらわす）は，アファインはめ込み (id, E) の余法線はめ込み（conormal immersion）となる．すなわち次をみたす．

$$\langle \iota(p), Y_p \rangle = 0 \quad \text{for } Y_p \in T_pM, \qquad \langle \iota(p), E_p \rangle = 1 \quad \text{for } p \in M \tag{6}$$

ただし $T_p\mathbf{A}^{n+1}$ を $\mathbf{A}^{n+1}$ とみなし，$a \in \mathbf{A}^*_{n+1}$ と $b \in \mathbf{A}^{n+1}$ のペアリングを $\langle a, b \rangle$ とする．また余法線はめ込み ι とその微分 ι_* は次をみたすことが，知られている．

$$\langle \iota_*(Y), E \rangle = 0, \quad \langle \iota_*(Y), X \rangle = -g(Y, X) \quad \text{for } X, Y \in \Gamma(TM) \tag{7}$$

（注：式 (6)，(7) は勾配写像に限らない余法線はめ込みの性質である.）さらに余法線はめ込み $\iota : M \to \mathbf{A}^*_{n+1} - \{0\}$ は中心アファイン超曲面（centro-affine hypersurface）となる．ここで中心アファイン超曲面とは，横断的ベクトル場を各点の位置ベクトル（の逆符号）とするアファインはめ込みから，得られる曲面である．統計多様体を意識すれば，等位曲面 M を双対座標で表示したものが余法線はめこみであると言える．

等位曲面間の写像を，双対座標による射影変換により定義しよう．M が含まれるヘッセ領域 Ω の，n 次元等位曲面 $\hat{M}$ を考える．$\hat{M}$ のアファインはめこみに対応する余法線はめ込みを，$\hat{\iota} : \hat{M} \to \mathbf{A}^*_{n+1} - \{0\}$ とする．（注：2つの余法線はめ込み ι，$\hat{\iota}$ は，いずれも勾配写像 ι を等位曲面上へ制限したものである．記号が煩雑にならないよう，$\hat{M}$ に対する方のみを $\hat{\iota}$ と記す.）以下局所的な話に限る．M 上の関数 λ を，$p \in M$ に対し $e^{\lambda(p)}\iota(p) \in \hat{\iota}(\hat{M})$ をみたす値 $\lambda(p) \in \mathbf{R}^+$ を対応させることで定義する．すなわち双対座標に関し点 p の位置ベクトルを，原点を基準に $\hat{M}$ へ射影するときの「伸縮率」を $e^{\lambda(p)}$

とする．さらに M 上の関数 e^{λ} を，$(e^{\lambda})(p)=e^{\lambda(p)}$ により定義する．そして等位曲面間の写像 $\pi: M \to \hat{M}$ を次により定義する．

$$\hat{\iota} \circ \pi = e^{\lambda}\iota \tag{8}$$

次に写像 π とアファイン接続，リーマン計量との関係について考察する．等位曲面 $\hat{M}$ の統計多様体としての構造を $(\hat{M}, \hat{D}, \hat{g})$ とする．異なる曲面 M と $\hat{M}$ の構造を直接比較することはできない．そのため $\hat{M}$ 上の接続と計量を M 上へ引き戻す．式 (9) (10) で定義される M 上のアファイン接続 $\bar{D}$，$\bar{D}'$ を，$\hat{M}$ 上のアファイン接続 $\hat{D}$，$\hat{D}'$（$\hat{D}$ の双対接続）の M 上への引き戻しとする．

$$\begin{aligned}
\pi_*(\bar{D}_X Y) &= \hat{D}_{\pi_*(X)}\pi_*(Y), &\quad (9)\\
\pi_*(\bar{D}'_X Y) &= \hat{D}'_{\pi_*(X)}\pi_*(Y) \quad \text{for } X, Y \in \Gamma(TM) &\quad (10)
\end{aligned}$$

式 (11) で定義される $\bar{g}$ を，$\hat{M}$ 上のリーマン計量 $\hat{g}$ の M 上への引き戻しとする．

$$\bar{g}(X,Y) = e^{\lambda}g(X,Y) = \hat{g}(\pi_*(X), \pi_*(Y)) \tag{11}$$

式 (11) 中辺，右辺間の等号は，中心アファイン超曲面の射影の性質による．このとき $(M, \bar{D}, \bar{g})$ は統計多様体であり，$\bar{D}'$ は $\bar{D}$ の双対接続となる．したがって (M, D, g) と $(\hat{M}, \hat{D}, \hat{g})$ ではなく，(M, D, g) と $(M, \bar{D}, \bar{g})$ の関係を示すことで等位曲面間の性質を表す．

D に対する α 接続（α-connection）を $D^{(\alpha)}$ とし，$\bar{D}$ に対する α 接続を $\bar{D}^{(\alpha)}$ とする．

$$D^{(\alpha)} = \frac{(1+\alpha)D + (1-\alpha)D'}{2}, \quad \bar{D}^{(\alpha)} = \frac{(1+\alpha)\bar{D} + (1-\alpha)\bar{D}'}{2} \tag{12}$$

このとき，次の定理が成り立つ．

Theorem 3. $(M, D^{(\alpha)}, g)$ と $(M, \bar{D}^{(\alpha)}, \bar{g})$ は α-共形同値（α-conformally equivalent）である．

Theorem 3 の証明は，以下に挙げる α-共形同値性の定義と，$\alpha = 1, -1$ の場合の証明（[UOF2]）を基になされる．式 (13) (14) (15) の ϕ を λ へ置き換えるなどすればよい．

$\alpha \in \mathbf{R}$ に対し，統計多様体 (N, ∇, h) と $(N, \bar{\nabla}, \bar{h})$ が α-共形同値（α-conformally equivalent）であるとは次をみたす N 上の関数 ϕ が存在することをいう．

$$\begin{aligned}
\bar{h}(X,Y) &= e^{\phi}h(X,Y), &\quad (13)\\
h(\bar{\nabla}_X Y, Z) &= h(\nabla_X Y, Z) - \frac{1+\alpha}{2}d\phi(Z)h(X,Y) &\quad (14)\\
&\quad + \frac{1-\alpha}{2}\{d\phi(X)h(Y,Z) + d\phi(Y)h(X,Z)\}, \quad X, Y, Z \in \Gamma(TN) &\quad (15)
\end{aligned}$$

さらに $\bar{\nabla}$ が平坦であるとき，(N, ∇, h) は α-共形平坦（α-conformally flat）であるという [K]．

第3節で述べた1-共形平坦，(−1)-共形平坦は，それぞれ $\alpha = 1, -1$ の場合である．$\alpha = -1$ の場合は，旧来からの射影幾何学を起源とする性質が統計多様体（等位曲面）へ現れる．しかしその他の値に対する α 接続の性質は，$\alpha = -1$ に対する性質の変形により「強引に」導かれた感がある．例えば式 (14) (15) をみたす ∇ と $\bar{\nabla}$ は，$\alpha = -1$ の場合射影同値とよばれ，$\alpha = 1$ の場合双対射影同値とよばれる [I].

本共同研究中に，「調和写像やその他の事象が自然に定義できるよう，式 (14) (15) の定義を変更すれば如何か」という意見があった．(注：式 (14) (15) の有用性の否定ではない.)

5. 調和写像 (Harmonic maps)

第5節から第8節にかけては「調和」,「ラプラシアン」に関する既出概念の解説が多くを占める．詳細について該当論文・書籍をご覧願う．まず調和写像の復習を，文献 [EL]，[Ur] を参考に行う．

リーマン多様体（Riemannian manifold）(M, g)（$\dim M = m$）から (N, h)（$\dim N = n$）への C^∞ 級写像 ϕ が調和写像（harmonic map）であるとは，写像 ϕ のエネルギー (energy)

$$E(\phi) = \int_M e(\phi) v_g, \qquad v_g : \text{体積要素 (volume form) on } M \text{ for } g \tag{16}$$

が E の $C^\infty(M,N)$(M から N への C^∞ 級写像の集合）での臨界点（critical point）となるときをいう．ここで ϕ の任意の滑らかな変形 $\phi_t \in C^\infty(M,N)$，$-\epsilon < t < \epsilon$，$\phi_0 = \phi$ に対して

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} E(\phi_t) = 0 \tag{17}$$

をみたすとき，ϕ を臨界点という．ただし $e(\phi) \in C^0(M)$ は $\phi \in C^1(M,N)$ の密度関数 (density function) であり次で定義される．

$$e(\phi)(x) = \frac{1}{2} Tr_g(\phi^* h)(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} h(\phi_* u_i, \phi_* u_i), \qquad x \in M \tag{18}$$

ここで $\{u_i\}_{i=1}^m$ を g_x に対する T_xM の正規直交基底（orthonormal basis）とする．(実際は各点 $x \in M$ の近傍で局所正規直交標構場（local orthonormal frame）$\{e_i\}_{i=1}^m$ をとれば，積分計算が楽である.) 調和写像はリーマン計量 g，h により定まる．g，h に対する Levi-Civita 接続（Levi-Civita connection）を ∇，$\hat{\nabla}$ とし，$\hat{\nabla}$ の M 上への引き戻しを $\tilde{\nabla}$ で表すと，$\phi \in C^\infty(M,N)$ が調和写像であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} \tau(\phi) \equiv 0, \ \ \text{where } \tau(\phi)(x) \ &= \ \sum_{i=1}^{m} (\underline{\tilde{\nabla}_{e_i} \phi_* e_i} - \underbrace{\phi_* \nabla_{e_i} e_i})(x), \ x \in M, && (19) \\ \tilde{\nabla}_{e_i} \phi_* e_i \ &= \ \hat{\nabla}_{\phi_* e_i} \phi_* e_i \ \ : \text{引き戻しの定義} && (20) \end{aligned}$$

となる．$\tau(\phi)$ は $\{e_i\}_{i=1}^m$ の取り方によらないため $\tau(\phi) \in \Gamma(\phi^{-1}TN)$ をみたし，ϕ のテンション場（tension field）とよばれる．また行 (19) の方程式 $\tau(\phi) \equiv 0$ をオイラー・

ラグランジュ方程式（Euler-Lagrange equation）という．M，N の局所座標系（local coordinate system）$\{x^1, \cdots, x^m\}$，$\{y^1, \cdots, y^n\}$ と ∇，$\hat{\nabla}$ に対する Christoffel 記号 Γ_{ij}^k，$\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ とを用いれば，$x \in M$ における $\tau(\phi)$ の第 γ 成分の値は次で表される．

$$\tau(\phi)^\gamma(x) = g^{ij}\{\underline{\frac{\partial^2\phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j}} - \underbrace{\Gamma_{ij}^k(x)\frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^k}} + \underline{\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma(\phi(x))\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j}}\} \tag{21}$$

$$= \Delta\phi^\gamma + g^{ij}\hat{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma(\phi(x))\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j}, \quad \gamma = 1, \cdots, n, \tag{22}$$

$$\text{where } \phi^\alpha = y^\alpha \circ \phi, \quad \tau(\phi)(x) = \tau(\phi)^\gamma(x)\frac{\partial}{\partial y^\gamma} \tag{23}$$

ここで Einstein の縮約を用いた（以下同様）．なお式 (21) 下線部____の 2 項は式 (19) の $\tilde{\nabla}_{e_i}\phi_* e_i$ に起因し，アンダーブレイス$\underbrace{\quad}$の項は式 (19) の $\phi_* \nabla_{e_i} e_i$ に起因する．

ラプラシアン（Laplacian, Laplace operator）Δ の定義を確認しよう．まずリーマン計量 g に関する $f \in C^\infty(M)$ の勾配ベクトル場 $grad\, f$ を，次をみたすものとして定義する．

$$g(Y, grad\, f) = df(Y) = Yf, \quad Y \in \Gamma(TM) \tag{24}$$

次に C^∞ 級ベクトル場 $X \in \Gamma(TM)$ の発散（divergence）$div(X) \in C^\infty(M)$ を次で定義する．

$$div(X) = \sum_{i=1}^m g(e_i, \nabla_{e_i} X) \tag{25}$$

定義 (25) は M 上の Levi-Civita 接続 ∇ に依存することに注意せよ．関数 $f \in C^\infty(M)$ のラプラシアン Δ を次で定義する．

$$\Delta f = div\, grad\, f \tag{26}$$

$$= g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\right) \tag{27}$$

$$= \sum_{i=1}^m \{e_i(e_i f) - (\nabla_{e_i} e_i) f\} \tag{28}$$

定義 (26) は [EL]，[Ur] でのラプラシアンの定義と逆符号であることに注意せよ．

6. アファイン調和写像 (Affine harmonic maps)

M をアファイン多様体（affine manifold）（座標変換がアファイン変換となる多様体），$\{x^1, \cdots, x^m\}$ を M の局所アファイン座標系（local affine coordinate）とする．M がケーラー・アファイン（Kähler affine）であるとは，M 上の 2-tensor

$$g_{ij} dx^i dx^j \tag{29}$$

が存在し，局所的にある凸関数 φ があり

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \tag{30}$$

と表せるときをいう（文献 [JŞ] には，Cheng と Yau により導入された ([CY]) と述べられている.）. 行列 $[g_{ij}]$ は正定値対称でありリーマン計量を定める. したがってケーラー・アファイン多様体 M に対し，(M, D, g) は局所的にヘッセ領域となる. ただし D を M 上の標準平坦アファイン接続とし，$g = Dd\varphi = (\partial^2\varphi/\partial x^i \partial x^j)dx^i dx^j$ とする.

ケーラー・アファイン構造 (30) は次のアファイン不変な微分作用素（affinely invariant operator）L を定める.

$$L = g_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} \tag{31}$$

関数 $f : M \to \mathbf{R}$ がアファイン調和（affine harmonic）であるとは，次をみたすときをいう.

$$Lf = 0 \tag{32}$$

ケーラー・アファイン多様体 (M, g) とリーマン多様体 (N, h) に対し写像 $\phi : M \to N$ がアファイン調和であるとは，次をみたすときをいう.

$$g^{ij}\left(\frac{\partial^2\phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \hat{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\phi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\phi^\beta}{\partial x^j}\right) = 0, \qquad \gamma = 1, \cdots, \dim N \tag{33}$$

ただし $\hat{\Gamma}$ を h に関する Levi-Civita 接続の Christoffel 記号とする.

式 (31) 右辺は式 (27) に必ずしも一致しない. したがってアファイン調和関数は通常の調和関数と必ずしも一致しない. また式 (33) 左辺は式 (21) 右辺に必ずしも一致しない. したがってアファイン調和写像は通常の調和写像と必ずしも一致しない.

7. 写像のラプラシアン (Laplacian of a map)

第 5 節のラプラシアンは関数に対するものであった. しかし本節では写像に対するラプラシアンについて述べる.

リーマン多様体 (M, g) から (N, h) への C^∞ 写像 $\phi : M \to N$ のテンション場（tension field）を次で定義する [NS1][NS2].

$$\begin{aligned}\tau(\phi) &= \sum_{i=1}^m(\hat{\nabla}_{e_i}(\phi_* e_i) - \phi_*(\nabla_{e_i}e_i)) \qquad \in \Gamma(\phi^{-1}TN) &(34)\\ &= g^{ij}\{\hat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\phi_*\frac{\partial}{\partial x^j}) - \phi_*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j})\} &(35)\end{aligned}$$

ここで $\{e_i\}_{i=1}^m$ は g に対する局所正規直交標構場，$\{x^1, \cdots, x^m\}$ は M の局所座標系（local coordinate system），∇ は g の Levi-Civita 接続，$\hat{\nabla}$ は N 上の捩じれのないアファイン接続（torsion free affine connection）（注：実際は $\hat{\nabla}$ の M 上への引き戻しだが，N 上の接続と同じ記号を用いた）である. N 上のアファイン接続 $\hat{\nabla}$ が Levi-Civita 接続と限らない点において，式 (19) のテンション場の定義と異なる. さらに方程式

$$\tau(\phi) = \sum_{i=1}^m(\hat{\nabla}_{e_i}(\phi_* e_i) - \phi_*(\nabla_{e_i}e_i)) \equiv 0 \tag{36}$$

をみたすとき，写像 ϕ を $(g, \hat{\nabla})$ に関する調和写像（harmonic map relative to $(g, \hat{\nabla})$）とよぶ．

多様体 N が有限次元実ベクトル空間（finite dimensional real vector space）V であるとき，C^∞ 写像 $\phi: M \to V$ のテンション場 $\tau(\phi)$ を写像 ϕ のラプラシアン（Laplacian of a map）とよぶ．通常のラプラシアンと同じ記号を用い

$$\Delta\phi = \Delta_{(g,\hat{\nabla})}\phi = \tau(\phi) : M \to V \tag{37}$$

と記されることも多い．$V = \mathbf{R}$（vector space of dim1）のとき $\Delta\phi$ は関数に対する通常のラプラシアン式 (26) (27) (28) である．文献 [NS1]，[NS2] ではアファインはめ込みの性質を，そして文献 [S1]，[S2]，[S3] ではヘッセ領域上の勾配写像の性質を，写像のラプラシアンを利用し調べている．

8. 写像のラプラシアンとアファイン調和写像 (Laplacian of a map and affine harmonic maps)

ヘッセ領域上の勾配写像のラプラシアンを，アファイン調和写像の見地から考察する．

第 2 節で定義したヘッセ領域 $(\Omega, D, g = Dd\varphi)$ ならびに勾配写像 ι を再び考察する．勾配写像 ι の (g, D^*) に関するラプラシアン $\Delta_{(g,D^*)}\iota$ は，式 (33) より次のように計算される [S1]．ここで ∇，Γ は g に対する Levi-Civita 接続，Christoffel 記号である．Einstein の縮約を一部に用いた．

$$\begin{aligned}
\Delta_{(g,D^*)}\iota &= g^{ij}\{D^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\iota_*\frac{\partial}{\partial x^j}) - \iota_*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j})\} && (38)\\
&= \iota_*\{g^{ij}(D' - \nabla)_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\} && (39)\\
&= \iota_*\{g^{ij}(\nabla - D)_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\} && (40)\\
&= \iota_*(\sum_i \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}) && (41)
\end{aligned}$$

α^i は，(D, g) の Koszul form $\alpha = d\log|det[g_{ij}]|^{\frac{1}{2}}$ の第 i 成分 α_i の，g による縮約である．

$$\alpha_i = \sum_r \Gamma^r_{ri}, \qquad \alpha^i = \sum_j g^{ij}\alpha_j \tag{42}$$

式 (39) から式 (40) への変形は双対接続の性質 $(D + D')/2 = \nabla$ による．(注：Koszul form の記号と α-パラメータの記号は同じギリシア文字だが，両者は別物である.)

∇^* を $\Omega^* = \iota(\Omega)$ 上のヘッセ計量 $g^* = D^*d\varphi^*$（φ^* は φ の Legendre 変換）に対する Levi-Civita 接続とする．このとき式 (40) は次のように表される．

$$\Delta_{(g,D^*)}\iota = g^{ij}\{\nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\iota_*\frac{\partial}{\partial x^j}) - \iota_*(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j})\} \tag{43}$$

さらに第 γ 成分は次のように表される（ただし $\iota^i(x) = x^*_i \circ \iota(x)$）．(注：さらに簡略化できるが，アファイン調和写像の定義と比較するため下記の形で書く.)

$$(\Delta_{(g,D^*)}\iota)^\gamma = g^{ij}(\frac{\partial^2\iota^\gamma}{\partial x^i\partial x^j} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\iota^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\iota^\beta}{\partial x^j}), \qquad \gamma = 1, \cdots, n+1 \tag{44}$$

ゆえに勾配写像 ι が (g, D^*) に関する調和写像，すなわち $\Delta_{(g,D^*)}\iota \equiv 0$ のとき

$$g^{ij}(\frac{\partial^2 \iota^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial \iota^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \iota^\beta}{\partial x^j}) = 0, \quad \gamma = 1, \cdots, n+1 \tag{45}$$

が成立する．方程式 (45) は式 (30) の写像 ϕ を ι へ置き換えたものである．したがってヘッセ領域 Ω をケーラー・アファイン多様体とみなせば，勾配写像 ι が (g, D^*) に関する調和写像であることと，勾配写像 $\iota : (\Omega, D) \to (\mathbf{A}^*_{n+1}, \nabla^*)$ がアファイン調和写像となることは同値である（このことは [S1]，[S2]，[S3] に明記されていない）．

なお後者は「勾配写像 $\iota : \Omega \to \mathbf{A}^*_{n+1}$ が (g, D, ∇^*) に関する調和写像となること」と正確には言うべきである．しかし簡単のためアファイン接続を多様体とのペア表記にしたり，リーマン計量を省略したりする．以降も同様の表記をしばしば行う．

文献 [S1]，[S2]，[S3] では，勾配写像 ι をポテンシャル関数 φ の等位曲面 M へ制限した場合のラプラシアンにより，調和写像を考察している．

9. α アファイン調和写像（α-affine harmonic map）

ヘッセ領域 (Ω, D, g) の双対 (Ω^*, D^*, g^*) に対する α-接続を $D^{(\alpha)*}$ とする．このとき前節と同様の計算により，Ω 上の勾配写像 ι の $(g, D^{(\alpha)*})$ に関するラプラシアンは次の様になる．

$$\begin{aligned}
\Delta_{(g,D^{(\alpha)*})}\iota &= g^{ij}\{D^{(\alpha)*}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\iota_*\frac{\partial}{\partial x^j}) - \iota_*(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j})\} && (46)\\
&= \iota_*\{g^{ij}(D^{(-\alpha)} - \nabla)_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\} && (47)\\
&= \iota_*\{g^{ij}(\nabla - D^{(\alpha)})_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\} && (48)\\
&= g^{ij}\{\nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\iota_*\frac{\partial}{\partial x^j}) - \iota_*(D^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j})\} && (49)
\end{aligned}$$

ゆえに $\Delta_{(g,D^{(\alpha)*})} \equiv 0$ のとき，式 (45) に α-接続に関する項が加わった次式が成り立つ．

$$g^{ij}\{\frac{\partial^2 \iota^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - (1-\alpha)\Gamma^k_{ij}\frac{\partial \iota^\gamma}{\partial x^k} + \Gamma^\gamma_{\delta\beta}\frac{\partial \iota^\delta}{\partial x^i}\frac{\partial \iota^\beta}{\partial x^j}\} = 0, \quad \gamma = 1, \cdots, n+1 \tag{50}$$

式 (50) をヘッセ領域に限らない場合にも定義しよう．

ケーラー・アファイン多様体 (M, g) とリーマン多様体 (N, h) に対し写像 $\phi : M \to N$ が次をみたすとき，写像は α-アファイン調和（α-affine harmonic）であるということとする．ここで Γ，$\hat{\Gamma}$ はそれぞれ g，h に関する Levi-Civita 接続の Christoffel 記号である．

$$g^{ij}(\frac{\partial^2 \phi^\gamma}{\partial x^i \partial x^j} - (1-\alpha)\Gamma^k_{ij}\frac{\partial \phi^\gamma}{\partial x^k} + \hat{\Gamma}^\gamma_{\delta\beta}\frac{\partial \phi^\delta}{\partial x^i}\frac{\partial \phi^\beta}{\partial x^j}) = 0, \quad \gamma = 1, \cdots, \dim N \tag{51}$$

方程式 (51) をみたす写像を α-アファイン調和写像（α-affine harmonic map）とよぶ．このとき勾配写像 ι が $(g, D^{(\alpha)*})$ に関する調和写像であることと，$\iota : (\Omega, D^{(\alpha)}) \to (\mathbf{A}^*_{n+1}, \nabla^*)$ が α-アファイン調和写像となることは同値である．

$\alpha = 1$ のとき，1-アファイン調和写像はアファイン調和写像である．$\alpha = 0$ のとき，0-アファイン調和写像は通常の調和写像である（式 (21) 参照）．

α-アファイン調和写像を定義したものの，筆者は応用例を見つけていない．よって次を提示する．

問題 1：　ヘッセ領域または統計多様体上の α-アファイン調和写像によりケーラー・アファイン多様体，ヘッセ多様体，統計多様体に関する "面白い性質" を導くことができるか．既存のアファイン調和写像の性質の拡張または類似が存在するか．

10. 等位曲面間の調和写像（harmonic map between level surfaces）

前節までで扱った写像は主として，多様体をベクトル空間またはアファイン空間へはめ込むための写像である．本節ではアファイン空間へはめ込まれた 2 つの曲面間の写像を扱う．特に等位曲面間の，α-接続に関する調和写像を考察する．(注：前節の α-アファイン調和写像とは異なる定義を用いる.)

以下，第 4 節で定義した記号を用いる．すなわちヘッセ領域 $(\Omega, D, g = Dd\varphi)$ を $(n+1)$ 次元平坦統計多様体とみなし，等位曲面 (M, D, g)，$(\hat{M}, \hat{D}, \hat{g})$ を n 次元統計部分多様体とみなす．双対座標による射影変換により定義される写像を $\pi : M \to \hat{M}$ とし，射影するときの「伸縮率」を e^{λ} とする．写像先 $(\hat{M}, \hat{D}, \hat{g})$ を写像元 M へ引き戻した統計多様体を，$(M, \bar{D}, \bar{g})$ とする．

さて等位曲面間の写像 $\pi : M \to \hat{M}$ の α-接続によるテンション場を計算し，α-接続による調和写像となる条件を表そう．ただし M，$\hat{M}$ について同じ α 値を用い，テンション場 $\tau_{(g, D^{(\alpha)}, \hat{D}^{(\alpha)})}(\pi)$ を式 (52) で定義する．これは式 (43) の ι，D，∇^* を π，$D^{(\alpha)}$，$\hat{D}^{(\alpha)}$ へ換えた式である．

$$
\begin{aligned}
\tau_{(g, D^{(\alpha)}, \hat{D}^{(\alpha)})}(\pi) &= g^{ij}\{\hat{D}^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}(\pi_* \frac{\partial}{\partial x^j}) - \pi_*(D^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})\} && (52) \\
&= g^{ij}\{\pi_*(\bar{D}^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}) - \pi_*(D^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})\} && (53) \\
&= g^{ij}\{\pi_*(\bar{D}^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - D^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})\} && (54) \\
&= \pi_*\{g^{ij}(\bar{D}^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - D^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j})\} && (55)
\end{aligned}
$$

接空間 T_xM と $T_{\pi(x)}M$ それぞれの法ベクトルは，勾配ベクトル $\iota(x)$ に平行である．したがって T_xM と $T_{\pi(x)}M$ は，平行であるため同一視される（ここでの「法」「平行」は，$\mathbf{A}^*_{n+1}$ の通常の意味）．写像 π の定義より次のようになる．

$$
\tau_{(g, D^{(\alpha)}, \hat{D}^{(\alpha)})}(\pi) = e^{\lambda} g^{ij}(\bar{D}^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - D^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}) \tag{56}
$$

Theorem 3「$(M, D^{(\alpha)}, g)$ と $(M, \bar{D}^{(\alpha)}, \bar{g})$ は α-共形同値である」より，式 (14) (15) の ϕ，h，∇，$\bar{\nabla}$ をそれぞれ λ，g，$D^{(\alpha)}$，$\bar{D}^{(\alpha)}$ とした式が成り立つ．式 (56) 右辺と $\partial/\partial x^k$ $(k = 1, \cdots, n)$ の，g による内積を計算すると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
& g(e^\lambda g^{ij}(\bar{D}^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - D^{(\alpha)}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}), \frac{\partial}{\partial x^k}) && (57)\\
= \; & e^\lambda g^{ij}\{-\frac{1+\alpha}{2} d\lambda(\frac{\partial}{\partial x^k}) g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) && (58)\\
& \quad +\frac{1-\alpha}{2}\{d\lambda(\frac{\partial}{\partial x^i}) g(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}) + d\lambda(\frac{\partial}{\partial x^j}) g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k})\}\} && (59)\\
= \; & e^\lambda g^{ij}\{-\frac{1+\alpha}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial x^k} g_{ij} + \frac{1-\alpha}{2}(\frac{\partial\lambda}{\partial x^i} g_{jk} + \frac{\partial\lambda}{\partial x^j} g_{ik})\} && (60)\\
= \; & e^\lambda\{-\frac{1+\alpha}{2}\cdot n\frac{\partial\lambda}{\partial x^k} + \frac{1-\alpha}{2}(\frac{\partial\lambda}{\partial x^i}\delta_{ik} + \frac{\partial\lambda}{\partial x^j}\delta_{jk})\} && (61)\\
= \; & (-\frac{1+\alpha}{2}\cdot n + \frac{1-\alpha}{2}\cdot 2)\, e^\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial x^k} \;=\; -\frac{1}{2}\{(n+2)\alpha + (n-2)\}\, e^\lambda\frac{\partial\lambda}{\partial x^k} && (62)
\end{aligned}
$$

ゆえに式(62)がすべてのkに対し0となる条件を考えると，次の定理が成り立つ.

Theorem 4. ([U2] [U4]) $\alpha = -(n-2)/(n+2)$ またはλが定数値関数（$\lambda \equiv const.$ on M）のとき，等位曲面間の写像$\pi : M \to \hat{M}$はα-接続$D^{(\alpha)}$，$\hat{D}^{(\alpha)}$による調和写像 (harmonic map relative to α-connections）となる.

関数λが定数値関数でなければ調和写像とならないという予想があるかもしれない. しかし次元nとパラメータαの均衡が取れる場合，非自明な（すなわちλが定数値関数でない）調和写像が有り得ることを，Theorem 4は示す.

Remark 1. $n=2$の場合，α-接続による調和写像πにおいてλが定値関数でないのは$\alpha=0$のときに限る.

Remark 2. $n \geq 3$の場合，α-接続による調和写像πにおいてλが定値関数でないならば$-1 < \alpha < 0$である,

Remark 3. $\alpha \leq -1$または$\alpha > 0$に対し，α-接続による調和写像πでλが定値関数でないのもは存在しない.

α-接続による調和写像の例を挙げる.

Example 1.（正則凸錐（Regular convex cone））Ω，ψをそれぞれ正則凸錐，特性関数とする.（$\Omega, D, g = Dd\log\psi$)をヘッセ領域とみなす. $d\log\psi$はΩの頂点pでの1パラメーター伸縮変換群 （$x \longrightarrow e^t(x-p)+p,\, t \in \mathbf{R}$）で不変である[HS][S2]. よって$\log\psi$の等位曲面間の（主座標についての）1パラメーター伸縮変換による写像は，双対座標についても伸縮変換となる. したがって$\log\psi$の等位曲面間の1パラメーター伸縮変換による写像は，任意の$\alpha \in \mathbf{R}$に対しα-接続による調和写像となる.

Example 2.（対称錐（Symmetric cone））Ω，$\psi = Det$をそれぞれ対称錐，特性関数とする（Detは，対称錐を生成するジョルダン代数（Jordan algebra）としてのDet）. ($\Omega, D, g = Dd\log\psi$)をヘッセ領域とみなす. このときExample 1と同様に，$\log\psi$の

1パラメーター伸縮変換による写像は，任意の $\alpha \in \mathbf{R}$ に対し α-接続による調和写像となる．

11. 諸注意とまとめ

諸注意をいくつか述べる．

Remark 4.（α-共形同値な統計多様体間の写像）Theorem 4 と同様のことは等位曲面間の写像に限らず，α-共形同値な統計多様体間の写像に対しても成立する．例えば等位曲面 (M, D, g) から $(\hat{M}, \hat{D}, \hat{g})$ への写像 π ではなく，(M, D, g) から引き戻し $(M, \bar{D}, \bar{g})$ への写像 π_{id} のテンション場を計算すると，π のテンション場 (56) から e^{λ} を除したものとなる．しかし Theorem 4 に挙げられた結果は π，π_{id} 双方に対して同じである [U2].

Remark 5.（射影と限らない写像）Theorem 4 は双対座標による射影を用いた写像 π についてである．これは，等位曲面間の他の写像が α-接続による調和写像となることを，否定しない．

情報幾何学では一般に，主接続に関する平坦統計部分多様体へ，双対測地線に沿って点を射影することがなされる．同様に，写像 π は主接続に関する共形平坦統計部分多様体へ，双対測地線に沿って点を射影することに当たる．したがって，まず写像 π の性質を調べた．

Remark 6.（可積分性）通常の調和写像は「エネルギー汎関数の微分 $= 0$」により得られるため，方程式「テンション場 $= 0$」は「可積分条件」であると言える．しかし本研究に挙げられたその他の調和写像は，「可積分条件」を表すと限らない．すなわち一般には「エネルギー汎関数の微分 $= 0$」を表していない．その他の調和写像に関する「テンション場 $= 0$」が表すものは何か（「ある汎関数の微分 $= 0$」を表すか）という疑問が，共同研究中に起こった．

最後に，本研究で紹介した調和写像を分類すると次のようになる．

写像元，写像先それぞれの接続が
(i) 共にレビ・チビタ接続：　（通常の）調和写像
(ii) 異なる α-接続：　アファイン調和写像，α-アファイン調和写像
(iii) 共に α-接続（同じ α-値）：　α-接続による調和写像

References

[AN] S.Amari and H.Nagaoka: Method of information geometry, Amer. Math. Soc., Providence, Oxford University Press, Oxford (2000).

[CY] S.Y.Cheng and S.T.Yau: *The real Monge-Ampère equation and affine flat structures*, in: S.S.Chern, W.T.Wu (eds.), Differential geometry and differential equations, Proc. Beijing Symp.1980 (1982) 339-370.

[EL] J.Eelle and L.Lemaire: Selected topics in harmonic maps, AMS (1983).

[GK] H.C.Grunau and M.Kühnel: *On the existence of Hermitian-harmonic maps from complete Hermitian to complete Riemannian manifolds*, Math. Z. **249** (2005), 297-327.

[HS] J.H.Hao and H.Shima: *Level surfaces of non-degenerate functions in* $\mathbf{R}^{n+1}$, Geom. Dedicata **50** (1994), 193-204.

[I] S.Ivanov: *On dual-projectively flat affine connections*, J. of Geom. **53** (1995), 89-99.

[JŞ] J.Jost and F.M.Şimşir: *Affine harmonic maps*, Analysis, **29** (2009), 185-197.

[JY] J.Jost and S.T.Yau: *A nonlinear elliptic system for maps from Hermitian to Riemannian manifolds and rigidity theorems in Hermitian geometry*, Acta Math.,**170** (1993), 221-254.

[K] T.Kurose: *On the divergence of 1-conformally flat statistical manifolds*, Tôhoku Math.J. **46** (1994), 427-433.

[M] 松添博（H.Matsuzoe）：統計多様体上の微分形式と統計的推論の幾何学，RIMS 短期共同研究「統計多様体の幾何学の新展開」（2014 年 2 月 19 日～21 日), 発表資料ならびに講究録

[Ni] L.Ni: *Hermitian harmonic maps from complete Hermitian manifolds to complete Riemannian manifolds*, Math. Z. **232** (1999), 331-335.

[NP] K.Nomizu and U.Pinkall: *On the geometry and affine immersions*, Math. Z. **195** (1987), 165-178.

[NS1] 野水克己，佐々木武（K. Nomizu and T. Sasaki）：アファイン微分幾何学―アファインはめ込みの幾何―，裳華房 (1994)

[NS2] K. Nomizu and T. Sasaki: Affine Differential Geometry: Geometry of Affine Immersions, Cambridge Univ. Press (1994).

[S1] H.Shima: *Harmonicity of gradient mapping of level surfaces in a real affine space*, Geom. Dedicata **56** (1995), 177-184.

[S2] 志磨裕彦（H.Shima）：ヘッセ幾何学，裳華房 (2001)

[S3] H.Shima: The geometry of Hessian Structures, World Sci., (2007).

[U1] K. Uohashi: *On α-conformal equivalence of statistical submanifolds*, J. Geom. **75** (2002), 179-184.

[U2] K. Uohashi: *Harmonic maps relative to α-connections on statistical manifolds*, Appl. Sci. **14** (2012), 82-88.

[U3] K. Uohashi: *A Hessian domain constructed with a foliation by 1-conformally flat statistical manifolds*, Int. Math. Forum **7** (2012), 2363-2371.

[U4] K. Uohashi: *Harmonic maps relative to α-connections on Hessian domains*, In: Nielsen, F., Barbaresco, F. (Eds.): Geometric Science of Information, First International Conference, GSI 2013, Paris, France, August 28-30, 2013. Proceedings, LNCS **8085**, Springer, Heidelberg (2013), 745-750.

[U5] K. Uohashi: *α-connections on level surfaces in a Hessian domain*, in: T.Adachi, H. Hashimoto and M.J.Hristov (eds.): Prospects of Differential Geometry and its Related Fields, Proceedings of the 3rd International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, Veliko Tarnovo, September 3-7, World Sci. (2013), 203-212.

[UOF1] K.Uohashi, A.Ohara and T.Fujii: *1-conformally flat statistical submanifolds*, Osaka J. math. **37** No.2 (2000), 501-507.

[UOF2] K.Uohashi, A.Ohara and T.Fujii: *Foliations and divergences of flat statistical manifolds*, Hiroshima Math. J., **30**, No.3 (2000), 403-414.

[Ur] 浦川肇 (H.Urakawa): 変分法と調和写像，裳華房 (1990)