

MIRROR SYMMETRY OF DETERMINANTAL QUINTICS

Shinobu Hosono

Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo

1. INTRODUCTION

この数年の間、高木寛通氏（東大数理）と共に 3 次元の Reye 合同の射影幾何とミラー対称性に関する研究を行い一連の結果が得られている。この報告では、研究会発表者 (S.H.) の文責のもとに共同研究 [HT1] の内容について背景を補いつつ概略をまとめたいと思う。

複素 d 次元ケーラー多様体 X で $c_1(X) = 0$, $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0 (1 \leq i \leq d-1)$ であるものを一般に d 次元カラビ・ヤウ多様体と呼んでいる。特に 3 次元の場合、理論物理学における弦理論のコンパクト化の問題で重要な役割を担うことが 1980 年代中頃に判明し、それ以来、理論物理学と数学の立場から多くの研究が行われている。そのような研究のきっかけとなったのは 4 次元複素射影空間の 5 次超曲面 $(5) \subset \mathbb{P}^4$ において発見されたミラー対称性であった。この重要な発見は、1990 年前後の物理学者の論文に示唆されていたのであるが、Greene と Plesser の論文 [GP] において明確な定式化が与えられ、また、ほぼ同時期に現れた Candelas et al による有名な論文 [CdOGP] で、そのミラー対称性が示す幾何学的な意味の重要性が驚きを持って受け入れられたのであった。このような発見は、1986 年に現れ当時の弦理論の研究を一色にした Gepner の (共形場理論と 5 次超曲面の関係を最初に発見した) 論文 [Ge] に端を発していたことを忘れてはならないであろう。

さて、 \mathbb{P}^4 で考える一般の 5 次超曲面はホッジ数 $h^{1,1} = 1, h^{2,1} = 101$ を持ち 101 次元の変形次元を持つ。ミラー対称性の当初の研究で着目されたのは、このような一般の 5 次超曲面であった。斉次 1 次式を成分に持つ 5×5 行列の行列式を考えると斉次 5 次式が得られるが、ここではこのような 5 次式で与えられる 5 次超曲面に関わって現れるカラビ・ヤウ多様体とそのミラー多様体の構成を与える。歴史をさかのぼって、このようなカラビ・ヤウ多様体に対応する共形場理論にも自然に関心を持たれるが、それについては課題として残している。

2. DETERMINANTAL QUINTICS

以下射影空間 \mathbb{P}^4 の斉次座標を $[z] = [z_1, \dots, z_5]$ と表し, このことを \mathbb{P}_z^4 と表す. 斉次 1 次式 $a_{ij}(z) (1 \leq i, j \leq 5)$ を一般に与えるときに

$$Z := \left\{ \det(a_{ij}(z))_{1 \leq i, j \leq 5} = 0 \right\} \subset \mathbb{P}_z^5$$

と定義し, また $A(z) = (a_{ij}(z))_{1 \leq i, j \leq 5}$ と表す. このとき一般の $A(z)$ について次の諸性質が調べられる;

- (1) Z は $\text{rk} A(z) = 3$ となる 50 点で特異で, 特異点は通常二重点.
- (2) $\tilde{X} := \{([z], [w]) \in \mathbb{P}_z^4 \times \mathbb{P}_w^4 \mid A(z)w = 0\}$ とすると自然な射影 $\tilde{X} \rightarrow Z$ は small resolution を与える.
- (3) $H^1(\tilde{X}, \mathcal{T}_{\tilde{X}}) \simeq H^1(Z, \mathcal{T}_Z)$.

5×5 複素行列全体のなす射影空間 $\mathbb{P}((\mathbb{C}^5)^{\otimes 2})$ の中で, 行列式が零に等しい超曲面が考えられるが Z はこれの線型切断になっている. 一方で, 超曲面は (超曲面上で一般に階数 4 の) 行列の階数が 3 以下となる所で特異になり, その余次元は 3 に等しくまた次数は 50 に等しいことが計算できる [Fu, Example 14.4.14]. 一般論で分かるのはここまでであるが, 幸い (1) の性質は実際に定義式を与えて Z が 50 個の点で特異でかつ各々が通常二重点であることが計算機を用いて確かめられる. (2) の性質は, \tilde{X} が $\mathbb{P}_z^4 \times \mathbb{P}_w^4$ の 5 個の $(1, 1)$ 因子による完全交叉であることと (1) の性質から従う. (3) については, $\omega_{\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}, \omega_Z \cong \mathcal{O}_Z$ と (2) から従う.

Remark. (3) の性質から $\dim H^1(Z, \mathcal{T}_Z) = 52$ と計算できるが, Z の定義方程式に含まれるパラメータを次のように数えても同じ数が得られる

$$5 \times 25 - (\dim GL(5) \times GL(5) - 1) - \dim \text{Aut}(\mathbb{P}_z^4) = 52.$$

Z を一般 5 次式 $X_5 = (5)$ の特別な形と見なし, X_5 の 101 次元の変形族のパラメータ空間を $\mathcal{M}(X_5)^{101}$ とあらわすと, 部分空間 $\mathcal{M}^{52}(Z) \subset \mathcal{M}(X_5)^{101}$ 上で Z が実現している. 一般の X_5 から (1) の性質を持つ Z を経由して \tilde{X} に至るプロセスを一般に conifold transition とよんでいてホッジ数に関して

$$\begin{cases} h^{2,1}(X_5) = 101 \\ h^{1,1}(X_5) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} h^{2,1}(\tilde{X}) = 101 - (50 - r) \\ h^{1,1}(\tilde{X}) = 1 + r \end{cases}$$

が成り立つ. ここで, 50 は 50 個の通常二重点につぶれる vanishing cycles で r はそれらの間のホモロジー関係を表す. 今の場合 (2) より $r = 1$ であることが分かる. \square

Remark. \tilde{X} の定義式 $A(z)w = 0$ が $A(z)w = A(w)z$ のように z, w に関して対称であるようにパラメータを取ることが出来る. このとき, $z \leftrightarrow w$ の入れ換えの群を $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と表す. このようなパラメータを一般に取るとき, \mathbb{Z}_2 は \tilde{X} に自由に作用し, かつ \tilde{X} の正則 3 形式を不変に保つことが確かめられる. 自由商 $X := \tilde{X}/\mathbb{Z}_2$ を歴史的に Cayley model of Reye congruence と呼んでいるが, 今の場合カラビ・ヤウ多様体となっている. 文献 [HT2] では, このカラビ・ヤウ多様体のミラー対称性を調べることによって X は, X と双有理でない別のカラビ・ヤウ多様体 Y と対をなして現れることを予想し, 実際そのような Y が Reye 合同の古典的射影幾何学の枠組みの中で自然に出現することを示した. さらに, X と Y の導来同値性 $D^b(\text{Coh } X) \cong D^b(\text{Coh } Y)$ も予想されたのであるが, これについてはその後の文献 [HT3, HT4] によって証明が与えられた. ここに見られるような古典的な射影幾何学と線型切断の導来圏の密接な関係は, 近年 Kuznetsov 氏によって提唱されている homological projective duality と呼ばれる一般的枠組みの下で理解が進んでいる (例えば, [Kuz] に最近の解説記事がある). \square

3. MIRROR SYMMETRY (ORBIFOLD CONSTRUCTION)

複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体を与えられたときに, 弦理論の考察から (1, 1) ホッジ数と (2, 1) ホッジ数が入り替わる別のカラビ・ヤウ多様体の存在が予想され, そのようなカラビ・ヤウ多様体をミラー多様体と呼ぶのであった. しかしながら, ミラー多様体の一般的な存在は, (Gorenstein 特異点を許して考える) ファノトーリック多様体内で完全交叉として記述されるものを除くと, 一般論はなく case by case に構成をしてその存在を確かめているのが現状である. カラビ・ヤウ多様体の微分同型類や双有理同型類がどれ程あるのかよく分かっていない状況では仕方のないことかと思われる. ミラー多様体の具体的な構成に関して, トーリック退化を用いてファノトーリック多様体に帰着する方法などが有効であるが, ミラー対の側で成される conifold transition に関する仮定が大きな問題となる. ここでは, 一般性がなくなるが, そのような問題が回避されるオービフォールド構成法に基づいて, 前述のカラビ・ヤウ多様体 \tilde{X} と $X = \tilde{X}/\mathbb{Z}_2$ のミラー多様体 (の族) を構成する. ミラー多様体 (の族) の幾何学をあからさまに見ることが出来, さらにミラー族のシンプレクティック幾何学を深く調べる手掛かりとなるものと期待している.

オービフォールド構成法: カラビ・ヤウ多様体 V が与えられたとき, 先ず V の変形族 \mathcal{V} を考える. この族のパラメータを $h^{1,1}(V)$ 個の部分に制限して "特殊族" \mathcal{V}_{sp} を考える. 特殊族の一般ファイバーを V_{sp} と表すと, V_{sp} は一般に特異である一方で, 特殊族を考えたことによって V_{sp} の正則 3 形式を不変にする離散群の対称性が現れる

(この群を G_{orb} と表す). V_{sp}/G_{orb} を考えると特異点がさらに複雑になるが, 標準因子 $K_{V_{sp}/G}$ を保つ crepant resolution $\widehat{V_{sp}/G}$ が存在する場合がある. このような場合で, V_{sp}/G と V の (1, 1) ホッジ数と (2, 1) ホッジ数が入れ替わるとき, この特異点解消をミラー多様体 V^* とする. \square

以上がオービフォールド構成法の概略であるが, V_{sp} の決定や G_{orb} の決め方など不明な点が多い. ファノトーリック多様体で完全交叉として表すカラビ・ヤウ多様体の場合は, 多面体の組み合わせ論的 dual 性を用いてミラー多様体 (の族) が一般に構成出来ることが分かっているが, その結果を基にして周期積分 (と GKZ 方程式系) を手掛かりにすると V_{sp} と G_{sp} を決める手掛かりとなる [HKTY]. 幸い, ここで問題にする \tilde{X} はトーリック多様体 $\mathbb{P}^4 \times \mathbb{P}^4$ の完全交叉となっていて, さらに [HKTY] に与えられた処方では \tilde{X}_{sp} および G_{sp} を推論すると, それらが実際ミラー多様体を与えることが確かめられるものになっている. 推論の過程は省略して, [HT1] の報告した結果のみを以下に整理する. 詳細に入る前に構成の全体像を図式化しておく:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \tilde{X}^* \longrightarrow \tilde{X}_{sp} \\ & \searrow 50 ODP & \searrow \\ & Z & Z_{sp} \end{array}$$

ここで, 左の図式は前節で導入した determinantal quintic Z とその small resolution で, 右の図式ではこれらの特殊族を考えた上で, 特異点の考察を行い crepant な partial resolution を行った後, 最終的に非特異なカラビ・ヤウ多様体 \tilde{X}^* を得る. その後, G_{orb} による商を考察する.

定義 1. 超曲面 $Z \subset \mathbb{P}^4$ を定義する行列 $A(z)$ に含まれるパラメータを特殊化して $A^{sp}(z)$ を定める ($A^{sp}(z)$ の具体形は論文 [HT1] を参照). このとき定義方程式は

$$(3.1) \quad \det A^{sp}(z) = a^5 z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 + (z_1 + b z_2)(z_2 + b z_3) \cdots (z_5 + b z_1) = 0$$

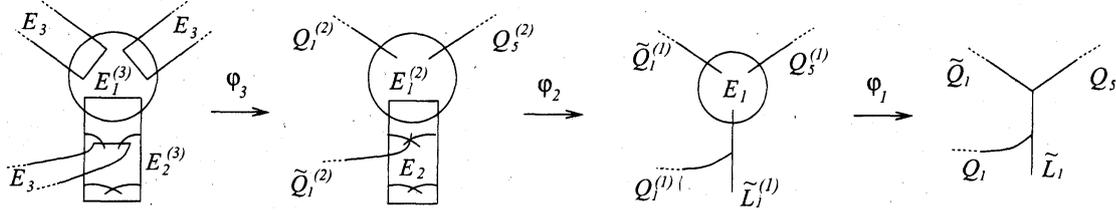
の具体形をもつが, これによって, $Z_{sp}(a, b) := \{\det A^{sp}(z) = 0\} \subset \mathbb{P}^4$ とする. \square

超曲面 $Z_{sp}(a, b)$ は, 一般の $(a, b) \in (\mathbb{C}^*)^2$ について特異であり, さらに次のことが具体的な計算によって調べられる.

命題 2. • 一般の (a, b) について, $Z_{sp}(a, b)$ の特異点集合は, A_2 型の特異点を持った 5 本の有理曲線と A_1 型の特異点を持った 10 本の有理曲線から成る. これらの有理曲線の配置は [HT1] を参照.

• $\tilde{X}_{sp} := \{([z], [w]) \in \mathbb{P}_z^4 \times \mathbb{P}_w^4 \mid A^{sp}(z)w = 0\}$ は一般の (a, b) について partial resolution $\tilde{X}_{sp} \rightarrow Z_{sp}$ を与え, \tilde{X}_{sp} 上で特異点集合は 20 本の有理曲線にそった A_1 型特異点となる. \square

20本の有理曲線の配置や交わりの様子の詳細は論文[HT1]を参照とするが、交わりの様子は以下の図の右端のように、3本の有理曲線の交点と2本の交点からなり、このような配置が10個現れて全体で20本の有理曲線の配置を決めるものになっている。



ここに見られる特異曲線の配置は、Barth,Nieto[BN]によって調べられ、Barth-Nieto quintic と呼ばれる5次超曲面と非常に類似するもので、概ねそこで議論されている特異点解消(crepant resolution)にそって、今回の場合も crepant resolution が得られる。その様子は上の図に示すように、1) 3本の有理曲線の交点で blow-up を行い、2) その後、1本の有理曲線に沿って blow-up、3) 最後に残された有理曲線にそって blow-up を行って実現される。1)の blow-up で例外集合として4次の(3点で特異な)del Pezzo 曲面が現れ、2)の blow-up では(1点で特異な)conic bundle が現れ、3)では $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ がそれぞれ例外集合として現れる。この様子は、前述の Barth-Nieto quintic の場合に類似しているが、2)の blow-up が今回新しく現れて少し様子が複雑になっている。

命題 3. (i) blow-up 1),2),3)によって crepant resolution $\tilde{X}^* \xrightarrow{\varphi} \tilde{X}_{sp}$ が得られる。

(ii) 特異5次超曲面 Z_{sp} のオイラー数は $e(Z_{sp}) = -10$.

(iii) partial resolution のオイラー数は $e(\tilde{X}_{sp}) = e(Z_{sp}) + 5(e(\mathbb{P}^2) - 1)$ と計算され、

$$e(\tilde{X}^*) = 10(e(E_1) - 1) + 10(e(E_2) - e(\mathbb{P}^1)) + 10(e(E_3) - e(\mathbb{P}^1)) + e(\tilde{X}_{sp})$$

によって $e(\tilde{X}^*) = 100$ と計算される。 □

詳細は文献[HT1]に委ねるが、(i),(iii)の様子は blow-up を表した上の図から概要が読み取れると思われる。(ii)のオイラー数の計算は、 Z_{sp} 上の1点を vertex として射影を行う手続きを繰り返すという初等的(だが複雑)な計算に基づいて行ったが、その詳細についても文献[HT1]参照とする。(Z_{sp} のような特別な5次超曲面のオイラー数を決定する有効な計算手法が他にあるのか筆者にはよく分からない。)

上の命題において、 $e(\tilde{X}) = 2(h^{1,1}(\tilde{X}) - h^{2,1}(\tilde{X})) = -100$ の値が $e(\tilde{X}^*) = 100$ と反転していること、さらに \tilde{X}^* が特異カラビ・ヤウ多様体 \tilde{X}_{sp} の crepant resolution であり従ってカラビ・ヤウ多様体であることから、 \tilde{X}^* が既に \tilde{X} のミラー多様体になっていると期待されるがその事実はホッジ数を計算して確かめられる。

\tilde{X}^* のホッジ数の計算は, Barth-Nieto quintic の場合に議論されている Weil 予想を用いた方法 [vGN, HSvS] を少し拡張して行うことが出来る. mod p reduction を行うために, $\tilde{X}_{sp}^*(Z_{sp})$ に含まれるパラメータを $a = b = 1$ とおいて, \mathbb{F}_p 上の有理点の個数 $\#\tilde{X}_{sp}^*(\mathbb{F}_p)$ を数える. $\#\tilde{X}_{sp}^*(\mathbb{F}_p)$ は Frobenius 写像に関する固定点定理によって

$$\#\tilde{X}_{sp}^*(\mathbb{F}_p) = t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + t_4 - t_5 + t_6, \quad t_i = \text{Tr}(\text{Frob}_p^*|_{H_{\text{ét}}^i(\tilde{X}_{sp}, \mathbb{Q}_\ell)})$$

と書かれる. ここで, Weil 予想によって Frobenius 射の固有値 λ_α は代数的整数で $|\lambda_\alpha| = p^{i/2}$ であることから

$$t_i \in \mathbb{Z}, \quad |t_i| \leq b_i(\tilde{X}_{sp}^*)p^{i/2}$$

という性質を持つ ($b_i(\tilde{X}_{sp}^*)$ は位相的 Betti 数). 特にカラビ・ヤウ多様体のとき, $t_0 = t_6 = 1, t_1 = t_5 = 0$ であるので $t_2 = t_4$ と t_3 の値が決定したい未知数である. 次の命題は文献 [HSvS] に従った議論から示される.

命題 4 ([HSvS][HT1]). Good prime p について $\text{Frob}_p^*|_{H_{\text{ét}}^2} = p \text{ id}$ が成り立つ. \square

この命題に基づいて, 不等式 $|t_3| \leq b_3 p^{3/2}$ を書き下すと

$$|t_3| \leq |1 + b_2(p + p^2) + p^3 - \#\tilde{X}_{sp}^*(\mathbb{F}_p)| \leq b_3 p^{3/2}$$

が全ての good prime について成り立つことになる. この不等式の他に, b_2, b_3 は関係式 $e(\tilde{X}_{sp}^*) = 2 + 2b_2 - b_3 = 100$ を満たす. 特にこの不等式は b_3 が小さいと予想されるとき b_2, b_3 の値に強い条件を与えることが分かる. 今の場合 $p \leq 100$ の good prime について有理点 $\#\tilde{X}_{sp}^*(\mathbb{F}_p)$ を数えてみると, 不等式が全ての good prime に対して成立するのは次の場合に限ることが判明する ($b_2 = h^{1,1}, b_3 = 2 + 2h^{2,1}$).

命題 5. $h^{1,1}(\tilde{X}_{sp}^*) = 52, h^{2,1}(\tilde{X}_{sp}^*) = 2$ \square

上の結果を得るのに $a = b = 1$ としたが, ホッジ数が位相不変量であることから, 結果は一般の $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ について成り立つ. また, 超曲面の定義式から $Z_{sp}(a, b) \cong Z_{sp}(\alpha^k a, \alpha^m b) (\alpha^5 = 1)$ が確かめられるので, パラメータ空間は $[a^5, b^5, 1] \in \mathbb{P}^2$ によってコンパクト化することが出来る (このコンパクト化は周期積分の満たす微分方程式の変数空間のコンパクト化から得られるものと一致する). 結果をまとめると

定理 6. $\tilde{\mathcal{X}}^* := \{\tilde{X}_{a,b}^*\}_{[a^5, b^5, 1] \in \mathbb{P}^2}$ は \tilde{X} のミラー族を与える. 特に, この場合のオービフォールド構成では $G_{\text{orb}} = \{\text{id}\}$ である. \square

Remark. 5次超曲面のパラメータ空間を $\mathcal{M}(X_5)^{101}$ と書いた. この中で, 行列式型の超曲面 Z のパラメータ空間を $\mathcal{M}(Z)^{52}$ と表した. Z は一般に特異点を持つが特異点の解消 $\tilde{X} \rightarrow Z$ が存在し, これを conifold transition と呼んだ. 上の結果は, さらに次元が小さなパラメータ空間 $\mathcal{M}(Z_{sp})^2$ に入ると, 特異点は複雑になるが, それで

も crepant resolution $\tilde{X}^* \rightarrow Z_{sp}$ が存在して、結果としてカラビ・ヤウ多様体の族が得られ、特に、ミラー対称なカラビ・ヤウ多様体の族が得られることを言っている。筆者が知る限り、カラビ・ヤウ多様体の族とそのミラー族が“つながって”しまう最初の例と思われる。さらに、そのような例がミラー対称性の発端であった5次超曲面に関連して現れて来たことは単なる偶然なのか不思議に思われる。共形場の理論でこの事実の解釈が出来ると思う。□

4. MIRROR SYMMETRY OF REYE CONGRUENCES

$Z = \{\det A(z) = 0\}$ の定義行列が $A(z)w = A(w)z$ なる対称性を持つとき $z \leftrightarrow w$ による群作用が \tilde{X} にある。第1章の Remark で記述したように、このような $A(z)$ を一般に取るとき、この群 \mathbb{Z}_2 による商 $X = \tilde{X}/\mathbb{Z}_2$ は非特異であり Reye 合同 (の Cayley model) と呼んだ。 \tilde{X} のミラー族 $\tilde{\mathfrak{X}}^*$ を $\mathbb{P}^2 \ni [a^5, b^5, 1]$ 上の族として構成したが、これをさらに $a = b$ に制限して \mathbb{P}^1 上の族にする。このとき、

- fiberwise に上記 \mathbb{Z}_2 が作用し、 $a^5 \neq -32$ においてその作用は自由である。
- $a^5 = -32$ 上のファイバーにおいて、1点から成る固定点集合をもつ。

が示される。また、1次元族の discriminant は $a^5(a^5 + 32)(1 - 11a^5 - 10a^{10}) = 0$ と $a^5 = \infty$ で与えられることが $Z_{sp}(a, b)|_{b=a}$ の定義式から容易に調べられる。従って、fiberwise に \mathbb{Z}_2 による商を考えることによって、discriminant を除く \mathbb{P}^1 上の点で非特異なカラビ・ヤウ多様体の族 \mathfrak{X}^* が得られる。

命題 7. 族 \mathfrak{X}^* の一般ファイバーに現れる非特異カラビ・ヤウ多様体のホッジ数は $h^{1,1} = 26, h^{2,1} = 1$ である。とくに、 \mathfrak{X}^* は Reye 合同のミラー族である。□

Remark. 論文 [HT1] では、 \mathbb{P}^2 上の族 $\tilde{\mathfrak{X}}^*$ の正則3形式に関する Picard-Fuchs 方程式のモノドロミーを生成系とともに決定した。Picard-Fuchs 方程式は、局所系 $R\pi_*^3 C_{\tilde{\mathfrak{X}}^*}$ に関する Gauss-Manin 系であるが、これを $a^5 = b^5$ で定める \mathbb{P}^1 に制限しさらに \mathbb{Z}_2 -不変性を課すと、 \mathbb{P}^1 上の族 \mathfrak{X}^* の対応する局所系 $R\pi_*^3 C_{\mathfrak{X}^*} \cong (R\pi_*^3 C_{\tilde{\mathfrak{X}}^*})^{\mathbb{Z}_2}$ の Picard-Fuchs 方程式が得られる。特に、上述の $a^5 = -32$ のファイバーに現れる固定点では、レンズ空間 S^3/\mathbb{Z}_2 が点につぶれていることが分かり、レンズ空間を消滅サイクルとする Picard-Lefschetz のモノドロミーが $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形を持つことが読み取られる。これは、レンズ空間 S^3/\mathbb{Z}_n を消滅サイクルとする Picard-Lefschetz のモノドロミーは一般に $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形であろうという van Straten 氏の予想 [EvS, Appendix] を具体例で示したものとなっている。さらに、モノドロミーの計算から \mathbb{P}^1 上の族 \mathfrak{X}^* は $a^5 = 0$ と $a^5 = \infty$ の2点において、いわゆる最大退化をしていることが分かる。これは、 $Z_{sp}(a, b)|_{b=a}$ の定義方程式 (3.1) から読み取ることが出来る。実は、このようなミラー族における状況は、もとのカラビ・ヤウ多様体である Reye 合同 X が導来同値

な別のカラビ・ヤウ多様体 Y を持つと言う事実を示唆する状況証拠となる。(実際こうして論文 [HT2, HT4][HT2, HT4] において Y を見つけて、その導来同値性を示したのであった)。同じような性質を持つカラビ・ヤウ多様体のミラー族の解析を論文 [HK] で行っているが、Reye 合同はそこでの例と類似する性質を多数共有する。2つの退化点近傍に現れるシンプレクティック幾何学の関係に大変興味を持たれるところである。□

REFERENCES

- [BN] W. Barth and I. Nieto, *Abelian Surfaces of type (1,3) and Quartic Surfaces with 16 Skew Lines*, J. Alg. Geom. **3** (1994) 173-222.
- [CdOGP] P. Candelas, X.C. de la Ossa, P.S. Green, and L.Parkes, *A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory*, Nucl.Phys. B356(1991), 21-74.
- [EvS] C. Enckevort and D. van Straten, *Monodromy calculations of fourth order equations of Calabi-Yau type*, in Mirror symmetry. V, 539–559, AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006, math.AG/0412539.
- [Fu] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer (1984).
- [vGN] B. van Geemen and N. O. Nygaard, *On the Geometry and Arithmetics of Some Siegel Modular Threefolds*, Jour. of Number Theory 53(1995), 45–87.
- [Ge] D. Gepner, *Exactly solvable string compactifications on manifolds of $SU(n)$ holonomy*, Phys.Lett.199B(1987)380.
- [GP] B.R.Greene and M.R.Plesser, *Duality in Calabi-Yau moduli space*, Nucl.Phys. B338 (1990) 15-37.
- [HKTY] S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen and S.-T. Yau, *Mirror Symmetry, Mirror Map and Applications to complete Intersection Calabi-Yau Spaces*, Nucl. Phys. B433(1995)501–554.
- [HK] S. Hosono and Y. Konishi, *Higher genus Gromow-Witten invariants of the Grassmannian, and the Pfaffian Calabi-Yau threefolds*, Adv. Theor. Math. Phys. 13 (2009) 463–495.
- [HT1] S. Hosono and H. Takagi, *Determinantal quintics and mirror symmetry of Reye congruences*, Comm. Math. Phys. Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s00220-014-1971-7.
- [HT2] S. Hosono and H. Takagi, *Mirror symmetry and projective geometry of Reye congruences I*, Jour. of Alg. Geom. **23** (2014) 279–312, arXiv:1101.2746.
- [HT3] S. Hosono and H. Takagi, *Duality between $S^2\mathbb{P}^4$ and the Double Quintic Symmetroid*, arXiv:1302.5881v2 [math.AG].
- [HT4] S. Hosono and H. Takagi, *Double quintic symmetroids, Reye congruences, and their derived equivalence*, preprint, arXiv:1302.5883 [math.AG].
- [HSvS] K. Hulek, J. Spandaw, B. van Geemen, and D. van Straten, *The modularity of the Barth-Nieto quintic and its relatives*, Adv. Geom. 1 (2001) 263–289.
- [Kuz] A. Kuznetsov, *Semiorthogonal decompositions in algebraic geometry*, Contribution to the ICM 2014, arXiv:1404.3143[math.AG].