

2次元点渦系で、エネルギーを保存する Fokker-Planck 型衝突項

八柳祐一

YUICHI YATSUYANAGI

静岡大学教育学部

FACULTY OF EDUCATION, SHIZUOKA UNIVERSITY

羽鳥尹承

TADATSUGU HATORI

核融合科学研究所

NATIONAL INSTITUTE FOR FUSION SCIENCE

Pierre-Henri Chavanis

Laboratoire de Physique Théorique (IRSAMC),
CNRS and UPS,

Université de Toulouse, F-31062 Toulouse, France

1 初めに

2次元点渦系 (10) は, (ミクロな) オイラー方程式の形式解である [1]¹⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot (\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) \hat{\omega}(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad (1)$$

ここで, $\hat{\omega}(\mathbf{r}, t)$, $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t)$ は, それぞれ, ミクロな渦度と速度場である。これ以降, ミクロな量には $\hat{\cdot}$ をつけて明示する。式 (1) は形式的に, マクロなオイラー方程式と同一である。

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{r}, t) + \nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \omega(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad (2)$$

ここで, $\omega(\mathbf{r}, t)$ と $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ は, それぞれ, マクロな渦度と速度場である。

¹⁾ここであえて「ミクロな」とよんでいる理由については2章冒頭に記載してある。

点渦系は、2次元乱流の研究の場で大きな役割を果たしてきた [2,3]。1949年に発表された Onsager の記念碑的論文では、平衡統計力学のフレームワークを2次元点渦系へ適用することが試みられた。Onsager は、乱流中に長時間に渡り安定的に存在する大規模渦構造を説明する道具として、「負温度」に注目したようである [4,5]。それ以来、「負温度状態」に関して数値的、理論的な研究が広く行われてきた [6-17]。特に有名な結果として、Joyce, Montgomery らは、正負点渦から構成される負温度系の平衡解は sinh-Poisson 方程式で与えられること、単一符号の点渦系の場合には、平衡統計力学で知られた Boltzmann 分布となることを状態数を最大化する手法 (いわゆるエントロピー最大化と同等) を用いて解析的に示している。

一方、同じく Montgomery らは後年、減衰性2次元 Navier-Stokes 系の平衡解が、離散系である点渦系の平衡解を記述する方程式として知られる sinh-Poisson 方程式で非常にうまく説明できることを報告している [18-20]。ここで、一つ、疑問が沸く。時刻 $t = 0$ で、点渦分布 $\hat{\omega}(\mathbf{r}, 0)$ があたえられたとしよう。ミクロなオイラー方程式 (1) に従って時刻 $t = T$ まで時間発展させた結果、点渦分布は $\hat{\omega}(\mathbf{r}, T)$ となる。一方、点渦分布を空間 (アンサンブル) 平均して得たマクロな渦度分布 $\omega(\mathbf{r}, 0) = \langle \hat{\omega}(\mathbf{r}, 0) \rangle$ をマクロな Euler 方程式 (2) に従って時刻 T まで時間発展させた結果である $\omega(\mathbf{r}, T)$ も、先ほどの $\hat{\omega}(\mathbf{r}, T)$ とは独立に得ることができるが、時刻 $t = T$ において事後的に平均化した $\langle \hat{\omega}(\mathbf{r}, T) \rangle$ と、時刻 $t = 0$ であらかじめ平均化して時間発展をさせた $\omega(\mathbf{r}, T)$ は、同じ結果となるのだろうか? もし、点渦数 N が無限大の極限を考えれば、平均場に関する揺らぎの効果は無視できるようになるので、答えは “YES” となるだろう²⁾。一方、 N が有限の系では、揺らぎによるマクロな Euler 方程式からのずれがあるため、答えは “NO” となる。この場合の $\omega(\mathbf{r}, t) = \langle \hat{\omega}(\mathbf{r}, t) \rangle$ に対する時間発展方程式は、もはや非粘性 Euler 方程式と同一ではなく、

$$\frac{\partial \omega(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\omega(\mathbf{r}, t)) = C, \quad (3)$$

と書くべきであると考え。これが、本論文で扱う点渦系の運動論的方程式であり、右辺の C が衝突項となる。以降では、 C の具体形を導くことに集中する。

ここで、点渦系の運動論的方程式に関係した、先達による研究成果を簡単に振り返っておく。軸対称流を含む一般の流れに対する運動論的方程式が、Chavanis により様々な方法 (projection operator, BBGKY, Klimontovich) を用いて導かれている [22, 23]³⁾ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)\omega(\mathbf{r}, t)) &= \frac{\partial}{\partial r^\mu} \int_0^{+\infty} d\tau \int d\mathbf{r}_1 V^\mu(1 \rightarrow 0) G(t, t - \tau) \\ &\times \left[\tilde{V}^\nu(1 \rightarrow 0) \frac{\partial}{\partial r^\nu} + \tilde{V}^\nu(0 \rightarrow 1) \frac{\partial}{\partial r_1^\nu} \right] \omega(\mathbf{r}, t) \frac{\omega}{\Omega}(\mathbf{r}_1, t), \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $G(t, t - \tau)$ は平均流速を求めるための Green 関数、 $\mathbf{V}(i \rightarrow j)$ は、 i 番目の点渦が j 番目の点渦の位置に誘起する速度、 $\tilde{\mathbf{V}}(i \rightarrow j)$ は速度の揺らぎ成分、 Ω は1点渦あたり

²⁾ 逆向きに論じられる方が一般的かもしれない。すなわち、流体力学に由来するマクロな Euler 方程式をはじめに考える。この解として与えられる連続場としての渦度場 $\omega(\mathbf{r}, t)$ は、 $t < \infty$ での $N \rightarrow +\infty$ の極限において $\Omega \sim 1/N$ なる強さ (循環) をもつ点渦の集合で近似できることが示される [21]。

³⁾ この方程式は、いわゆる集団運動効果 (collective effect) を無視している。集団運動効果を取り入れた結果については、Dubin ら [24, 25]、または Chavanis の別の結果 [26, 27] を参照のこと。

の循環である。この方程式は、 $N \rightarrow +\infty$ の極限で $O(1/N)$ の精度であり、動力的時間スケール(マクロに1回転する時間など)を t_D とした場合、概ね Nt_D 程度の時間内の点渦系の時間発展を記述できる。

軸対称流の場合、点渦群も角速度 $\Omega(r, t)$ で流れに沿った軸対称な軌道を描くようになる。この場合の衝突項は簡略化可能で、(4)式は以下のように書き換えられる [22, 23] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega(r, t)}{\partial t} = & -\frac{\Omega}{4} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{+\infty} r' dr' \ln \left[1 - \left(\frac{r_{<}}{r_{>}} \right)^2 \right] \delta(\Omega(r, t) - \Omega(r', t)) \\ & \times \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r'} - \frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r} \right) \omega(r, t) \omega(r', t). \end{aligned} \quad (5)$$

この式は、系の全循環、エネルギー、角運動量を保存し、Boltzmann エントロピーを単調増加させる H 定理を満たす。一方で、点渦系の衝突項の効果は、デルタ関数による共鳴条件に強く依存するため、もし、角速度が半径に関する単調減少関数になると、共鳴条件は成立しなくなり(角速度が同じ箇所同士で共鳴するため)衝突項はゼロとなる。結果として、仮に系の渦度分布が Boltzmann 分布に達していなかったとしても、(5)式による系の時間発展は、止まってしまう。これは、(5)式が Boltzmann 分布以外の、角速度が単調減少するあらゆる平衡状態を受け入れるためであり、(5)式は系が Boltzmann 型の平衡分布に緩和しない場合があると言っているようにみえる [28]。しかしこれは、逆に Boltzmann 型平衡分布へ緩和する機構が、少なくとも $1/N^2$ 以上の小さい効果で駆動されていることを示唆している、と考えることもできる。このような小さな効果をきちんと考慮した運動論的方程式を導ければ、軸対称流の場合でも Boltzmann 分布への緩和が説明できる可能性がある。上記の場合の緩和時間は $N^2 t_D$ 程度となり、適当な値で見積もってみるとわかるが、数千粒子の点渦系を熱平衡まで数値的に緩和させるのはとても大変なことであることに気がつく⁴⁾。もしかしたら、軸対称の点渦系は Boltzmann 型の熱平衡分布へ決して緩和しないのかもしれない。これらはまだ未解決の問題であり、今後の研究が必要とされる部分である。

さらに、Chavanis は(解析的に導出した訳ではなく、「べきだ論」で求めた結果ではあるが)、(4)式を簡略化したものとして、次のような運動論的方程式を提案している [22, 23] :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{\Omega}{8} \nabla \cdot \int d\mathbf{r}' \frac{\mathbf{x}_{\perp} \otimes \mathbf{x}'_{\perp}}{x^2} \delta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w}) (\omega' \nabla \omega - \omega \nabla' \omega'), \quad (6)$$

ここで、関係式 $\omega = \omega(\mathbf{r}, t)$, $\omega' = \omega(\mathbf{r}', t)$, $\mathbf{x} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}', t)$ を用いた。この式は、全循環、エネルギー、角運動量を保存し、 H 定理を満たす。また、軸対称流の場合には、対数スケールの違いがあるが、(5)式に一致する。(5)式の場合と同様に、衝突項はデルタ関数による共鳴を含んでいるが、(5)式のケースよりも条件がより複雑で、逆に条件を満足するケースが生まれやすいはずである。よって、(6)式では Nt_D の時間スケールで Boltzmann 型の平衡解へ漸近すると期待できる。実際、Kawahara らの結果によ

⁴⁾もしこのスケールリングが正しいとすると、1000 粒子の点渦系を熱平衡まで数値的に緩和させるのに、現在最速の GPU を使ったとしても半年~1 年程度の計算時間がかかることになる。

ると、非軸対称流の場合で緩和時間が Nt_D 程度になるという数値実験の結果も報告されている [29]。よって、共鳴条件が満たされれば、運動論的方程式 (6) は系を Nt_D の時間スケールで Boltzmann 型平衡状態へ導けるが、もし共鳴条件が満たされない場合には、(6) 式では平衡状態への緩和を十分に記述することはできず、結果的に、より高次な $1/N^2$ 以上の効果を取り入れ、 N^2t_D 程度かそれ以上の長い時間におたる緩和を説明できる機構を新たに考えなくてははいけないだろう。

これまでに述べた、Chavanis を中心とした過去の結果に共通する性質として、「平均流が速く揺らぎが小さい」という点が挙げられる。すなわち、点渦は長時間に渡り、平均流に貼付くように運動をする。たとえば、軸対称流の場合、長距離相関に由来する衝突項 (概ね、 $|\delta \mathbf{u}| \sim 1/\sqrt{N}$ 程度の大きさ) の効果を長時間に渡り積み重ねた結果、点渦の軌道は円形からわずかに外れる。一方、今回我々が考えているモデルは逆のケース、つまり、平均流が弱くて相対的に揺らぎの効果が大きく、点渦の軌道に関して Brown 運動に類する直線軌道近似を用いることができるケースとなっている。今回の結果は、過去の結果と異なる領域について考えた結果得られたものであり、相補する関係にあると考えている。特に、今回のモデルが威力を発揮するのは、有限個数の渦結晶配位が崩れていく過程の解析などであると予想する。今回我々が得た結果 (70) 式の衝突項は、拡散テンソル D とドリフト \mathbf{V} を含む Fokker-Planck 型をしている。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \nabla \cdot (D \cdot \nabla \omega - \omega \mathbf{V}), \quad (7)$$

ドリフトは、自己組織化現象に関して重要な寄与がある点が過去に指摘されており [30]、今回の結果でも、エネルギー保存や H 定理について、ドリフトが非常に大きな働きをしていることが確認できた。これらについては、5.2, 5.3 章で詳しく述べる。

Appendix A では、大まかではあるが、直線軌道近似が成り立つ条件について、Brown 運動が効く時間スケールとマクロな流体運動の時間スケールを比較することにより見積った。その結果、ある臨界点渦数 N_c が存在することが分かった。 $1 \ll N \ll N_c$ の場合が今回考えている系に対応し、 $N \gg N_c$ の場合が過去に Chavanis らが考えている系に対応する。点渦数に上限が存在するという事は、熱力学的極限をこのモデルに対してとることができないことを意味し、この制限は後になり様々な問題の原因となり得ることが既に分かっているが、この制限故に導入可能になった直線軌道近似のおかげで、点渦系の運動論的方程式がプラズマや重力多体系でこれまでに得られた運動論的方程式の性質と似たものとなったことも事実である。すなわち、点渦に対する直線軌道近似は、点渦には存在しない慣性質量をあたかも導入したような効果となって働き、その結果、実際に慣性質量をもつ荷電粒子や恒星などの運動に似たのかもしれない。

得られた運動論的方程式 (70) の右辺に現れる衝突項は、次のような物理的に望ましい性質を満たす：

1. 平均場のエネルギーを保存する
2. H 定理を満たし、Boltzmann 型平衡解へ系が緩和することを保証する

3. 初期において、衝突項の効果は小さいので、系の運動方程式は実質的に

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (8)$$

となり、速い緩和をする。速い緩和が終わった後、系は局所平衡に達する。この時点で系には、局所的に温度が一定の小さな領域が系内に点在する状態になっており、温度が一定の各小領域内では衝突項はゼロとなる。しかし温度が異なる他の領域が存在するため、それら領域間の相互作用による衝突項はゼロとはならず、発展方程式は次のような形となる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\nabla \cdot (-D_s(\mathbf{r}) \cdot \nabla \omega + \mathbf{V}_s(\mathbf{r})\omega) \quad (9)$$

そして、系は $O(1/N)$ の小さな衝突項に駆動されながら、ゆっくりと大域平衡を目指し(遅い緩和)、最終的に系全体で一様温度の Boltzmann 型平衡解へ到達する。

この解説の大まかな流れは以下のとおり：第2章で、点渦系と Klimontovich 形式の導入を行う。第3章で、拡散テンソルとドリフトの中間結果を導出する。第4章で、さらに計算を進め、より分かりやすい形式の衝突項に書き換える。ただし、拡散テンソルとドリフトの計算はほぼ同様に進められるので、ドリフトの詳細な導出については割愛した。第5章で、得られた衝突項が有する物理的に望ましい性質を説明する。

2 点渦系

N 個の正の点渦からなる 2 次元系を考える [1]。個々の点渦の強さ(循環)は、 $\Omega =$ 定数である。

$$\hat{\omega}(\mathbf{r}, t) = \sum_i^N \Omega \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \quad (10)$$

ここで、 $\hat{\omega}(\mathbf{r}, t)$ は $x-y$ 平面上のミクロな渦度の z 成分、 $\delta(\mathbf{r})$ は Dirac の 2 次元デルタ関数である。ベクトル $\mathbf{r}_i(t)$ は、 i 番目の点渦の位置を表す。以降、記述が煩雑になるのを避けるため、誤解の恐れがないかぎり、変数の t , \mathbf{r} への依存性は省略する。離散化された点渦分布 (10) は、ミクロな Euler 方程式 (1) の形式解である。その他のミクロな変数も、ここで導入しておく。

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = -\hat{\mathbf{z}} \times \nabla \hat{\psi}, \quad (11)$$

$$\hat{\psi} = \hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \sum_i \Omega_i G(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (12)$$

$$G(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r}|, \quad (13)$$

$\hat{\mathbf{u}}$, $\hat{\psi}$ は、速度場、流れ函数、 $\hat{\mathbf{z}}$ は z 方向の単位ベクトル、 $G(\mathbf{r})$ は境界が無い 2 次元 Laplacian に対する Green 関数である。マクロな流体方程式の解は、発散する解ではなく、滑らかな

関数で記述されるべきなので、デルタ関数という特異点を含む解 (10) は、マクロな流体方程式である Euler 方程式の解ではないと我々は考える。よって、ここでは、(10) 式を解にもつ方程式を形式的に「ミクロな Euler 方程式」とよぶことにする。

点渦系と類似する系 (多少の違いには目をつぶる) として、プラズマ系、重力多体系での運動論的取扱いについて見てみよう。この二つの系でのマクロな相空間密度 $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ の時間発展は、Vlasov-Landau 方程式に支配される。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = A \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\mathbf{v}' \frac{w^2 \delta_{ij} - w_i w_j}{w^3} \left(f' \frac{\partial f}{\partial v_j} - f \frac{\partial f'}{\partial v_j} \right), \quad (14)$$

ここで、 $f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, $f' = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}', t)$, $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ を表す。また、 $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ は粒子に作用する平均力、 A は定数 (重力多体系の場合 $A = 2\pi m G^2 \ln \Lambda$, プラズマの場合 $A = (2\pi e^4 / m^3) \ln \Lambda$, $\ln \Lambda$: クーロン対数) である。この方程式は、デルタ関数で記述されるミクロな相空間密度 \hat{f} に対する時間発展を与える Klimontovich 方程式から準線型理論を用いて導くことが可能である [31]。

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \hat{f} + \hat{\mathbf{F}} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} \hat{f} = 0 \quad (15)$$

Vlasov-Landau 方程式 (14) は、拡散とそれに対するフリクションを含む Fokker-Planck 方程式の形に帰着できる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = \nabla_{\mathbf{v}} \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f - f \mathbf{A}), \quad (16)$$

さらに、プラズマ系や重力多体系では、粒子間の衝突による相互作用よりも、クーロン力や重力といった長距離相互作用に由来する集団運動的効果が大きく働く場合も多く、集団運動的効果が十分に大きいと考えられる時間スケールでは、発展方程式は衝突項を完全に無視した Vlasov 方程式に帰着する。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} f + \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0. \quad (17)$$

我々は、似たような階層構造が 2次元流体方程式にも成り立つと考えた。最もミクロな階層にある方程式は、ミクロな Euler 方程式 (1) であり、Klimontovich 方程式と同様の粒子解 (10) をもつ。この式に対して、マクロな部分と揺らぎの部分とを分離した表式を代入しアンサンブル平均をとった式が、マクロな流体方程式に相当する階層になり、この式にはこれまでに導かれた (4)~(6) 式や、今回我々が導いた (70) 式のような衝突項が含まれる。これらの式は、Vlasov-Landau 方程式と類似した Fokker-Planck 型の衝突項をもつが、点渦系の場合にはフリクションに相当する部分がドリフトに書き換えられる [30]。すなわち、単に拡散を抑制するのではなく、拡散に抗してエネルギーを点渦に与えるような効果も持っていることに注意すべきだろう。最終的に、得られた衝突項を全て無視した方程式として、マクロな Euler 方程式が Vlasov 方程式の対応物として得られる。なお、これらの類似性について最初に注目した論文として、[17] を挙げる。

さて、具体的な導出に移ろう。開始点となる方程式は、マイクロなオイラー方程式 (1) である。マイクロな量をマクロな量とゆらぎに分離した以下の式を (1) 式に代入し、

$$\hat{\omega} = \omega + \delta\omega, \quad (18)$$

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, \quad (19)$$

アンサンブル平均をとることにより、衝突項 $C = C(\mathbf{r}, t)$ を含むマクロな方程式を得る。

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) = C, \quad (20)$$

ここで、

$$C \equiv -\nabla \cdot \Gamma(\mathbf{r}, t), \quad (21)$$

$$\Gamma = \langle \delta\mathbf{u}\delta\omega \rangle = -\int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \langle \delta\omega' \delta\omega \rangle, \quad (22)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}} \times \nabla G(\mathbf{r}), \quad (23)$$

である。 Γ は拡散束 (diffusion flux) を表す。また、簡単のため、 $\delta\omega(\mathbf{r}', t)$ を $\delta\omega'$ と略記した。同様に、今後、 $\omega(\mathbf{r}', t)$ を ω' と略記する。(22) 式を得るにあたり、

$$\delta\mathbf{u} = -\int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta\omega'. \quad (24)$$

を用いた。

次章で、直線軌道近似を使い、拡散束 Γ の具体形を得る。

3 拡散束の評価

拡散束 Γ は、 $\nabla\omega$ に比例する拡散テンソル $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ 、および ω に比例するドリフト $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ から構成されると考える。

$$\Gamma \equiv -\mathbf{D} \cdot \nabla\omega + \mathbf{V}\omega, \quad (25)$$

具体的に \mathbf{D} と \mathbf{V} を見積もるため、小さなパラメタ ϵ による展開をする。

$$\begin{aligned} \omega &\approx \nabla^2\psi \approx O(\epsilon^0), & \mathbf{u} &\approx \nabla\psi \approx O(\epsilon^0), & \nabla\mathbf{u} &\approx \nabla^2\psi \approx O(\epsilon^0), \\ \nabla\omega &\approx O(\epsilon^{1/2}), & \delta\omega &\approx O(\epsilon^{1/2}), & \delta\mathbf{u} &\approx O(\epsilon^{1/2}), \\ \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} &\approx O(\epsilon^{1/2}), & \frac{\partial\omega}{\partial t} &\approx O(\epsilon^{1/2}), & \nabla\nabla\mathbf{u} &\approx O(\epsilon^{1/2}), \\ \Gamma &\approx O(\epsilon). \end{aligned} \quad (26)$$

上記で導入した展開パラメタ ϵ は、渦度場の勾配が小さいと仮定している点を除いて、Chavanis により導入されたものと同等である [22, 23, 26]。渦度場の勾配が小さいという仮

定は、本論文で使用する直線軌道近似に必要である。(20)式の左辺は $O(\epsilon^{1/2})$ であるのに対して、右辺は $O(\epsilon^{3/2})$ であり、衝突項の効果は小さい。以後は、 \mathbf{D} と \mathbf{V} を ϵ を基準に摂動展開し適切な次数の項を集め、計算を進める。

ここで、もう一つの道具、線形化方程式を導入する。線形化方程式は、(18)式と(19)式を(1)式に代入し、1次の項を集めると得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta\omega + \nabla \cdot (\mathbf{u}\delta\omega) = -\delta\mathbf{u} \cdot \nabla\omega. \quad (27)$$

左辺第2項の \mathbf{u} と右辺の $\nabla\omega$ はマクロな量であり、ミクロな時間スケールでは定数とみなす近似が可能となる。すると、(27)式は積分することができて、結果は次式となる。

$$\begin{aligned} \delta\omega &= -\int_{t_0}^t d\tau \delta\mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau), \tau) \cdot \nabla\omega \\ &\quad + \delta\omega(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - t_0), t_0), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \delta\omega' &= -\int_{t_0}^t d\tau \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - \tau), \tau) \cdot \nabla'\omega' \\ &\quad + \delta\omega(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - t_0), t_0), \end{aligned} \quad (29)$$

ここで、 $\nabla'\omega' = \nabla_{\mathbf{r}'}\omega(\mathbf{r}')$ と略記した。これが、本論文で用いた「直線軌道近似」であり、粒子軌道は短い時間スケールの直線をつなぎ合わせた軌道で近似する。この近似の有効性については、Appendixで議論する。

t_0 は $t - t_0 \gg t_c$ となるように選ぶ。 t_c は揺らぎの相関時間を表す。(28)式と(29)式を(22)式に代入し、次式を得る。

$$\begin{aligned} &\langle \delta\omega' \delta\omega \rangle \\ &= \left\langle \left(-\int_{t_0}^t d\tau \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - \tau), \tau) \cdot \nabla'\omega' \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(-\int_{t_0}^t d\tau \delta\mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau), \tau) \cdot \nabla\omega \right) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \left(-\int_{t_0}^t d\tau \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - \tau), \tau) \cdot \nabla'\omega' \right) \delta\omega(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - t_0), t_0) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \delta\omega(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - t_0), t_0) \left(-\int_{t_0}^t d\tau \delta\mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau), \tau) \cdot \nabla\omega \right) \right\rangle \\ &\quad + \langle \delta\omega(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - t_0), t_0) \delta\omega(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - t_0), t_0) \rangle \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} &\approx -\int_{t_0}^t d\tau \langle \delta\mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau), \tau) \delta\omega' \rangle \cdot \nabla\omega \\ &\quad - \int_{t_0}^t d\tau \langle \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - \tau), \tau) \delta\omega \rangle \cdot \nabla'\omega' \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} &\approx \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla\omega \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega' \rangle \\ &\quad + \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla'\omega' \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega \rangle. \end{aligned} \quad (32)$$

中間式 (31) を得るにあたり, (30) 式の第 1 項は ∇ が二つ入っているため高次の項と見なし無視した。また, 最後の項は $1/(t-t_0)$ を係数に含むはずで, 先ほど述べたとおり, 今我々が注目しているのは $t-t_0 \gg t_c$ のケースなので, この項も落とした。変形の途中で, 直線軌道近似を用いて時刻を t_0 から t へ書き換えてある。さらに, (31) 式を (32) 式に書き直すにあたり, (24) 式を用いている。

(32) 式を (22) 式に代入すると, 以下の中間結果を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \nabla \omega &= \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla \omega \\ &\quad \times \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega' \rangle, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \omega &= - \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r}' - \mathbf{u}'(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla' \omega \\ &\quad \times \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

ここで, 拡散テンソルは, 以下の「拡張された久保方式」とも呼べる式で表現されていることは, 注目に値するだろう。

$$\mathbf{D} = \int_{t_0}^t d\tau \langle \delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \delta\mathbf{u}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau), \tau) \rangle. \quad (35)$$

4 拡散束の第 1 項の評価

拡散束を構成するドリフト (34) の形は, 拡散テンソル (33) とほぼ同一で平行に議論可能なので, ここでは煩雑さを避けるため, 拡散テンソルについての議論に集中する。ドリフトについても全く同様の計算が可能である。

ここでの出発点は, 以下の式である。

$$\begin{aligned} &\langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega' \rangle \\ &= \langle [\hat{\omega}(\mathbf{r}'', \tau) - \omega(\mathbf{r}'', \tau)] [\hat{\omega}' - \omega'] \rangle \\ &= \langle \hat{\omega}(\mathbf{r}'', \tau) \hat{\omega}' \rangle - \omega(\mathbf{r}'', \tau) \omega' \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^N \Omega^2 \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t)) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \Omega^2 \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j(t)) \right\rangle \\ &\quad - \omega(\mathbf{r}'', \tau) \omega'. \end{aligned} \quad (36)$$

(36) 式中の最後の結果の第 1 項は $i = j$, 第 2 項は $i \neq j$ の場合にそれぞれ対応する。

まず初めに, $i = j$ のケースから。 $i = j$ に対応する部分を書き直す。

$$\left\langle \sum_{i=1}^N \Omega^2 \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t)) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \sum_{i=1}^N \Omega^2 \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau) - \mathbf{r}' + \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t)) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \Omega^2 \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau) - \mathbf{r}' + \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t)) \rangle. \tag{37}
\end{aligned}$$

ここで, $\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(\tau)$ を評価するために, 以下の確率過程を導入する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}_i(\tau) &= \int_{\tau}^t \mathbf{u}(\mathbf{r}_i(\tau'), \tau') d\tau' + \boldsymbol{\xi}_i \\
&\approx \mathbf{u}_i(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}_i. \tag{38}
\end{aligned}$$

(38) 式の第1項は直線軌道近似, 第2項はBrown運動を表している。 $\langle \cdot \rangle_{\xi}$ により取り込まれる確率過程には, 時刻 t に粒子が \mathbf{r}_i に到達する全ての可能な運動が含まれる。すると, (37) 式はさらに以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N \Omega^2 \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau) - \mathbf{r}' + \mathbf{r}_i(t)) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t)) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^N \Omega^2 \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}' + \mathbf{u}_i(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}_i) \rangle_{\xi} \langle \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i(t)) \rangle \\
&= \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}' + \mathbf{u}'(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \Omega \omega'. \tag{39}
\end{aligned}$$

次に, $i \neq j$ のケースについて。この場合, i 粒子と j 粒子の相関はないものとして, 独立にアンサンブル平均がとれると仮定する。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \neq j}^N \sum_{j \neq i}^N \Omega^2 \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j(t)) \rangle \\
&\approx \sum_{i \neq j}^N \sum_{j \neq i}^N \Omega^2 \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \rangle \langle \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j(t)) \rangle. \tag{40}
\end{aligned}$$

さらに, 以下の仮定も導入する:

$$\sum_i^N \Omega \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \rangle = \omega(\mathbf{r}'', \tau). \tag{41}$$

(41) 式を (40) 式に代入し, 次式を得る。

$$\begin{aligned}
&\sum_{i \neq j}^N \sum_{j \neq i}^N \Omega^2 \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \rangle \langle \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j(t)) \rangle \\
&= \left(\sum_{i=1}^N \Omega \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}_i(\tau)) \rangle \right) \times \left(\sum_{j \neq i}^N \Omega \langle \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_j(t)) \rangle \right) \\
&= N \Omega \frac{\omega(\mathbf{r}'', \tau)}{N \Omega} (N - 1) \Omega \frac{\omega'}{N \Omega} \\
&= \omega(\mathbf{r}'', \tau) \omega' - \frac{1}{N} \omega(\mathbf{r}'', \tau) \omega'. \tag{42}
\end{aligned}$$

以上, $i = j$ のケースと $i \neq j$ のケースを束ね, (36) 式を以下のように書き換える。

$$\begin{aligned} & \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega(\mathbf{r}', t) \rangle \\ &= \Omega \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}' + \mathbf{u}'(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \omega' \\ & \quad - \frac{1}{N} \omega(\mathbf{r}'', \tau) \omega'. \end{aligned} \quad (43)$$

$N\Omega$ が定数であるという要請をしているので, (43) 式の右辺にある二つの項の大きさは同次であり, 片方を無視したりする訳にはいかない。

次に, 保存則を導入する。

$$\int d\mathbf{r}' \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega' \rangle = 0. \quad (44)$$

(43) 式に (44) 式を代入し, 次式,

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r}' \left[\Omega \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}' + \mathbf{u}'(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \omega' \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{N} \omega(\mathbf{r}'', \tau) \omega' \right] \\ &= \Omega \int d\mathbf{r}' \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}' + \mathbf{u}'(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \omega' \\ & \quad - \frac{1}{N} \omega(\mathbf{r}'', \tau) \int d\mathbf{r}' \omega' \\ &= \Omega \int d\mathbf{r}' \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}' + \mathbf{u}'(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \omega' \\ & \quad - \frac{1}{N} \omega(\mathbf{r}'', \tau) N\Omega \\ &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

すなわち以下を得る。

$$\omega(\mathbf{r}'', \tau) = \int d\mathbf{q}' \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{q}' + \mathbf{u}(\mathbf{q}')(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \omega(\mathbf{q}', t), \quad (46)$$

ここで, 曖昧さを避けるため, $d\mathbf{r}'$ は $d\mathbf{q}'$ で置き換えた。この式により, 時刻 τ での量を時刻 t の量に書き換えることが可能となる。(43) 式と (46) 式を (33) 式に代入する。

$$\begin{aligned} & \mathbf{D} \cdot \nabla \omega \\ &= \Omega \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla \omega \\ & \quad \times \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}' + \mathbf{u}'(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \omega' \\ & \quad - \frac{1}{N} \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla \omega \\ & \quad \times \omega' \int d\mathbf{q}' \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{q}' + \mathbf{u}(\mathbf{q}')(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \omega(\mathbf{q}', t). \end{aligned} \quad (47)$$

ここから、さらに (47) 式の第 2 項の評価を進める。

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{N} \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{r}' \int d\mathbf{r}'' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{u}(t - \tau) - \mathbf{r}'') \cdot \nabla \omega \\
& \quad \times \omega' \int d\mathbf{q}' \langle \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{q}' + \mathbf{u}(\mathbf{q}')(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \omega(\mathbf{q}', t) \\
= & -\frac{1}{N} \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int_{t_0}^t d\tau \int d\mathbf{q}' \langle \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{q}' - (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))(t - \tau) + \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \cdot \nabla \omega \\
& \quad \times \omega' \omega(\mathbf{q}', t) \tag{48} \\
= & -\frac{1}{N} \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int_{t_0}^t d\tau \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \nabla \omega \\
& \quad \times \int d\mathbf{q}' \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}' - (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))(t - \tau))] \langle \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \\
& \quad \times \omega' \omega(\mathbf{q}', t). \tag{49}
\end{aligned}$$

(48) 式を (49) 式に書き換える際に、Fourier 変換を用いた。

$$\begin{aligned}
& \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{q}' - (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))(t - \tau)) \\
= & \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\mathbf{k} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}' - (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))(t - \tau))). \tag{50}
\end{aligned}$$

$\langle \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi}$ は D に由来する点渦の Brown 運動を表し、以下のキュムラント展開により評価可能である。

$$\begin{aligned}
\langle \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} & = \exp\left(-\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{k}}{2}(t - \tau)\right) \\
& \equiv \exp(-\nu(t - \tau)), \tag{51}
\end{aligned}$$

ここで、 ν は小さなパラメタである。次の式を (49) に代入すると、

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t d\tau \exp\{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}')) - \nu\}(t - \tau) \\
& \approx \pi \delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))|^2 + \nu^2}, \tag{52}
\end{aligned}$$

次式を得る。

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{N} \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int_{t_0}^t d\tau \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \nabla \omega \\
& \quad \times \int d\mathbf{q}' \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}' - (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))(t - \tau))] \langle \exp(i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\xi} \\
& \quad \times \omega' \omega(\mathbf{q}', t) \\
= & -\frac{1}{N} \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \nabla \omega \\
& \quad \times \int d\mathbf{q}' \left[\pi \delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))|^2 + \nu^2} \right] \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}')) \\
& \quad \times \omega' \omega(\mathbf{q}', t). \tag{53}
\end{aligned}$$

$\mathbf{r} + \mathbf{q}''$ を \mathbf{q}' と略記し, $\mathbf{u}(\mathbf{q}')$ と $\omega(\mathbf{q}')$ を Taylor 展開する。0 次を残した式は以下となる。

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}') \approx \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \mathbf{q}'' \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{r}), \quad (54)$$

$$\omega(\mathbf{q}') = \omega(\mathbf{r} + \mathbf{q}'') \approx \omega(\mathbf{r}). \quad (55)$$

(54), (55) 式を (53) 式に代入すると, 最終的に,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{N} \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \nabla \omega \\ & \times \int d\mathbf{q}' \left[\pi \delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\mathbf{q}'))|^2 + \nu^2} \right] \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q}')) \\ & \quad \times \omega' \omega(\mathbf{q}', t) \\ = & -\frac{1}{N} \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \nabla \omega \\ & \times \int d\mathbf{q}'' \left[\pi \delta(-\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}'' \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}'' \cdot \nabla) \mathbf{u}}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{q}'' \cdot \nabla) \mathbf{u}|^2 + \nu^2} \right] \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{q}'') \\ & \quad \times \omega' \omega. \end{aligned} \quad (56)$$

が得られる。 $\mathbf{k} = -\mathbf{k}$, 及び $\mathbf{q}'' = -\mathbf{q}'$ と置換した (56) 式は符号が変わるので, 積分の結果はゼロ, すなわち, (47) 式の第 2 項はゼロとなり, 第 1 項のみが残ることがわかる。すなわち, 拡散テンソルに対する表式は, 以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \nabla \omega &= \Omega \int d\mathbf{r}' \mathbf{F}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \exp(i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot \omega' \nabla \omega \\ & \times \left[\pi \delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2 + \nu^2} \right]. \end{aligned} \quad (57)$$

同様の計算がドリフトについても, 使用する保存則を以下のように変えると遂行可能である。

$$\int d\mathbf{r} \langle \delta\omega(\mathbf{r}'', \tau) \delta\omega(\mathbf{r}, t) \rangle = 0. \quad (58)$$

以上をまとめると, 拡散テンソルとドリフトを含む結果が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma} &= -\mathbf{D} \cdot \nabla \omega + \mathbf{V} \omega \\ &= -\Omega \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^2} \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \\ & \quad \times \left[\pi \delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')) - \frac{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')|^2 + \nu^2} \right] \\ & \quad \times \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}'}{|\mathbf{k}'|^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times i\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot (\omega' \nabla \omega - \omega \nabla' \omega'), \end{aligned} \quad (59)$$

ここで, (50) 式を用いている⁵⁾。

⁵⁾この式は, [23] の Appendix B に述べられているとおり, (4) 式から直接導くことも可能である。当該論文の (171) 式参照。

5 空間平均

(59) 式は細かい振動をする効果 $\exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ を含む。すなわち、衝突項の性質を明らかにするためには、高周波成分を取り除く必要がある。よって、我々はここで、空間平均を導入する。(59) 式で与えられる拡散束 Γ の空間平均を以下のように定義する。

$$\langle \Gamma \rangle_s \equiv \Gamma_s(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\Lambda(\mathbf{r})|} \int_{\Lambda(\mathbf{r})} d\mathbf{r}'' \Gamma(\mathbf{r}''). \quad (60)$$

\mathbf{u} や ω といったマクロな変数は $\Lambda(\mathbf{r})$ の中では定数として扱えるとするので、ここで空間平均の対象となるのは、 $\exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ だけとなる。

$$\begin{aligned} & \langle \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \rangle_s \\ &= \frac{1}{(2L)^2} \int_{-L}^L dx'' \int_{-L}^L dy'' \exp(i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}'') \exp(-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}') \\ &\approx \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \exp(-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}') \\ &= \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (61)$$

ここで、 $\mathbf{r}'' = (x'', y'')$ とした。以上より、空間平均を行った拡散束は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \Gamma_s(\mathbf{r}) \\ &= -\Omega \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \int d\mathbf{r}' \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^4} \pi \delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')) \\ & \quad \times \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \frac{\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} \cdot (\omega' \nabla \omega - \omega \nabla' \omega'). \end{aligned} \quad (62)$$

最終的な衝突項には実数しか含まれないはずなので、(62) 式での虚数部は無視した。続いて、(62) 式の \mathbf{k} に関する積分を進める。被積分関数のうち、 \mathbf{k} に関する部分は以下のとおりである。

$$\int d\mathbf{k} \delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')) \frac{(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{k})(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^4}. \quad (63)$$

\mathbf{k} を平行成分と垂直成分に分離したものを (63) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= k_{\parallel} \hat{\mathbf{n}}_{\parallel} + k_{\perp} \hat{\mathbf{n}}_{\perp}, \\ \hat{\mathbf{n}}_{\parallel} &= \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}'}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|}, \\ \hat{\mathbf{n}}_{\perp} &= \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{n}}_{\parallel}, \end{aligned} \quad (64)$$

以下の式を得る。

$$\int d\mathbf{k} \delta(\mathbf{k} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}')) \frac{(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{k})(\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{k})}{|\mathbf{k}|^4}$$

$$\begin{aligned}
&= \int dk_{\parallel} \int dk_{\perp} \delta(k_{\parallel} |\mathbf{u} - \mathbf{u}'|) \\
&\quad \times \frac{[\hat{\mathbf{z}} \times (k_{\parallel} \hat{\mathbf{n}}_{\parallel} + k_{\perp} \hat{\mathbf{n}}_{\perp})][\hat{\mathbf{z}} \times (k_{\parallel} \hat{\mathbf{n}}_{\parallel} + k_{\perp} \hat{\mathbf{n}}_{\perp})]}{|k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2|^2} \\
&= \int dk_{\perp} \frac{1}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|} \frac{1}{k_{\perp}^4} (\hat{\mathbf{z}} \times k_{\perp} \hat{\mathbf{n}}_{\perp}) (\hat{\mathbf{z}} \times k_{\perp} \hat{\mathbf{n}}_{\perp}) \\
&= \int dk_{\perp} \frac{1}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|} \frac{1}{k_{\perp}^2} \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}'}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|} \frac{1}{k_{\perp}^2} \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}'}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|} \\
&= \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \frac{2}{k_{\min}} \left[-\frac{1}{k_{\perp}} \right]_{k_{\min}}^{\infty} \\
&= \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \frac{2}{k_{\min}}, \tag{65}
\end{aligned}$$

ここで、 k_{\min} は発散を避けるために導入したパラメタであり、システムサイズを超えないような最大波長から定義される量である。すなわち、 R を特徴的システムサイズとすれば、 $k_{\min} = 2\pi/R$ となる。最終的に、拡散テンソルとドリフトについて、以下の表式を得、Fokker-Planck 型の衝突項となることが確認できる。

$$\Gamma_s(\mathbf{r}) \equiv -D_s(\mathbf{r}) \cdot \nabla \omega + \mathbf{V}_s(\mathbf{r}) \omega, \tag{66}$$

$$D_s = \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{k_{\min}} \int d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \omega'}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3}, \tag{67}$$

$$\mathbf{V}_s = -\frac{\Omega}{(2\pi)^3} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{1}{k_{\min}} \int d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot \nabla' \omega'}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3}. \tag{68}$$

二つの式 (67) と (68) には二つの未知のパラメタ L と k_{\min} が残っている。そこで、 g を係数 ($g \ll 1$) として L が $L = gR$ とスケールできると考え仮に $g = 1/4\pi$ とすると、(66) 式の係数は非常に簡略化することができ、

$$\begin{aligned}
\Gamma_s(\mathbf{r}) &= -\frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \\
&\quad \cdot (\omega' \nabla \omega - \omega \nabla' \omega'). \tag{69}
\end{aligned}$$

となる。

最終的に、得られた運動論的方程式は

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = \frac{\Omega}{R} \nabla \cdot \int d\mathbf{r}' \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} (\omega' \nabla \omega - \omega \nabla' \omega'), \tag{70}$$

となる。

5.1 局所平衡と大域平衡での拡散束の振る舞い

ここで考える局所平衡とは、時間発展の過程で、系の中に温度が異なる領域が複数共存しているが、個々の小さい領域内では温度が一定とみなせるような状態である。まず始め

に、拡散束 (69) は、系が局所平衡に達した時点で、温度が一定の局所平衡領域内でゼロとなることを示す。しかし、系内には温度が異なる領域が他に存在するため、それらとの相互作用により、局所平衡状態では拡散束がトータルでゼロとなることはないことを注意しておく。

(69) 式をシンボリックな形式で書き直しておく。

$$\Gamma_s(\mathbf{r}) = -\frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r}' \gamma[\omega, \psi; \omega', \psi'], \quad (71)$$

ここで、 γ は、 ω , ψ , ω' , ψ' の関数であると考え。先ほど述べた局所平衡に系が到達したとしよう。すなわち、 β が異なる複数の部分系が存在している。各部分系では局所平衡の次の式が成り立つ。

$$\omega_{\text{leq}} = \omega_0 \exp(-\beta_{\text{leq}} \Omega \psi_{\text{leq}}). \quad (72)$$

(72) 式を、(71) 式中の γ に代入し、二つのベクトル \mathbf{r} と \mathbf{r}' が同じ部分系に属していると仮定すると、以下の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} & \gamma[\omega_{\text{leq}}, \psi_{\text{leq}}; \omega'_{\text{leq}}, \psi'_{\text{leq}}] \\ &= \frac{(\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}})}{|\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}}|^3} (\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}}) \cdot (\omega'_{\text{leq}} \nabla \omega_{\text{leq}} - \omega_{\text{leq}} \nabla' \omega'_{\text{leq}}) \\ &= -\beta_{\text{leq}} \Omega \omega_{\text{leq}} \omega'_{\text{leq}} \frac{(\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}})}{|\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}}|^3} (\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}}) \cdot (\nabla \psi_{\text{leq}} - \nabla' \psi'_{\text{leq}}) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (73)$$

ここで、関係 $\mathbf{u}_{\text{leq}} = -\hat{z} \times \nabla \psi_{\text{leq}}$ を使った。 $\mathbf{u}_{\text{leq}} - \mathbf{u}'_{\text{leq}}$ は $\nabla \psi_{\text{leq}} - \nabla' \psi'_{\text{leq}}$ に垂直なので、 γ はゼロとなる。これはすなわち、詳細釣り合いが成り立っていることを意味する。この局所平衡状態において、局所的には拡散束 $\Gamma_s(\mathbf{r})$ の効果は消えているが、系全体としての拡散束の効果は残る。そして、ゆっくりとした時間変化を続け、最終的には大域平衡に達する。

では、大域平衡に達した時の拡散束について論じよう。 β が系全体で一様となる大域平衡に系が到達すると、渦度分布は次のような式で記述可能である [32]⁶⁾。

$$\omega_{\text{eq}} = \omega_0 \exp(-\beta \Omega \psi_{\text{eq}}), \quad (74)$$

これを代入すると、

$$\begin{aligned} \nabla' \omega'_{\text{eq}} &= \omega'_{\text{eq}} \frac{\nabla' \omega'_{\text{eq}}}{\omega'_{\text{eq}}} \\ &= -\beta \Omega \omega'_{\text{eq}} (\nabla' \psi'_{\text{eq}} - \nabla \psi_{\text{eq}} + \nabla \psi_{\text{eq}}). \end{aligned} \quad (75)$$

が得られる。 $(\mathbf{u}_{\text{eq}} - \mathbf{u}'_{\text{eq}}) \cdot (\nabla' \psi'_{\text{eq}} - \nabla \psi_{\text{eq}}) = 0$ なので、(69) 式のドリフトは次のように書き換えられる。

$$\mathbf{V}_{s,\text{eq}} = -\beta \Omega \mathbf{D}_{s,\text{eq}} \cdot \nabla \psi_{\text{eq}} \quad (76)$$

⁶⁾ sinh-Poisson 方程式の解と言った方が、通りが良いかもしれない。

これは, Chavanis からも導いている, 点渦系の平衡状態で成り立つ Einstein の関係式に相当するものである [22, 30]。一方, 拡散テンソルは

$$\mathbf{D}_{s,\text{eq}} \cdot \nabla \omega_{\text{eq}} = -\beta \Omega \omega_{\text{eq}} \mathbf{D}_{s,\text{eq}} \cdot \nabla \psi_{\text{eq}}, \quad (77)$$

と書き換えられるので, 大域平衡で拡散束はゼロとなることも確かめられる。

$$\mathbf{\Gamma}_{s,\text{eq}}(\mathbf{r}) \equiv -\mathbf{D}_{s,\text{eq}} \cdot \nabla \omega_{\text{eq}} + \mathbf{V}_{s,\text{eq}} \omega_{\text{eq}} = 0 \quad (78)$$

5.2 エネルギー保存則

$$\begin{aligned} E &\equiv \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \psi \omega \\ &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \omega' \omega. \end{aligned} \quad (79)$$

と定義される平均場エネルギーの時間微分は, 次のとおりである⁷⁾。

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(\frac{\partial \omega'}{\partial t} \omega + \omega' \frac{\partial \omega}{\partial t} \right) \\ &= \int d\mathbf{r} \psi \frac{\partial \omega}{\partial t}, \end{aligned} \quad (81)$$

(81) 式に, 空間平均を行った運動方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \omega) = -\nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_s \quad (82)$$

を代入すると, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int d\mathbf{r} \psi (-\nabla \cdot (\mathbf{u} \omega) - \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_s) \\ &= \int d\mathbf{r} \nabla \psi \cdot \mathbf{u} \omega + \int d\mathbf{r} \nabla \psi \cdot \mathbf{\Gamma}_s \\ &= \int d\mathbf{r} \nabla \psi \cdot \mathbf{\Gamma}_s \\ &= -\frac{\Omega}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \nabla \psi \cdot \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \cdot (\omega' \nabla \omega - \omega \nabla' \omega'). \end{aligned} \quad (83)$$

⁷⁾言わずもがなであるが, ここで定義している平均場エネルギーは, いわゆる点渦系のエネルギー

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \sum_i \sum_{j \neq i} \Omega_i \Omega_j \ln |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|. \quad (80)$$

とは異なるので, 注意して欲しい。

(83) 式の被積分関数に現れる \mathbf{r} と \mathbf{r}' を交換した式と (83) 式を半分ずつ加算すると、結果は次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= -\frac{\Omega}{2R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' (\nabla\psi - \nabla'\psi') \cdot \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}'}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \\ &\quad \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot (\omega'\nabla\omega - \omega\nabla'\omega') \\ &= 0.\end{aligned}\tag{84}$$

すなわち、衝突項は平均場エネルギーを保存することが確かめられる。

5.3 H 定理

エントロピー関数 S を H 関数を用いて定義する。

$$S = -k_B H,\tag{85}$$

$$\begin{aligned}H &= \int d\mathbf{r} \frac{\omega}{\Omega} \ln \frac{\omega}{\Omega} + \text{const.} \\ &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \omega \ln \omega - N \ln \Omega + \text{const.}\end{aligned}\tag{86}$$

H 定理の話をするにあたり、 H 関数を用いた方が話の座りがよいので、 H 関数を使って話を進める。 H 関数の時間微分は、次のようになる。

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \frac{\partial\omega}{\partial t} (\ln \omega + 1) \\ &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} (-\nabla \cdot (\mathbf{u}\omega) - \nabla \cdot \Gamma_s) (\ln \omega + 1) \\ &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \mathbf{u}\omega \cdot \nabla \ln \omega + \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \Gamma_s \cdot \nabla \ln \omega \\ &= -\frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{u})\omega + \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \Gamma_s \cdot \nabla \ln \omega \\ &= \frac{1}{\Omega} \int d\mathbf{r} \Gamma_s \cdot \nabla \ln \omega.\end{aligned}\tag{87}$$

(69) 式を (87) 式に代入すると、次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= -\frac{1}{R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{\nabla\omega}{\omega} \cdot \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \\ &\quad \cdot (\omega'\nabla\omega - \omega\nabla'\omega').\end{aligned}\tag{88}$$

ここでも、(88) 式の被積分関数に表れる \mathbf{r} と \mathbf{r}' を交換した式と (88) 式を半分ずつ加算すると、

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= -\frac{1}{2R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{1}{\omega\omega'} (\omega'\nabla\omega - \omega\nabla'\omega') \cdot \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}'}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \\ &\quad \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot (\omega'\nabla\omega - \omega\nabla'\omega') \\ &= -\frac{1}{2R} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{1}{\omega\omega'} \frac{|(\mathbf{u} - \mathbf{u}') \cdot (\omega'\nabla\omega - \omega\nabla'\omega')|^2}{|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3} \\ &\leq 0.\end{aligned}\tag{89}$$

のようになる。(89)式の被積分関数は正、又はゼロであることが言えるので、 $dH/dt \leq 0$ となる。以上より、(85)式のエントロピー関数は単調増加関数となり、 H 定理が証明できた。

6 結果の検討

我々は、点渦系に対する運動論的方程式(70)を導いた。この運動論的方程式の右辺に現れる衝突項は、

- Fokker-Planck 型をしている
- 非局所的な長距離相関を含む
- 平均場エネルギーを保存する
- 局所平衡に達した各部分系内で独立に衝突項はゼロとなるが部分系同士の相互作用が残るため、全体としては衝突項はゼロとはならない。この状態で系は効果が小さな衝突項に駆動されつつ、大域平衡を目指す
- 系が大域平衡に達した時点で、系全体で衝突項はゼロとなる

ことがわかった。

得られた拡散束(69)の次数は $O(\epsilon)$ である。一方、簡単なオーダーリングにより、当該項は $1/N$ に比例していることがわかる。すなわち、最初に導入した展開パラメタ ϵ は、 $O(1/N)$ の量であることがわかる。

今回導いた運動論的方程式(70)は、Chavanisが導いた運動論的方程式(6)と、エネルギー保存を実現する構造が異なる。我々の結果ではテンソル $(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')/|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3$ がエネルギー保存則を保証するのに対して、Chavanisの結果では共鳴条件であるデルタ関数 $\delta(\mathbf{x} \cdot \mathbf{w})$ がエネルギー保存則を保証すると共に、 $\mathbf{x}_\perp \otimes \mathbf{x}_\perp/x^2$ が角運動量保存則をもたらす。つまり、この二つの運動論的方程式を一つにまとめるのは不可能で、そもそも異なる適用領域に対して独立に導かれた結果だと考えるべきだろう。(6)式は平均流が強い場合に適用可能で、軸対称流の場合には $N \rightarrow +\infty$ の下で $1/N$ の精度で正しく導出可能である。一方、今回の(70)式は平均流が弱い場合に有効である。これは、今回の結果について、 N に適切な範囲があることを示唆する。その結果として、揺らぎが大きな働きをする、というわけである。 N の適切なレンジについては、Appendix Aを参照してほしい。しかし、 $N \rightarrow +\infty$ という熱力学的極限がとれないモデルであることは再度指摘しておきたい。以下、いくつかの点について、今回のモデルの検討結果を示す。

1. 最後の結果(67)と(68)は二つの未知のパラメタ k_{\min} と L を含んでいる。これらパラメタによりモデルに持ちこまれるカットオフは、 N が有限範囲の値しかとれないことに由来している可能性が高い。すなわち、 N は大きくなくてはいけないが、無限大になることもできない。

2. D に対する積分 (67) と, V に対する積分 (68) は個別には発散する。ただし, 両者を組み合わせた式全体 $\Gamma_s = -D_s(\mathbf{r}) \cdot \nabla \omega + V_s(\mathbf{r}) \omega$ では発散は抑えられているので, システム全体としての時間発展を考える場合には問題となることはないだろう。
3. (6) 式の結果と違い, (70) 式の結果は, 境界無しの場合でも, 円形境界がある場合でも, 角運動量を保存しない。この結果は, 軸対称の平均流であってもその効果は弱く, 平均流の対称性が運動に反映されないためなのではないかと考えている。
4. $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$ の下で, $\mathbf{u}(\mathbf{r}') \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{r})$ なる極限をとると, 拡散束の大きさは大きくなる。これは物理的に問題となる可能性がある。なぜならば, 離れた2地点にある点渦がたまたま同じ速度をもっていた場合に, それらが拡散束へ大きな影響を及ぼす可能性が残るからである。普通は, 離れた点渦同士が強い影響を及ぼすことは考えにくく, これが原因で, 上記1, 2のような発散が生まれている可能性がある。しかし, 最も重要なことは, 5章で述べたとおり, テンソル $(\mathbf{u} - \mathbf{u}')(\mathbf{u} - \mathbf{u}')$ によって平均場のエネルギー保存や, その他多くの物理的に良いと考えられる性質が実現されている, ということだろう。前述したとおり, (6) 式ではデルタ関数によってエネルギー保存が達成されるのと対照的である。テンソルの係数 $\chi = 1/|\mathbf{u} - \mathbf{u}'|^3$ を詳細に検討することにより, 拡散束の望ましい性質を残したまま, 発散の問題やその他の物理的に望ましくない性質を取り除くことができるかもしれない。これは将来の課題としたい。

上記に述べたような問題が本モデルにはまだ残っているが, (70) 式は直接数値計算に適用可能な単純な形をしているため, 今後, L, k_{\min} の妥当性や発散性の問題がどのように拡散束に影響してくるのか, 具体的な検証を進めて行きたいと考えている。

謝辞

本研究は, 科研費 (課題番号: 24540400) の下に実施された。

A 直線軌道近似の妥当性

直線軌道近似の妥当性について議論をする。二つの特徴的時間スケールを用いる。一つは Brown 運動に関連した時間スケールで, τ_B と表す。もう一つはマクロな (大域的な) 流れに関連した時間スケールで, τ_F と表す。これら二つの時間スケールを用い, 直線軌道近似が有効であると考えられる条件を導く。

1 辺の長さが $2L$ の小さな領域を考える。この領域は, 5章の空間平均で導入されたものと同一である。この領域は, マクロな流れに沿って移動する。また, 領域内部では, Brown 運動により点渦は揺動運動をしている。短い時間スケールでは, 点渦はマクロな流れに沿って流されるが, ある特定の領域内に留まると期待できる。しかし, たとえば, ある

時間 τ_B よりも長い間の運動になると、当初属した小領域からはみ出してしまい、点渦の軌跡はマクロな流れから逸脱する。これがすなわち、直線軌道近似の限界であると考えられる。Brown 運動に関する時間スケール τ_B は、確率過程 (51) 式から見積もることが可能である。すなわち、

$$D\tau_B = (2L)^2. \quad (90)$$

τ_B よりも短い時間スケールにおいて、いわゆる流体近似が有効となる。

一方、直線軌道近似が有効であることは、すなわち、マクロな流線が直線とみなせるということを意味する。ここで、マクロな流れは、曲率半径 R_0 の円軌道を描いていると仮定する。長さスケールが $2L$ よりも長くなると、小領域内の Brown 運動は見えなくなるので、マクロな流れに関する特徴的時間 τ_F は、一様な周回速度 u による 1 回転時間

$$u\tau_F = 2\pi R_0 \quad (91)$$

と見積もって問題無いだろう。我々のモデルでは、マクロな流れの軌道は短い時間スケール内の短い軌道をつないだもので表現可能で、各々の短い軌道は直線と見なして構わない、という仮定を導入した。そして、各々の短い軌道が直線と見なせる時間スケールは τ_B より短い。

(52) 式に記されているような積分の近似が可能となるためには、 $\nu(t-t_0)$ は 1 より小さくなくてはならない。

$$\frac{1}{\nu} < t - t_0. \quad (92)$$

定義より、 $1/\nu$ の大きさは

$$\frac{1}{\nu} = \frac{2}{k^2 D} = \frac{2}{D} \frac{(2L)^2}{(2\pi)^2} = \frac{2}{(2\pi)^2} \tau_B, \quad (93)$$

と見積もられる。ここで、関係式

$$k = \frac{2\pi}{2L}. \quad (94)$$

を用いた。(69) 式より、 D の大きさは

$$\begin{aligned} D &\approx \frac{\Omega}{R} \frac{1}{u} (\Omega N) \\ &= \frac{(N\Omega)^2}{NRu}, \end{aligned} \quad (95)$$

と見積もれる。ここで、 R は系の大きさを表す ($R > R_0$)。すると、不等式 $\tau_B < \tau_F$ は、

$$(2L)^2 \frac{NRu}{(N\Omega)^2} < \frac{2\pi R_0}{u} \quad (96)$$

または

$$N < \frac{2\pi}{2} \frac{(N\Omega)^2}{L^2} \frac{1}{u^2} \frac{R_0}{R}. \quad (97)$$

の様に書き換えられる。円形流れの平均速度は,

$$u = R_0\omega \quad (98)$$

と近似し, 系の全循環の保存則から

$$\pi R^2\omega = N\Omega. \quad (99)$$

が得られる。三つの式(97), (98), (99)を組み合わせると, 最終的に直線軌道近似が有効である条件式

$$\begin{aligned} N &\ll \frac{2\pi R_0 (N\Omega)^2 (\pi R^2)^2}{R (2L)^2 (R_0 N\Omega)^2} \\ &\approx 16\pi^5 \approx 5 \times 10^3. \end{aligned} \quad (100)$$

が得られる。具体的な評価に際し, 円形流れの曲率半径は系の大きさの半分程度 $R_0 = R/2$, および5章で導入した値 $L = R/4\pi$ を用いた。運動論的方程式の導出にあたり $1/N$ の展開を使用しているため N は大きくなくてはならない。しかし, 上記の評価結果が示す通り, N には, 直線軌道近似が成り立つための上限が存在することがわかる。

参 考 文 献

- [1] P. K. Newton: *The N-Vortex Problem* (Springer-Verlag, Berlin, 2001) Chap. 1-3.
- [2] R. H. Kraichnan and D. Montgomery: *Rep. Prog. Phys.* **43** (1980) 547.
- [3] P. Tabeling: *Phys. Rep.* **362** (2002) 1.
- [4] L. Onsager: *Nuovo Cimento Suppl.* **6** (1949) 279.
- [5] G. L. Eyink and K. R. Sreenivasan: *Rev. Mod. Phys.* **78** (2006) 87.
- [6] D. Montgomery and G. Joyce: *Phys. Fluids* **17** (1974) 1139.
- [7] S. Kida: *J. Phys. Soc. Jpn.* **39** (1975) 1395.
- [8] R. H. Kraichnan: *J. Fluid Mech.* **67** (1975) 155.
- [9] C. E. Seyler, Jr.: *Phys. Fluids* **19** (1976) 1336.
- [10] Y. B. Pointin and T. S. Lundgren: *Phys. Fluids* **19** (1976) 1459.
- [11] T. S. Lundgren and Y. B. Pointin: *J. Stat. Phys.* **17** (1977) 323.
- [12] A. C. Ting, H. H. Chen and Y. C. Lee: *Physica* **26D** (1987) 37.
- [13] R. Robert and J. Sommeria: *J. Fluid Mech.* **229** (1991) 291.
- [14] G. L. Eyink and H. Spohn: *J. Stat. Phys.* **70** (1993) 833.
- [15] O. Bühler: *Phys. Fluids* **14** (2002) 2139.

- [16] Y. Yatsuyanagi, Y. Kiwamoto, H. Tomita, M. M. Sano, T. Yoshida and T. Ebisuzaki: Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 054502.
- [17] P. Chavanis: *Dynamics and thermodynamics of systems with long range interactions*, eds. T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo and M. Wilkens (Springer-Verlag, Berlin, 2002).
- [18] W. H. Matthaeus, W. T. Stribling, D. Martinez, S. Oughton and D. Montgomery: Physica D **51** (1991) 531.
- [19] D. Montgomery, X. Shan and W. H. Matthaeus: Phys. Fluids **A4** (1992) 3.
- [20] S. Li and D. Montgomery: Phys. Lett. A **218** (1996) 281.
- [21] C. Marchioro and M. Pulvirenti: *Mathematical Theory of Incompressible Nonviscous Fluids* (Springer, New-York, 1994).
- [22] P. H. Chavanis: Phys. Rev. E **64** (2001) 026309.
- [23] P. H. Chavanis: Physica A **387** (2008) 1123.
- [24] D. H. E. Dubin and T. M. O'Neil: Phys. Rev. Lett. **60** (1988) 1286.
- [25] D. H. E. Dubin: Phys. Plasmas **10** (2003) 1338.
- [26] P. H. Chavanis: J. Stat. Mech. **2012** (2012) P02019.
- [27] P. H. Chavanis: Physica A **391** (2012) 3657.
- [28] P. H. Chavanis and M. Lemou: Eur. Phys. J. B **59** (2007) 217.
- [29] R. Kawahara and H. Nakanishi: J. Phys. Soc. Japan **76** (2007) 074001.
- [30] P. H. Chavanis: Phys. Rev. E **58** (1998) R1199.
- [31] Y. L. Klimontovich: *The statistical theory of non-equilibrium processes in a plasma* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1967).
- [32] G. Joyce and D. Montgomery: J. Plasma Phys. **10** (1973) 107.