

## 回転球面上の 2 次元 Navier-Stokes 方程式における帯状流の分岐

佐々木 英一 (阪大院・基礎工)\*, 竹広 真一 (京大・数理研), 山田 道夫 (京大・数理研)

### 概要

回転球面上の 2 次元 Navier-Stokes 流は, 惑星大気の帯状流と関連し, また境界のない有界閉領域の流れの一例として多くの興味をもたれてきた. 特に, 球面調和関数で表わされる Rossby 波と呼ばれる基本解は 1970 年代に非粘性流の線形安定性が調べられた. ここでは非回転・回転球面上の粘性帯状流の分岐構造を議論する.

### 1 はじめに

地球や木星など惑星大気には帯状流と呼ばれる, 緯度によって流れの向きが東西に交互に変わる複数本の強いジェット流が存在する. 回転球面上の 2 次元 Navier-Stokes 方程式は, 惑星大気の最も単純なモデルの一つである. 惑星大気は高 Reynolds 数の乱流状態であるため, 回転球面上の 2 次元 Navier-Stokes 乱流の性質が調べられてきた. まず回転効果がない場合, 2 次元乱流は小さいスケールから大きいスケールへのエネルギー輸送がおき, 乱流はコヒーレントな渦を形成する [7]. 2 次元乱流に対する回転効果を初めて調べたのは Rhines [12] である. 彼は回転球面の接平面近似である  $\beta$  平面における強制乱流を数値的に調べ, 2 次元乱流が帯状流を形成することを報告した. 彼は, 今日 Rhines 波数と呼ばれる回転効果と非線形効果が同じオーダーとなるスケールで, 大きなスケールへのエネルギー輸送が回転効果によって止まり, 帯状流が形成されると説明した. Williams [17] は回転球面上の 2 次元乱流を初めて調べ, 回転球面上 2 次元乱流が木星に似た帯状流を形成することを報告した. しかし, 彼が調べた流れ場は経度方向に対する 8 回対称性と赤道対称性を課したものであった. その後, 流れ場に対称性を課さない全球面上の 2 次元乱流を初めて調べたのは Yoden & Yamada [18] である. 彼らは回転球面上の 2 次元自由減衰乱流を数値的に調べ, 極域に西向きの強いジェット流が発現することを報告した. 近年, Obuse et al. [9] は回転球面上の 2 次元強制乱流の漸近状態を調べ, 回転球面上の 2 次元乱流は最終的に 2 本もしくは 3 本のジェットの安定な帯状流となることを報告した.

次に帯状流の安定性を議論する. まず, 変曲点定理より回転角速度が十分大きくなると非粘性帯状流は線形安定となる [6]. Baines [1] は球面調和関数で表される非粘性帯状流・非粘性 Rossby 波の線形安定性を数値的に調べた. Baines は, 回転角速度の大きさを増加させ, 非粘性帯状流が線形不安定から安定に切り替わる臨界回転角速度を数値的に求めた. しかし, Baines の計算方法では臨界層と呼ばれる特異性の発現によって固有値が正しく求められないため, 臨界回転角速度は誤差を含むものであった. そこで, 我々は臨界層と北極・南極の特異性を考慮した shooting 法によって Baines [1] が求めた臨界回転角速度を最大約 20% 修正した [13]. また粘性帯状流について, 我々は非粘性の場合と同じく流れ関数が単一の球面調和関数で表される粘性帯状流の線形安定性を数値的に調べた [14]. 回転効果は粘性帯状流を安定化させ, 回転角速度が増加するにつれて臨界 Reynolds 数は急激に増加する. 特に, 高 Reynolds 数における粘性帯状流が不安定となる回転角速度領域が非粘性帯状流が線形不安定となる回転角速度領域より大きいことを見出した. これは非粘性極限と非粘性における帯状流の安定性特性の不一致を示唆する. この見かけ上の矛盾は, Reynolds 数が増加するにつれて, 粘性帯状流は不安定だが非粘性帯状流は安定となる回転角速度領域で, 不安定擾乱の増幅率が 0 に収束することで解消される.

本論文では我々が調べた粘性帯状流 [14] が線形不安定となった後の非線形解の分岐構造を調べる. この問題

\* mail:esasaki@me.es.osaka-u.ac.jp

設定は Kolmogorov 問題を球面に拡張した問題設定であるため, Kolmogorov 問題について簡潔に紹介する. Kolmogorov 問題は  $\sin$  型の強制外力によって駆動される平面トーラス上の流れに関する問題で, 層流から乱流への遷移過程の典型例と考えられてきた. Iudovich[4] は 2 本ジェット の平行流が任意の Reynolds 数で大域的に漸近安定であることを示し, Meshalkin & Sinai[8] は平行流の臨界モードが定常である (Hopf モードでない) ことを示した. さらに, Iudovich[4] は臨界 Reynolds 数から定常解が分岐することを示した. Okamoto & Shōji[10] は平面トーラスの様々なアスペクト比における 2 本ジェット の平行流の分岐構造を調べた. 彼らは 2 本ジェット の平行流から pitchfork 分岐がおきること, アスペクト比によって saddle-node 分岐, Hopf 分岐, 第二分岐を含む様々な種類の分岐がおきることを報告した. Kim & Okamoto[5] は, 非線形解の流れ場のパターンに注目し, 2, 4, 6 本のジェット の平行流の分岐構造を調べ, 高 Reynolds 数で正と負一対の渦からなる定常解を見つけた. 彼らは正と負の一対の渦の解を unimodal 解と呼称し, 平行流のジェットの本数によらず高 Reynolds 数で unimodal 解が少なくともひとつは存在するだろうと予想した. unimodal 解は高 Reynolds 数で分岐直後にはない対称性を回復することを指摘しておく. Kolmogorov 問題についてその問題設定の単純さから多くの研究が行われており, 例えば乱流遷移 [11], カオス解の軌道不安定性 [3], 乱流アトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道 [2] などが調べられている.

本論文は以下のように構成される. 2 章では扱う支配方程式について述べる. 3 章では非回転・回転系における分岐構造を示し, 流れ場の対称性について議論する. 4 章はまとめである.

## 2 支配方程式, 数値計算法

我々の扱う支配方程式は回転球面上の 2 次元非圧縮粘性流の運動を記述する無次元化された渦度方程式で,

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + J(\psi, \Delta \psi) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{1}{R} \{(\Delta + 2) \Delta \psi + (l(l+1) - 2) Y_l^0(\mu)\}, \quad (1)$$

で表される. ここで  $t$  は時間,  $\lambda, \mu$  は経度と  $\sin$  緯度 ( $\mu = \sin \phi, \phi$  は緯度) を表す.  $\psi$  は流れ関数で渦度は  $\zeta = \Delta \psi$  と表され,  $\Delta$  は単位球面上の水平ラプラシアンである. 速度の経度成分, 緯度成分 ( $u_\lambda, u_\mu$ ) はそれぞれ  $u_\lambda = -\sqrt{1-\mu^2}(\partial \psi / \partial \mu)$ ,  $u_\mu = 1/\sqrt{1-\mu^2}(\partial \psi / \partial \lambda)$  で与えられる.  $R, \Omega$  はそれぞれ Reynolds 数と無次元化された球の回転角速度,  $J(A, B) = (\partial A / \partial \lambda)(\partial B / \partial \mu) - (\partial A / \partial \mu)(\partial B / \partial \lambda)$  はヤコビアンであり,  $(l(l+1) - 2)Y_l^0(\mu)/R$  は渦度強制である. ここで  $Y_l^m(\lambda, \mu)$  は  $4\pi$  に正規化された全波数  $l$ , 経度方向波数  $m$  の球面調和関数である. 粘性項の  $2\Delta \psi / R$  は 3 次元デカルト座標における粘性項を 2 次元球面座標に変換する際に自然に導出される項で, この項により系の全角運動量は保存される.[16].

渦度方程式 (1) は任意の Reynolds 数, 回転角速度で  $l$  本ジェット の帯状流

$$\psi_0(\mu) = -\frac{1}{l(l+1)} Y_l^0(\mu), \quad \zeta_0(\mu) = Y_l^0(\mu), \quad (2)$$

を解にもつ. ここでジェットの本数は経度方向の速度の極値の数によって定義される. 我々の問題設定は Kolmogorov 問題を球面へ拡張した問題であることを指摘しておく. Kolmogorov 問題は平面トーラス上で定式化され, 単一の  $\sin$  関数で表される渦度強制によって駆動される 2 次元 Navier-Stokes 流を扱い, 流れ関数が単一の  $\sin$  関数によって表される平行流を解に持つ. 球面調和関数は水平ラプラシアンの固有関数であり,  $\sin$  関数は平面トーラス上のラプラシアンの固有関数である. よって我々の問題設定と Kolmogorov 問題は, 渦度強制と自明解が各々の多様体上のラプラシアンの固有関数で表現されるという点で共通している.

## 3 分岐構造

最も簡単な 1 本ジェット の帯状流  $Y_1^0(\mu)$  は系の並進運動に対応し安定である. 次に 2 本のジェット からなる帯状流  $Y_2^0(\mu)$  は, 任意の Reynolds 数  $R$  と回転角速度  $\Omega$  に対し大域的に漸近安定であることを証明した [15]. 2 次元トーラスの場合でも 2 本ジェット の平行流は大域安定である [4]. 従って, 2 本のジェット 解が安定であることは領域の幾何学的な違いによらず共通した性質である.

3本のジェットからなる帯状流  $Y_3^0(\mu)$  は不安定となりうる最も単純な帯状流である。以後3本ジェットの帯状流を自明解と呼び、本論文では、ある  $\Omega$  において  $R$  を増加させたときの自明解から起きる分岐を調べる。線形安定性を調べたパラメータ範囲は回転角速度  $-6.0 \leq \Omega \leq 2.2$ , Reynolds 数  $1 \leq R \leq 10^4$  である。自明解の流れ関数と速度の経度成分を Fig.1 に示す。

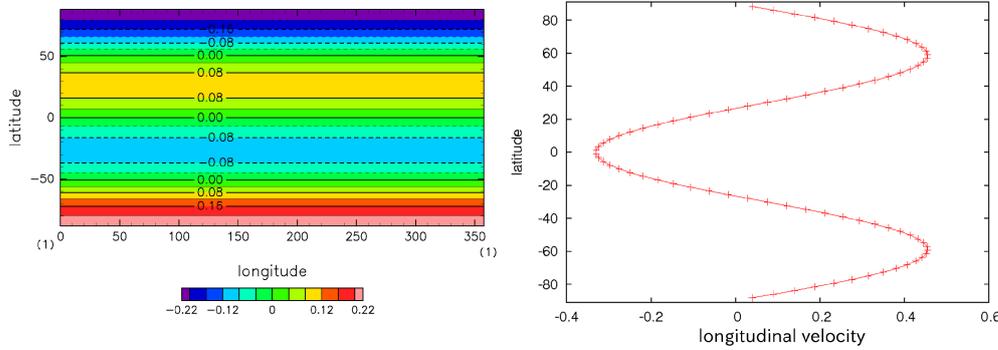


Fig.1 The 3-jet zonal flow. The left and right figures show the streamfunction and the longitudinal velocity, respectively. In the left figure, the horizontal and vertical axes indicate the longitude and the latitude, respectively, while in right figure, the horizontal and vertical axes indicate the longitudinal velocity and the latitude, respectively.

問題を数値的に解くためにスペクトル法を用いた。流れ関数は球面調和関数を用いて

$$\psi(\lambda, \mu, t) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \psi_n^m(t) Y_n^m(\lambda, \mu),$$

と展開される。ここで  $\psi_n^m(t)$  は展開係数で、 $N$  は切断波数である。方程式の非線形項は変換法を用いて計算し、経度方向の格子点数  $I$  と緯度方向の格子点数  $J$  を  $I \geq 3N + 1, J > 3N/2$  としてエイリアジング誤差を除いた。切断波数を  $N = 170$  まで変化させ、数計算精度を確かめた。非線形解の探索には Newton 法を用いる。反復法の終了条件は  $1 < R \leq 10^3$  の場合は修正量の  $L^\infty$  ノルムが  $10^{-8}$  未満となること、一方、 $10^3 < R \leq 10^6$  の場合は修正量の  $L^\infty$  ノルムが  $10^{-12}$  未満となることとした。

### 3.1 非回転系における分岐構造

図 2 に非回転系の場合の定常解の分岐ダイアグラムを示す。Reynolds 数が増加すると共に、自明解は  $R = 26.13$  で Hopf 不安定となり、定常進行波 TW1 ( $m = 2$ ) が分岐する。さらに、TW1 を追跡すると、 $R = 70.66, 203.8$  で pitchfork 分岐点を見つけた。  $R = 70.66$  で TW1 は線形不安定となり、TW2-N, TW2-S が pitchfork 分岐する。TW2-N は北半球の中緯度に負の渦が存在する解であり、TW2-S は TW2-N の赤道反対称な解である。Reynolds 数が増加すると TW2 は  $R = 103.2$  で Hopf 不安定となる。TW1 は、Reynolds 数がさらに増加すると、 $R = 203.8$  で線形安定性を取り戻す。この Reynolds 数で TW3-N, TW3-S が pitchfork 分岐する。TW3-N, TW3-S は  $203.8 \leq R \leq 10^4$  で Hopf 不安定であることを確認した。なお TW1 は  $R = 249.4$  で再び Hopf 不安定となる。TW3 から  $R = 2687$  で TW6-N, TW6-S が pitchfork 分岐する。図 2 において TW6-N(TW6-S) が TW3-N(TW3-S) から分岐する枝が一つしかない。これは TW6-N(TW6-S) のそれぞれの pitchfork 分岐解が経度方向の並進対称性により同一の解となるためである。TW6-N, TW6-S は  $2687 \leq R \leq 10^4$  で Hopf 不安定であることを確認した。

自明解について、 $R = 62.51$  で TW4 ( $m = 1$ ) が Hopf 分岐する。この解は  $62.5 \leq R \leq 10^4$  で Hopf 不安定であることを確認した。TW4 からは  $R = 136.2$  で TW5-N, TW5-S が pitchfork 分岐する。この解は区間  $143.5 \leq R \leq 161.9$  を除いて Hopf 不安定である。この区間の両端からは時間周期解が分岐すると考えられる。

全ての第二、第三分岐は pitchfork 分岐であり、 $R = 249.4$  で全ての定常解は Hopf 不安定となる。

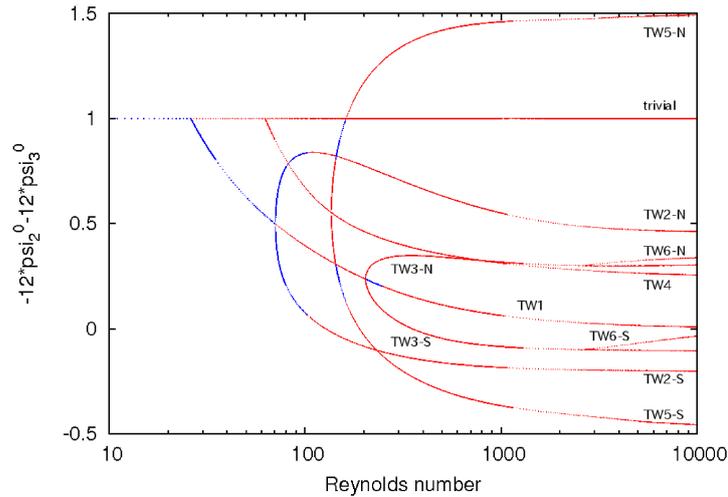


Fig.2 Bifurcation diagram in the non-rotating case. The blue asterisks and red crosses indicate linearly stable/unstable, respectively. The horizontal and vertical axes indicate the Reynolds number and  $-12\psi_2^0 - 12\psi_3^0$ , respectively. Notice that the horizontal axis is log-scale to describe all the bifurcation points.

### 3.2 回転系における分岐構造

図3に  $\Omega - R$  平面における自明解と定常進行波の線形安定領域を示す。図中の白色の領域は定常解が Hopf 不安定な領域である。回転角速度の大きさが十分大きくなると非線形解の臨界 Reynolds 数は単調増加することから、回転効果は定常進行波を安定化させる。

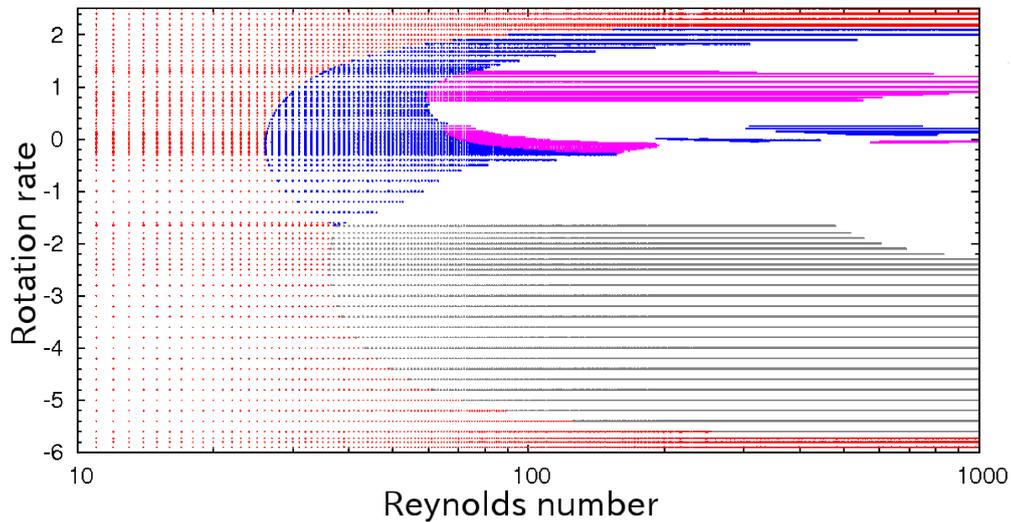


Fig.3 Stable regions of the nonlinear solutions. The horizontal and vertical axes indicate the Reynolds number and the rotation rate, respectively. The red crosses, the blue asterisks, the purple squares and the gray triangles indicate stable points of the trivial solution, TW1, TW2-N (-S) and TW4, respectively. The white regions indicate Hopf unstable.

図4に  $\Omega = -1.0$  の場合の分岐ダイアグラムを示す。Reynolds 数が増加すると、 $R = 28.94$  で自明解が Hopf 不安定となり、TW1 が分岐する。TW1 は  $R = 58.29$  で Hopf 不安定となる。さらに、自明解からは  $R = 41.57$  で TW4 が Hopf 分岐する。TW4 を追跡すると  $R = 540.05, 475.33$  で saddle-node 分岐点を見つけ、第二 saddle-node 分岐点 ( $R = 475.33$ ) で TW4 は線形安定となる。TW4 のブランチ上で3つの

pitchfork 分岐点  $R = 95.72, 274.5, 542.4$  を見つけた. 第一 pitchfork 分岐点 ( $R = 95.72$ ) から分岐する解は第二 pitchfork 分岐点 ( $R = 274.5$ ) に繋がる. すなわちこれら pitchfork 分岐は閉曲線をなす. 第三 pitchfork 分岐点 ( $R = 542.4$ ) で TW4 は線形不安定となり, TW5-N, TW5-S が pitchfork 分岐する. TW5 は  $R = 614.4$  で Hopf 不安定となる.

図 5 に  $\Omega = 1.0$  における分岐ダイアグラムを示す. Reynolds 数が増加すると, 自明解は  $R = 31.00$  で Hopf 不安定となり, TW1 が分岐する. さらに Reynolds 数が増加すると TW1 は  $R = 61.11$  で線形不安定となり, TW2-N, TW2-S が pitchfork 分岐する. TW2 は区間  $61.11 \leq R \leq 10^4$  で線形安定であった. また自明解から分岐する他の定常解は見つからなかった.

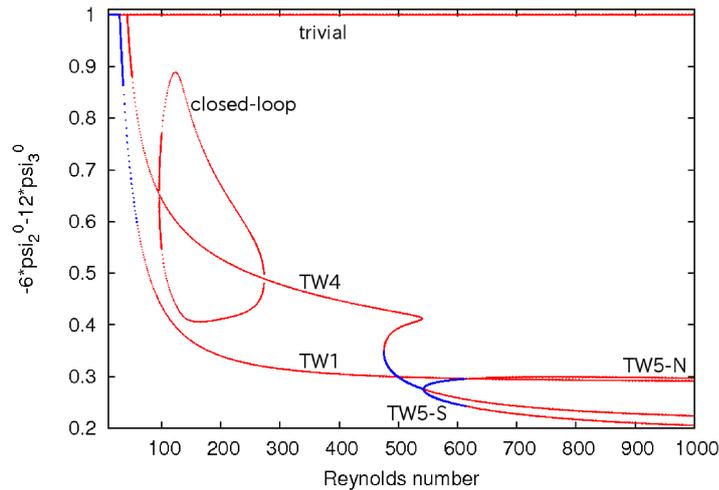


Fig.4 Same as figure 2 but for the case of  $\Omega = -1.0$ . The vertical axis indicates  $-6\psi_2^0 - 12\psi_3^0$ .

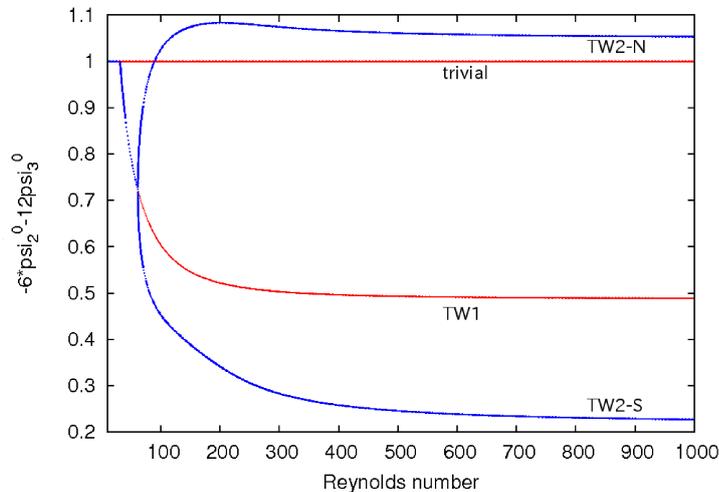


Fig.5 Same as figure 2, but for the case of  $\Omega = 1.0$ . The vertical axis indicates  $-6\psi_2^0 - 12\psi_3^0$ .

### 3.3 高 Reynolds 数における分岐解の流れ関数

図 6 に  $\Omega = 0.0, 0.5, 1.0$  における TW1 の流れ関数を示す. 分岐直後の TW1 の流れ場は中緯度の 4 つの正と負の渦と極域の渦から構成される.  $\Omega = 0.0$  の場合, Reynolds 数が増加するにつれて極域の渦が小さくなり, 中緯度の渦が南北に広がる.  $R = 10^6$  で TW1 の流れ関数は赤道対称性を回復する. 一方, 元の自明解は赤道反対称な解であるため, 非回転系の場合の TW1 は Reynolds 数が増加するにつれて自明解にはない対称性

を回復する. 一方  $\Omega = 0.5, 1.0$  の場合, 非回転系の場合とは異なり, 中緯度の渦は赤道に対し対称にはならず, Reynolds 数が増加しても極域の渦は残る. また  $R \geq 10^4$  では流れ場のパターンはほとんど変化しなかった.  $\Omega = -0.5, -1.0$  の場合でも流れ場は対称性を回復しなかった.

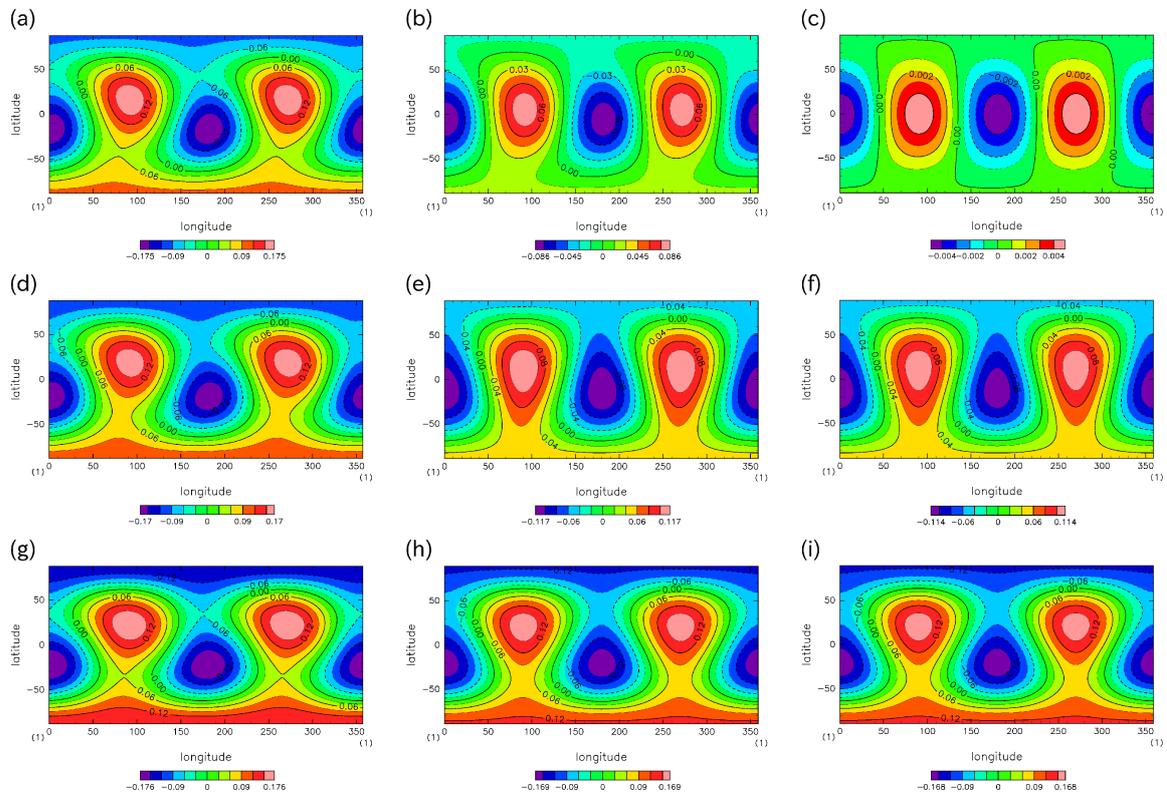


Fig.6 Streamfunctions of TW1: (a)  $\Omega = 0.0, R = 10^2$ , (b)  $\Omega = 0.0, R = 10^3$ , (c)  $\Omega = 0.0, R = 10^6$ , (d)  $\Omega = 0.5, R = 10^2$ , (e)  $\Omega = 0.5, R = 10^3$ , (f)  $\Omega = 0.5, R = 10^6$ , (g)  $\Omega = 1.0, R = 10^2$ , (h)  $\Omega = 1.0, R = 10^3$ , and (i)  $\Omega = 1.0, R = 10^6$ , respectively. The horizontal and vertical axes indicate longitude and latitude, respectively.

## 4 まとめ

本論文は回転球面上の3本のジェットからなる帯状流  $Y_3^0(\mu)$  からの分岐を数値的に求めた. 3本ジェット  
の帯状流からは定常進行波が分岐する. 非回転系の場合, いくつかの pitchfork 分岐を経て, 定常解はいずれ  
Hopf 不安定となる. 一方, 回転系の場合, saddle-node 分岐や分岐の閉曲線, 高 Reynolds 数で線形安定な解を  
見つけた. この結果から回転効果によって分岐構造が大きく変化する.

流れ場のパターンについて, 非回転系の場合, 高 Reynolds 数になると元の帯状流にない対称性を回復する.  
高 Reynolds 数における流れ場の対称性の回復は2次元トーラスの場合と共通した性質である [5]. なお, 回転  
系では高 Reynolds 数における流れ場の顕著な対称性の回復は見られなかった.

最後に, 以上の結果を含めた論文を現在投稿準備中であることを追記しておく [15].

## 参考文献

- [1] BAINES, P. G. 1976 The stability of planetary waves on a sphere. *J. Fluid Mech.*, **73-2**, 193–213.
- [2] CHANDLER G. J. & KERSWELL R. R. 2013 Invariant recurrent solutions embedded in a turbulent two-dimensional Kolmogorov flow. *J. Fluid Mech.*, **722**, 554–595.

- [3] INUBUSHI, M., KOBAYASHI, M. U., TAKEHIRO, S. & YAMADA, M., 2012 Covariant Lyapunov analysis of chaotic Kolmogorov flows. *Phys. Rev. E*, **85**, 016331.
- [4] IUDOVISCH, V. I., 1965 Example of the generation of a secondary stationary or periodic flow when there is loss of stability of the laminar flow of a viscous incompressible fluid. *J. Appl. Math. Mech.*, **29**, 527–544.
- [5] KIM, S. C. & OKAMOTO, H., 2010 Stationary vortices of large scale appearing in 2D Navier-Stokes equations at large Reynolds numbers. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **27**, 47–71.
- [6] KUO, H. 1949 Dynamics instability of two-dimensional nondivergent flow in a barotropic atmosphere. *J. Meteo.*, **6**, 105–122.
- [7] MCWILLIAMS, J. C., 1984 The emergence of insulated coherent vortices in turbulent flow, *J. Fluid Mech.*, **146**, 21–43.
- [8] MESHALKIN, L. D. & SINAI, Y. G., 1962 Investigation of the stability of a stationary solution of a system of equations for the plane movement of an incompressible viscous liquid, *J. Appl. Math. and Mech.*, **25**, 1700–1705.
- [9] OBUSE, K., TAKEHIRO, S. & YAMADA, M. 2010 Long-time asymptotic states of forced two-dimensional barotropic incompressible flows on a rotating sphere. *Phys. Fluid*, **22**, 056601.
- [10] OKAMOTO, H. & SHŌJI, M., 1993 Bifurcation Diagrams in Kolmogorov's Problem of Viscous Incompressible Fluid on 2-D Flat Tori. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **10**, 191–218.
- [11] PLATT, N., SIROVICH, L. & FITZMAURICE, N., 1991 An investigation of chaotic Kolmogorov flows. *Phys. Fluid*, **3**, 681–696.
- [12] RHINES, P. B., 1975 Waves and turbulence on a beta-plane *J. Fluid Mech.*, **69**, 417–443.
- [13] SASAKI, E. TAKEHIRO, S. & YAMADA, M, 2012 A note on the stability of inviscid zonal jet flows on a rotating sphere. *J. Fluid Mech.*, **710**, 154–165.
- [14] SASAKI, E. TAKEHIRO, S. & YAMADA, M, 2013 Linear stability of viscous zonal jet flows on a rotating sphere. *J. Phys. Soc. Japan*, **81**, 094402.
- [15] SASAKI, E. TAKEHIRO, S. & YAMADA, M, 2013 Bifurcation structure of two-dimensional viscous zonal jet flows on a rotating sphere, in preparation.
- [16] SILBERMAN, I., 1953 Planetary waves in the atmosphere, *J. Meteo.*, **11**, 27–34.
- [17] WILLIAMS, G. P., 1978 Planetary circulations: 1. Barotropic representation of Jovian and Terrestrial turbulence *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1399–1426.
- [18] YODEN, S. & YAMADA, M., 1993 A numerical experiment on two-dimensional Decaying turbulence on a rotating sphere. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 631–643.