

多点仮想構造定数と CP^2 の種数 0 のグロモフ- ウィッテン不変量のミラー対称性的計算法につ いて

北海道大学大学院理学研究院数学専攻 秦泉寺 雅夫

Masao Jinzenji

Department of Mathematics, Graduate School of Science

Hokkaido University

e-mail address: jin@math.sci.hokudai.ac.jp

概要

この論説は、清水将英氏との共同研究による論文 [10] の結果の要約である。

1 導入

この論説で紹介する主結果の意図するのは、[8] において提示したミラー対称性による複素射影空間の超曲面の種数 0 のグロモフ-ウィッテン不変量の計算法の幾何学的な再構成法を、複素射影平面 CP^2 のグロモフ-ウィッテン不変量を計算するための一つの方法として拡張する事である。そこでまず、[8] におけるミラー対称性の計算の幾何学的再構成法の着想を紹介する事にしよう。

M_N^k を複素射影空間 CP^{N-1} の非特異な k 次超曲面とする。 M_N^k の種数 0 の 2 点グロモフ-ウィッテン不変量 $\langle O_{h^a} O_{h^b} \rangle_{0,d}$ とは、以下の式で定義される有理数の事である。

$$\langle O_{h^a} O_{h^b} \rangle_{0,d} = \int_{\overline{M}_{0,2}(CP^{N-1},d)} ev_1^*(h^a) \wedge ev_2^*(h^b) \wedge c_{top}(R^0 \pi_* ev_3^* O_{CP^{N-1}}(k)). \tag{1.1}$$

但し h は超平面束の第 1 チャーン類である。 $\overline{M}_{0,n}(CP^{N-1}, d)$ とは、種数 0 の n 個のラベル付き点 z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を持つ半安定曲線から CP^{N-1} への次数 d の安定写像のモジュライ空間であり、 $ev_i : \overline{M}_{0,n}(CP^{N-1}, d) \rightarrow CP^{N-1}$ は点 z_i における安定写像の評価写像である。 $\pi : \overline{M}_{0,3}(CP^{N-1}, d) \rightarrow \overline{M}_{0,2}(CP^{N-1}, d)$ は $\overline{M}_{0,3}(CP^{N-1}, d)$ において、3 番目の点 z_3 の情報を「忘れる」写像であり、これに関する direct image sheaf $R^0 \pi_* ev_3^* O_{CP^{N-1}}(k)$ の最高チャーン類 $c_{top}(R^0 \pi_* ev_3^* O_{CP^{N-1}}(k))$ は、安定写像の像が超曲面 M_N^k に含まれる条件を課す。 $ev_1^*(h^a)$ と $ev_2^*(h^b)$ はそれぞれ、安定写像の像が h^a のポアンカレ双対 $PD(h^a)$ と h^b のポアンカレ双対 $PD(h^b)$ ($PD(h^i)$ は CP^{N-1} の余次元 i の超平面で与えられる) と交わるという条件を課すので、大雑把に言ってこの不変量は種数 0 の

半安定曲線から M_N^k への安定写像で、像が $PD(h^a)$ と $PD(h^b)$ に交わるものの個数を数えていると考える事が出来る。位相的選択則

$$a + b = N - 3 + (N - k)d, \quad (1.2)$$

が満たされているならばこの不変量は自明でない可能性があるが、そうでない場合は自明に 0 となる。 $N > k$ の場合は、この不変量は実際に条件を満たす安定写像の個数を与えるが、 $N \leq k$ の場合は整数でない有理数となる例が知られている。

ミラー対称性を用いた $\langle \mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b} \rangle_{0,d}$ の計算方法とは、煎じ詰めて言うと、この不変量を以下で与えられる線形微分方程式を出発点として求める方法である。

$$\left((\partial_x)^{N-1} - k \cdot e^x \cdot (k\partial_x + k - 1)(k\partial_x + k - 2) \cdots (k\partial_x + 1) \right) w(x) = 0. \quad (1.3)$$

ここでは、 $N = k$ の場合、つまり M_N^k がカラビーヤウ超曲面の場合について、ミラー対称性による計算方法を紹介する事にする。この場合、まず (1.3) の微分方程式に現れる微分作用素を以下のように分解する事から出発する。

$$\begin{aligned} & \left((\partial_x)^{k-1} - k e^x \prod_{j=1}^{k-1} (k\partial_x + j) \right) w(x) = \\ & = \frac{1}{\tilde{L}_{k-1}^{k,k}(e^x)} \partial_x \left(\frac{1}{\tilde{L}_{k-2}^{k,k}(e^x)} \partial_x \left(\frac{1}{\tilde{L}_{k-3}^{k,k}(e^x)} \partial_x \left(\cdots \left(\frac{1}{\tilde{L}_1^{k,k}(e^x)} \partial_x \left(\frac{w(x)}{\tilde{L}_0^{k,k}(e^x)} \right) \right) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (1.4)$$

但し、ここで $\tilde{L}_j^{k,k}(e^x) = 1 + \sum_{d=1}^{\infty} \tilde{L}_j^{k,k,d} e^{dx}$ ($j = 0, 1, \dots, k-1$) は e^x についての定数項が 1 で与えられる冪級数である。展開係数 $\tilde{L}_j^{k,k,d}$ を「仮想構造定数」と呼ぶことにしよう。これらの冪級数を具体的に求めるのは一見難しそうに思えるが、微分方程式の解を用いる事により効率的に求める事が出来る。 $w_j(x)$ ($j = 0, 1, 2, \dots, k-1$) を以下で与えられる x についての関数としよう。

$$\begin{aligned} w(x, y) & := \sum_{d=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{kd} (j + ky)}{\prod_{j=1}^d (j + y)^k} e^{(d+y)x}, \\ w_j(x) & := \frac{1}{j!} \frac{\partial^j w}{\partial y^j}(x, 0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

$w_j(x)$ ($j = 0, 1, \dots, k-2$) は $N = k$ の場合の微分方程式 (1.3) の解である。この時、 $\tilde{L}_j^{k,k}(e^x)$ は以下の関係式を用いて帰納的に決定される。¹

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0^{k,k}(e^x) & = w_0(x), \quad \tilde{L}_1^{k,k}(e^x) = \frac{d}{dx} \frac{w_1(x)}{w_0(x)} = \frac{d}{dx} \frac{w_1(x)}{\tilde{L}_0^{k,k}(e^x)}, \\ \tilde{L}_j^{k,k}(e^x) & = \\ & \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\tilde{L}_{j-1}^{k,k}(e^x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\tilde{L}_{j-2}^{k,k}(e^x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\tilde{L}_{j-3}^{k,k}(e^x)} \cdots \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\tilde{L}_1^{k,k}(e^x)} \frac{d}{dx} \frac{w_j(x)}{\tilde{L}_0^{k,k}(e^x)} \right) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

¹(1.6) において、 $w_{k-1}(x)$ は微分方程式の解ではないのだが、 $\tilde{L}_{k-1}^{k,k}(e^x)$ を得るために使っていることを断っておく。

ミラー対称性による計算において非常に重要な役目を果たすミラー写像 $t = t(x)$ は上で構成した冪級数 $\tilde{L}_1^{k,k}(e^x)$ を用いて以下のように与えられる。

$$t = t(x) = \int \tilde{L}_1^{k,k}(e^x) dx = x + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\tilde{L}_1^{k,k,d}}{d} e^{dx}. \quad (1.7)$$

このミラー写像の逆写像 $x = x(t)$ を用いると、種数 0 の 2 点グロモフ-ウィッテン不変量 $\langle \mathcal{O}_{h^{j-1}} \mathcal{O}_{h^{k-2-j}} \rangle_{0,d}$ の母関数が $\int \tilde{L}_j^{k,k}(e^x) dx$ ($j = 1, 2, \dots, k-2$) を用いて以下のように与えられる。

$$kt + \sum_{d=1}^{\infty} \langle \mathcal{O}_{h^{j-1}} \mathcal{O}_{h^{k-2-j}} \rangle_{0,d} e^{dt} = kx(t) + \sum_{d=1}^{\infty} \frac{k\tilde{L}_j^{k,k,d}}{d} e^{dx(t)}. \quad (1.8)$$

これがミラー対称性による M_N^k のグロモフ-ウィッテン不変量の計算の骨子である。なお、この等式は [7] において導出した 3 点グロモフ-ウィッテン不変量についての以下の等式の両辺を t について積分する事により得られる。

$$\begin{aligned} k + \sum_{d=1}^{\infty} \langle \mathcal{O}_h \mathcal{O}_{h^{j-1}} \mathcal{O}_{h^{k-2-j}} \rangle_{0,d} e^{dt} &= \frac{d}{dt} \left(kt + \sum_{d=1}^{\infty} \langle \mathcal{O}_{h^{j-1}} \mathcal{O}_{h^{k-2-j}} \rangle_{0,d} e^{dt} \right) \\ &= k \cdot \frac{\tilde{L}_j^{k,k}(e^{x(t)})}{\tilde{L}_1^{k,k}(e^{x(t)})}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

[8] における問題意識は等式 (1.8) に端を発する。等式 (1.8) において 2 点グロモフ-ウィッテン不変量 $\langle \mathcal{O}_{h^{j-1}} \mathcal{O}_{h^{k-2-j}} \rangle_{0,d}$ と仮想構造定数 $\frac{k\tilde{L}_j^{k,k,d}}{d}$ は母関数の変数の間の座標変換の違いしかない。そこで、座標変換による違いを、 CP^1 から CP^{N-1} への正則写像のモジュライ空間のコンパクト化の仕方の違いと考えて、仮想構造定数 $\frac{k\tilde{L}_j^{k,k,d}}{d}$ を安定写像とは違ったコンパクト化をしたモジュライ空間の交点数として構成できないか考えたのである。[8] において、私は 0 と ∞ をラベル付けられた点として持つ CP^1 から CP^{N-1} への d 次擬写像 (多項式写像) のモジュライ空間 $Mp_{0,2}(N, d)$ を考えた。ここで言う CP^1 から CP^{N-1} への d 次擬写像 ϕ_d とは具体的には $CP^1 = \{(s:t)\}$ の同次座標 s と t の C^N のベクトルを係数とする斉次 d 次多項式で与えられる。

$$\phi_d(s:t) = \left[\sum_{j=0}^d \mathbf{a}_j s^j t^{d-j} \right], \quad (\mathbf{a}_j \in C^N). \quad (1.10)$$

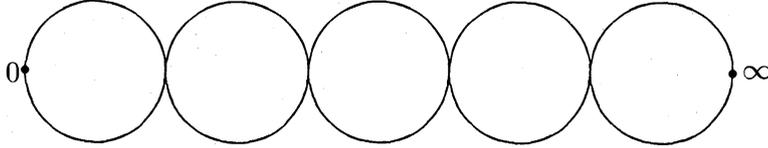
但し、[*] は CP^{N-1} における射影同値類を表す。ベクトル値多項式の零点においては、射影同値を取れないので像が定まらない。その意味で、擬写像は写像とならない場合もある。 $Mp_{0,2}(N, d)$ の構成に用いられる擬写像は、 $(s:t) = (0:1)(=0)$, $(s:t) = (1:0)(=\infty)$ における像が定まる擬写像、つまり $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_d \neq 0$ を満たす擬写像であり、 $Mp_{0,2}(N, d)$ は、この条件を満たす擬写像のパラメータ空間

$$\{(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d-1}, \mathbf{a}_d) \mid \mathbf{a}_j \in C^N, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_d \neq 0\}, \quad (1.11)$$

を以下の $(C^\times)^2$ 作用で割った空間として得られる。

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d-1}, \mathbf{a}_d) &\rightarrow (\lambda \mathbf{a}_0, \lambda \mathbf{a}_1, \dots, \lambda \mathbf{a}_{d-1}, \lambda \mathbf{a}_d), \quad (\lambda \in C^\times), \\ (\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d-1}, \mathbf{a}_d) &\rightarrow (\mathbf{a}_0, \mu \mathbf{a}_1, \dots, \mu^{d-1} \mathbf{a}_{d-1}, \mu^d \mathbf{a}_d), \quad (\mu \in C^\times) \end{aligned} \quad (1.12)$$

$M_{p_0,2}(N, d)$ はコンパクト空間ではないので、これを (1.12) の 2 番目の C^\times 作用による幾何学的不変式論を用いてコンパクト化する。このようにして得られたモジュライ空間を $\widetilde{M}_{p_0,2}(N, d)$ と呼ぶ事にしよう。詳しい構成の仕方については [8] を参照して頂きたい。 $\widetilde{M}_{p_0,2}(N, d)$ の境界成分を構成する点は、種数 0 の半安定曲線で、その既約 CP^1 成分が直線状に配置され、各成分の 2 重点が 0 か ∞ にしか位置しないようなものから、 CP^{N-1} への擬写像によって与えられる。ここで、用いられる半安定曲線の一例は下図のようなものである。



但し、各 CP^1 成分は正次数の擬写像によって CP^{N-1} に写像されるものとする。従って、 $\widetilde{M}_{p_0,2}(N, d)$ の境界の組み合わせ論的な構造は、一般的な樹状グラフの構造を考える必要がなく次数 d の順序付き分割 (d_1, d_2, \dots, d_l) ($d_j \geq 1, \sum_{j=1}^l d_j = d$) によって記述されるので、 $\overline{M}_{0,2}(CP^{N-1}, d)$ よりもずっと簡単になる。[8] において私は、モジュライ空間が $\overline{M}_{0,2}(CP^{N-1}, d)$ から $\widetilde{M}_{p_0,2}(N, d)$ に変わる事以外は $(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b})_{0,d}$ と幾何学的意味が同じである $\widetilde{M}_{p_0,2}(N, d)$ 上の交点数を定義した。

$$w(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b})_{0,d} = \int_{\widetilde{M}_{p_0,2}(N,d)} ev_1^*(h^a) \wedge ev_2^*(h^b) \wedge c_{top}(\mathcal{E}_k). \quad (1.13)$$

上式に現れる 3 つの被積分因子は (1.1) に現れる因子と同じ幾何学的意味を持つ。 $\widetilde{M}_{p_0,2}(N, d)$ の境界成分の組み合わせ論的構造が簡単であるため、固定点定理を用いる事により $w(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b})_{0,d}$ の閉じた表式を導出する事が出来る。

$$w(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b})_{0,d} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{d+1}} \oint_{E_{(0)}^0} \frac{dz_0}{(z_0)^N} \oint_{E_{(0)}^1} \frac{dz_1}{(z_1)^N} \cdots \oint_{E_{(0)}^d} \frac{dz_d}{(z_d)^N} \times \\ (z_0)^a \cdot \left(\prod_{j=1}^{d-1} \frac{1}{kz_j(2z_j - z_{j-1} - z_{j+1})} \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^d e^k(z_{j-1}, z_j) \right) \cdot (z_d)^b, \quad (d > 0). \quad (1.14)$$

但し、ここで $e^k(z, w) = \prod_{j=0}^k (jz + (k-j)w)$ であり、また $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \oint_{E_{(0)}^j} dz_j$ は $j = 1, 2, \dots, l-1$ の場合 $z_j = 0$ と $z_j = \frac{z_{j-1} + z_{j+1}}{2}$ での留数を取る操作を表す ($j = 0, d$ の場合は $z_j = 0$ での留数のみ取る)。(1.14) を用いて証明したのが以下の定理である。

定理 1

$$w(\mathcal{O}_{h^{j-1+(N-k)d}} \mathcal{O}_{h^{N-2-j}})_{0,d} = \frac{k \tilde{L}_j^{N,k,d}}{d}. \quad (1.15)$$

ここで、 $\tilde{L}_j^{N,k,d}$ とは、一般の N と k に対して微分方程式 (1.3) を出発点として構成される「仮想構造定数」である。また仮想構造定数 $\tilde{L}_j^{N,k,d}$ は「一般ミラー変換」と呼ばれる (1.8) を一般化したプロセスによって M_N^k の種数 0 の 2 点グロモフ-ウィッテン不変量に翻訳される。一般ミラー変換について補足しておく、このプロセスが必要となるのは $N-k \leq 1$ の時で、その場合に用いられるミ

ラー写像の展開係数は $\frac{\tilde{L}_j^{N,k,d}}{1+(k-N)d}$ で与えられる。 $j < 0$ の場合、 $\tilde{L}_j^{N,k,d} = 0$ が成り立つので $N - k > 1$ の場合は、ミラー写像は自明となるのである。 $N - k > 1$ ならば、

$$w(\mathcal{O}_{h^{j-1+(N-k)d}} \mathcal{O}_{h^{N-2-j}})_{0,d} = \frac{k \tilde{L}_j^{N,k,d}}{d} = \langle \mathcal{O}_{h^{j-1+(N-k)d}} \mathcal{O}_{h^{N-2-j}} \rangle_{0,d},$$

($N - k > 1$), (1.16)

となり、仮想構造定数と種数 0 の 2 点グロモフ-ウィッテン不変量は一致する。さて、 $k = N$ の場合を振り返ってみよう。(1.7) と (1.15) を組み合わせると、以下の等式が得られる。

$$t = t(x) = x + \sum_{d=0}^{\infty} \frac{w(\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_{h^{k-3}})_{0,d}}{k} e^{dx}. \quad (1.17)$$

この式は、ミラー対称性で用いられるミラー写像が $\widetilde{M}p_{0,2}(N, d)$ 上の位相的交点数の母関数として解釈出来る事を主張している。² 同様に (1.8) も次のように書き変える事が出来る。

$$kt + \sum_{d=1}^{\infty} \langle \mathcal{O}_{h^{j-1}} \mathcal{O}_{h^{k-2-j}} \rangle_{0,d} e^{dt} = kx(t) + \sum_{d=1}^{\infty} w(\mathcal{O}_{h^{j-1}} \mathcal{O}_{h^{k-2-j}})_{0,d} e^{dx(t)}. \quad (1.18)$$

(1.17) と (1.18) は、超曲面の場合、種数 0 の 2 点グロモフ-ウィッテン不変量のミラー対称性による計算法を、 $w(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b})_{0,d}$ のみを出発点にして再構成できる事を意味している。本論説の主な目的は、この結果を CP^2 の場合に拡張して、 CP^2 の種数 0 の多点グロモフ-ウィッテン不変量に対する「ある種のミラー対称性的計算法」を構成する事である。

2 多点仮想構造定数

CP^2 の場合においては、自明でない種数 0 のグロモフ-ウィッテン不変量は $d \geq 1$ の場合の $\langle (\mathcal{O}_{h^2})^{3d-1} \rangle_{0,d}$ であり、これは CP^2 内の一般の位置にある $3d-1$ 個の点を通る d 次有理曲線の個数を与える。したがって、第 1 節で紹介した構成法を拡張して $\langle (\mathcal{O}_{h^2})^{3d-1} \rangle_{0,d}$ を得ようとするならば、1 節で紹介した交点数 $w(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b})_{0,d}$ を 3 個以上のオペレーター \mathcal{O}_{h^j} が挿入された交点数に拡張しなければならない。論文 [10] において、我々は $\widetilde{M}p_{0,2|n}(N, d)$ というモジュライ空間を構成した。この空間は、 $2+n$ 個のラベル付けられた点を持つ種数 0 の半安定曲線から曲線から CP^{N-1} への d 次擬写像のモジュライ空間であり、 $\widetilde{M}p_{0,2}(N, d)$ と同様に C^\times 作用による幾何学的不変式論でコンパクト化されている。 $\widetilde{M}p_{0,2|n}(N, d)$ の境界成分の構成において用いられるのは、 $\widetilde{M}p_{0,2}(N, d)$ の場合と同じく 2 重点を 0 か ∞ 、あるいはそのどちらにも持つ CP^1 を直線状につなげて出来る半安定曲線である。左端の CP^1 における 0 と右端の CP^1 における ∞ は二つの特別なラベル付けられた点であり、 $2|n$ という記法の前半の 2 に対応する。これらの点は他の n 個のラベル付けられた点とは性格が異なり、区別する必要がある。残りの n 個のラベル付けられた点は上の 2 個の特別な点を除く半安定曲線上に配置されるのであるが、各 CP^1 上の 0 と ∞ 上には位置することが出来な

²最近、[3, 4] に見られるように、この結果と類似の結果が他のグループによっても発表されて来ている。

い。なお、これらの n 個の点は、先程の条件を満たしていれば、互いに重なって配置されても良い。さて、 $\widetilde{M}p_{0,2}(N, d)$ の構成との違いであるが、今の場合いくつかの CP^1 成分が CP^{N-1} 内の 1 点に写されることを許すことにする。 CP^1 が 1 点に写像される状況を記述するために、我々は $\overline{M}_{0,2|m}$ と呼ばれるモジュライ空間を用いる。この空間は、 C^\times 作用による幾何学的不変式論を用いてコンパクト化された $2 + m$ 個のラベル付けられた点を持つ CP^1 の複素構造のモジュライ空間である [1, 13]。このモジュライ空間と $\widetilde{M}p_{0,2}(N, d)$ の構成法を組み合わせることによって $\widetilde{M}p_{0,2|n}(N, d)$ が構成されるのであるが、詳細な構成に興味のある方は [10] を参照して頂きたい。このモジュライ空間を用いて、我々は CP^{N-1} の種数 0 のグロモフ-ウィッテン不変量 $(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b} \prod_{j=1}^n \mathcal{O}_{h^{m_j}})_{0,d}$ に類似した幾何学的意味を持つ交点数を以下のように定義した。

定義 1

$$w(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b} | \prod_{j=1}^n \mathcal{O}_{h^{m_j}})_{0,d} := \int_{\widetilde{M}p_{0,2|n}(N, d)} ev_0^*(h^a) \cdot ev_\infty^*(h^b) \cdot \prod_{j=1}^n ev_j^*(h^{m_j}), \quad (2.19)$$

但し、 \cdot はコホモロジー環 $H^*(\widetilde{M}p_{0,2|n}(N, d))$ における積を表す。

(2.19) において、 ev_0 は左端の CP^1 の 0 における評価写像であり、 ev_∞ は右端の CP^1 の ∞ における評価写像である。また ev_j は残りの n 個のラベル付けされた点の中で j 番目の点 z_j ($j = 1, 2, \dots, n$) における評価写像である。 $\widetilde{M}p_{0,2}(N, d)$ の場合と同様に固定点定理を用いることによって、我々はこの交点数の閉じた表式を導出した。

定理 2

$$\begin{aligned} w(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b} | \prod_{i=1}^n (\mathcal{O}_{h^{m_i}}))_{0,d} = \\ \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^{d+1}} \oint_{E_{(0)}^0} \frac{dz_0}{(z_0)^N} \oint_{E_{(0)}^1} \frac{dz_1}{(z_1)^N} \cdots \oint_{E_{(0)}^d} \frac{dz_d}{(z_d)^N} \times \\ (z_0)^a \cdot \left(\prod_{j=1}^{d-1} \frac{1}{(2z_j - z_{j-1} - z_{j+1})} \right) \cdot (z_d)^b \cdot \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^d w_{m_i}^1(z_{j-1}, z_j) \right), \quad (d > 0). \end{aligned} \quad (2.20)$$

ここで $w_m^1(z, w) = \frac{z^m - w^m}{z - w}$ である。

証明について一言ことわっておくと、 $\widetilde{M}p_{0,2}(N, d)$ の場合と違ってモジュライ空間 $\overline{M}_{0,2|n}$ の ψ 類というコホモロジー類に関する交点数の情報が必要となる。この交点数については、アレクセーエフらのグループやパンドハリパンデらのグループによる論文 [1, 13] において既に計算されていたので、彼らの結果を使った。(2.20) において、最初の 2 個のオペレーター $\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b}$ の挿入の効果は右辺の $(z_0)^a$ と $(z_d)^b$ という項に反映されているが、残りのオペレーター $\prod_{i=1}^n (\mathcal{O}_{h^{m_i}})$ の挿入の効果は右辺では $\prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^d w_{m_i}^1(z_{j-1}, z_j) \right)$ という式によって表されていることに注意して欲しい。この事実から分かりますとおりこれらの 2 種類のオペレーターの挿入は違った性格を持っている。このため交点数 $w(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b} | \prod_{i=1}^n (\mathcal{O}_{h^{m_i}}))_{0,d}$ の表記において記号 $|$ を用いる事にした。なお (2.20) からグロモフ-ウィッテン不変量における Puncture Axiom:

$$w(\mathcal{O}_{h^a} \mathcal{O}_{h^b} | \mathcal{O}_1 \prod_{j=1}^n \mathcal{O}_{h^{m_j}})_{0,d} = 0, \quad (2.21)$$

と Divisor Axiom:

$$w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|\mathcal{O}_h\prod_{j=1}^n\mathcal{O}_{h^{m_j}})_{0,d} = d \cdot w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|\prod_{j=1}^n\mathcal{O}_{h^{m_j}})_{0,d}, \quad (2.22)$$

が後者のタイプのオペレーター挿入に関して成り立つことがわかる。

3 ミラー対称性的な計算法

この節においては特に CP^2 の場合の $w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|\prod_{i=1}^n(\mathcal{O}_{h^{m_i}}))_{0,d}$ を用いて (1.17) と (1.18) を拡張する。つまり、この交点数を出発点として用いて CP^2 の種数 0 のグロモフ-ウィッテン不変量を計算するのである。 CP^2 のコホモロジー環の加法的な基底は $1 = h^0$ 、 h と h^2 の 3 個であるのでまず交点数 $w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|\prod_{j=0}^2(\mathcal{O}_{h^j})^{m_j})_{0,d}$ の母関数を用意する。

定義 2

$$\begin{aligned} w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|(x^0, x^1, x^2))_0 := \\ x^c \cdot \int_{CP^2} h^{a+b+c} + \sum_{d>0, \{m_j\}} w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|\prod_{j=0}^2(\mathcal{O}_{h^j})^{m_j})_{0,d} \cdot \prod_{j=0}^2 \frac{(x^j)^{m_j}}{m_j!}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

但し x^j ($j = 0, 1, 2$) はオペレーター \mathcal{O}_{h^j} の挿入に付随した母関数の変数である。

Puncture Axiom (2.21) と Divisor Axiom (2.22) が記号”|”の右側のオペレーター挿入に関して成り立つので上の母関数は以下のように簡単化することが出来る。

$$\begin{aligned} w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|(x^0, x^1, x^2))_0 = \\ x^c \cdot \int_{CP^2} h^{a+b+c} + \sum_{d>0, m} w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|\mathcal{O}_{h^2})_{0,d} \cdot e^{dx^1} \cdot \frac{(x^2)^m}{m!}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

同様の発想で対応する CP^2 の種数 0 のグロモフ-ウィッテン不変量の母関数も用意しておこう (物理では摂動を受けた 2 点関数とも言う)。

定義 3 $\langle \prod_{j=0}^2(\mathcal{O}_{h^j})^{m_j} \rangle_{0,d}$ を CP^2 の種数 0 で次数 d のグロモフ-ウィッテン不変量とし、以下の形の母関数を定める。

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}(t^0, t^1, t^2) \rangle_0 := \\ t^c \cdot \int_{CP^2} h^{a+b+c} + \sum_{d>0, \{m_j\}} \langle \mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|\prod_{j=0}^2(\mathcal{O}_{h^j})^{m_j} \rangle_{0,d} \cdot \prod_{j=0}^2 \frac{(t^j)^{m_j}}{m_j!} = \\ t^c \cdot \int_{CP^2} h^{a+b+c} + \sum_{d>0, m} \langle \mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|\mathcal{O}_{h^2} \rangle_{0,d} \cdot e^{dt^1} \cdot \frac{(t^2)^m}{m!}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

但し t^j ($j = 0, 1, 2$) は \mathcal{O}_{h^j} の挿入に付随する母関数の変数である。

以上の準備の下で、(1.17) と (1.18) を CP^2 の場合に拡張したミラー対称性的計算法は、以下の予想の形で与えられる。

予想 1 以下の式でミラー写像を定める。

$$t^j(x^0, x^1, x^2) := w(\mathcal{O}_{h^2-j}\mathcal{O}_1|(x^0, x^1, x^2))_0. \quad (3.26)$$

この時、以下の等式が成り立つ。

$$\langle \mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}(t^0(x^0, x^1, x^2), t^1(x^0, x^1, x^2), t^2(x^0, x^1, x^2)) \rangle_0 = w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|(x^0, x^1, x^2))_0. \quad (3.27)$$

上の等式は、ミラー写像の逆変換

$$x^j = x^j(t^0, t^1, t^2), \quad (3.28)$$

を代入する事によって、 CP^2 の種数0のグロモフ-ウィッテン不変量の母関数が、以下の形で得られる事を意味している。

$$\langle \mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}(t^0, t^1, t^2) \rangle_0 = w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|(x^0(t^0, t^1, t^2), x^1(t^0, t^1, t^2), x^2(t^0, t^1, t^2)))_0. \quad (3.29)$$

$w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|\prod_{j=0}^2(\mathcal{O}_{h^j})^{m_j})_{0,d}$ を具体的に計算できる公式(2.20)があるので、(3.26)のミラー写像は、以下のように具体的に計算することが出来る。

$$\begin{aligned} t^2 &= x^2 + \frac{1}{4}q(x^2)^4 + \frac{33}{70}q^2(x^2)^7 + \frac{16589}{12600}q^3(x^2)^{10} + \frac{143698921}{32432400}q^4(x^2)^{13} + \dots, \\ t^1 &= x^1 + \frac{1}{2}(x^2)^3q + \frac{7}{10}(x^2)^6q^2 + \frac{2593}{1512}q^3(x^2)^9 + \frac{2668063}{498960}q^4(x^2)^{12} + \dots, \\ t^0 &= x^0 + \frac{1}{2}(x^2)^2q + \frac{8}{15}(x^2)^5q^2 + \frac{983}{840}q^3(x^2)^8 + \frac{4283071}{1247400}q^4(x^2)^{11} + \dots, \end{aligned} \quad (q := e^{x^1}). \quad (3.30)$$

もちろん、他の母関数 $w(\mathcal{O}_{h^a}\mathcal{O}_{h^b}|(x^0, x^1, x^2))_0$ も具体的に求められる。例えば、 $w(\mathcal{O}_h\mathcal{O}_h|(x^0, x^1, x^2))_0$ は以下のようなになる。

$$\begin{aligned} w(\mathcal{O}_h\mathcal{O}_h|(x^0, x^1, x^2))_0 &= \\ &= x^0 + (x^2)^2q + \frac{16}{15}(x^2)^5q^2 + \frac{961}{420}q^3(x^2)^8 + \frac{4105537}{623700}q^4(x^2)^{11} + \dots \end{aligned} \quad (3.31)$$

ここで、予想に従ってミラー写像の逆変換を求めて(3.31)に代入すると、

$$\begin{aligned} w(\mathcal{O}_h\mathcal{O}_h|(x^0(t^0, t^1, t^2), x^1(t^0, t^1, t^2), x^2(t^0, t^1, t^2)))_0 &= \\ &= t^0 + \frac{1}{2}(t^2)^2Q + \frac{1}{30}(t^2)^5Q^2 + \frac{3}{1120}(t^2)^8Q^3 + \frac{31}{124740}(t^2)^{11}Q^4 + \dots \\ &= t^0 + \frac{1}{2!}(t^2)^2Q + \frac{2^2}{5!}(t^2)^5Q^2 + \frac{3^2 \cdot 12}{8!}(t^2)^8Q^3 + \frac{4^2 \cdot 620}{11!}(t^2)^{11}Q^4 + \dots \end{aligned} \quad (Q := e^{t^1}), \quad (3.32)$$

となるのであるが、これは[12]における結合律方程式を使って求めた $\langle \mathcal{O}_h\mathcal{O}_h(t^0, t^1, t^2) \rangle_0$ に一致する。ことわっておくが、ここで実行した計算法と結合律方程式の計算法は思想が全く違うので、独立な計算方法である。他の母関数、

$$\begin{aligned} w(\mathcal{O}_{h^2}\mathcal{O}_{h^2}|(x^0, x^1, x^2))_0 &= \\ &= q + \frac{2}{3}(x^2)^3q^2 + \frac{17}{15}q^3(x^2)^6 + \frac{6455}{2268}q^4(x^2)^9 + \dots, \end{aligned} \quad (3.33)$$

も計算しておく、同様にして違うタイプの母関数 $\langle \mathcal{O}_{h^2} \mathcal{O}_{h^2}(t^0, t^1, t^2) \rangle_0$ も計算することが出来る。

$$\begin{aligned} & w(\mathcal{O}_{h^2} \mathcal{O}_{h^2} | (x^0(t^0, t^1, t^2), x^1(t^0, t^1, t^2), x^2(t^0, t^1, t^2)))_0 = \\ & = Q + \frac{1}{6}(t^2)^3 Q^2 + \frac{1}{60} Q^3 (t^2)^6 + \frac{31}{18144} Q^4 (t^2)^9 + \frac{1559}{8553600} Q^5 (t^2)^{12} + \dots \\ & = Q + \frac{1}{3!} (t^2)^3 Q^2 + \frac{12}{6!} (t^2)^6 Q^3 + \frac{620}{9!} (t^2)^9 Q^4 + \dots \end{aligned} \quad (3.34)$$

このようにして、数値的に予想1の正当性を順次確かめていくことが出来る。数学的な証明については、例えば我々の論文 [9] の第5節で展開した留数積分の操作の技巧を用いることで、次数 d が3までの場合には証明できる。次数が4以上の場合には、コンチェビッチ [11] の技巧を用いて得られる CP^2 の種数0のグロモフ-ウィッテン不変量の表式を、留数積分の形に直して同変パラメータを0に持っていき極限をとる操作において、困難な点がある。この難点の克服が今後の研究の大きな課題である。なお入谷らのグループによる論文 [6] においても、 CP^2 の種数0のグロモフ-ウィッテン不変量のミラー対称性を用いた計算法が提示されている。その方法は、江口らのグループやバラニコフによるランダウ-ギンズブルグ理論的なアプローチ [5, 2] を現代的な形に洗練させたものであり、拡張された I 関数と言うものを出発点とし、ミラー写像を得るためにバーコフ分解を用いる事が特色となっている。我々は (3.30) で得られたミラー写像と拡張された I 関数のバーコフ分解から得られたミラー写像を比べてみたのであるが、意外なことにこれら二つのミラー写像は異なっており、簡単な座標変換で移りあえるようなものでは無かった。従って、我々の方法と入谷らによる方法が本質的に違う計算法なのかどうかを追求することも今後の研究課題となって来ると思われる。

参考文献

- [1] Valery Alexeev, G. Michael Guy. *Moduli of weighted stable maps and their gravitational descendants*. J. Inst. Math. Jussieu 7 (2008), no. 3, 425-456.
- [2] S. Barannikov. *Semi-infinite Hodge structures and mirror symmetry for projective spaces*. arXiv:math/0010157.
- [3] I. Ciocan-Fontanine, B. Kim. *Wall-crossing in genus zero quasimap theory and mirror maps*. Preprint, arXiv:1304.7056.
- [4] Y. Cooper, A. Zinger. *Mirror Symmetry for Stable Quotients Invariants*. Preprint, arXiv:1201.6350.
- [5] T. Eguchi, K. Hori, C.-S. Xiong. *Gravitational Quantum Cohomology*. Internat. J. Modern Phys. A12 (1997) 1743-1782.
- [6] T. Coates, A. Corti, H. Iritani, H.-H. Tseng. *A Mirror Theorem for Toric Stacks*. Preprint, arXiv:1310.4163.
- [7] M. Jinzenji. *Gauss-Manin system and the virtual structure constants*. Int. J. Math. 13 (2002) 445-478.
- [8] M. Jinzenji. *Mirror Map as Generating Function of Intersection Numbers: Toric Manifolds with Two Kähler Forms*. Commun. Math. Phys. 323 (2013) 747-811.

- [9] M.Jinzenji, M.Shimizu. *Open Virtual Structure Constants and Mirror Computation of Open Gromov-Witten Invariants of Projective Hypersurfaces*. Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys. 11 (2014) 1450005 .
- [10] M.Jinzenji, M.Shimizu. *Multi-Point Virtual Structure Constants and Mirror Computation of CP^2 -model*. Preprint, arXiv:1305.0999.
- [11] M.Kontsevich. *Enumeration of Rational Curves via Torus Actions*. The moduli space of curves, R.Dijkgraaf, C.Faber, G.van der Geer (Eds.), Progress in Math., v.129, Birkhäuser, 1995, 335-368.
- [12] M. Kontsevich, Yu. Manin. *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry*. Comm. Math. Phys. 164 (1994), no. 3, 525-562.
- [13] A. Marian, D. Oprea, R. Pandharipande. *The moduli space of stable quotients*. Geom. Topol. 15 (2011), no. 3, 1651-1706.