

## ミニマル壁乱流の軌道不安定性について Orbital instability of a minimal wall turbulence

犬伏正信\*, 竹広真一†, 山田道夫‡

京都大学 数理解析研究所

Masanobu Inubushi, Shin-ichi Takehiro and, Michio Yamada  
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

### 1 はじめに

乱流は時間空間的に乱れた運動でありながら普遍的な統計的性質を示す流体現象である [1]. 本研究では壁乱流 (壁近傍の乱流) を調べる. 壁乱流ではプラントルの対数則と呼ばれる普遍的な統計則が成り立つことが知られており, 観測や室内実験, 数値実験によって確認されている [2]. この統計則は工学的にも重要であり, 多くの研究者によって調べられている. 壁乱流を生成する物理機構を理解するために, Hamilton *et al.* (1995) は壁乱流の典型例であるクエット乱流 (Fig.1 参照) が観測される最小の周期箱サイズ (ミニマルクエット乱流) を 3 次元非圧縮性ナビエ-ストークス方程式の直接数値計算を用いて調べた [4]. その結果彼らは, ミニマルクエット乱流において ‘ストリーク’ などの coherent structure の崩壊・形成を繰り返す再帰的な現象 (regeneration cycle) を見出した. ストリークとは, 流れ方向速度の低速/高速領域が筋状に並んだ構造をいう. さらに Hamilton *et al.* (1995) は regeneration cycle を説明するために ‘self-sustaining process (SSP)’ と呼ばれる物理機構を提案した. この物理機構は多くの研究者によって調べられているが, モデル化による説明や現象論的な説明が主であり, ナビエ-ストークス方程式に基づいた説明はほとんどなされていない. 本研究ではナビエ-ストークス方程式の解の軌道不安定性を数値的に調べることで, ミニマルクエット乱流における regeneration cycle の物理機構を特徴付ける.

軌道不安定性 (初期値に対する鋭敏な依存性) はカオスの重要な性質の一つである. ここでは壁乱流を一つのカオス力学系と見なし, 近年 Ginelli *et al.* (2007) によって開発された共変リャプノフ解析 [3] を用いて壁乱流の軌道不安定性を調べる. この解析法を用いることにより, リャプノフ指数を与える摂動ベクトルである (共変) リャプノフベクトルを計算することが可能になった. 共変リャプノフ解析の説明のために, 力学系  $f^t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) を考え, 状態点  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^N$  の発展を  $\mathbf{x}(t) = f^t \mathbf{x}(0)$  と書く. 軌道上の点  $\mathbf{x}(t)$  に加えられた無限小摂動ベクトル  $\mathbf{y}^{(j)}(t)$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) の発展は線形化方程式  $\mathbf{y}^{(j)}(t) = Df^t \mathbf{y}^{(j)}(0)$  に従う. ここで  $Df^t$  は  $N \times N$  のヤコビ行列である.  $j$  番目のリャプノフ指数  $\lambda_j$  ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ ) は

$$\lambda_j = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \|Df^T \mathbf{y}^{(j)}(0)\|, \quad (1)$$

と定義され,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$  はリャプノフスペクトルと呼ばれる. また, 摂動ベクトル  $\mathbf{y}^{(j)}(t)$  は状態点  $\mathbf{x}(t)$  における  $\lambda_j$  に対応する (共変) リャプノフベクトルと呼ばれる.

\* E-mail : minubush@kurims.kyoto-u.ac.jp

† E-mail : takepiro@gfd-dennou.org

‡ E-mail : yamada@kurims.kyoto-u.ac.jp

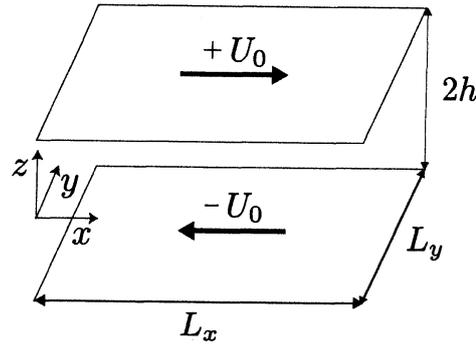


Fig.1 Illustration of the plane Couette flow system.  $x, y, z$ -directions are referred to as streamwise, spanwise, wall-normal directions, respectively.

共変リャプノフベクトルは軌道に沿った安定/不安定方向を指し示すものであり、乱流の物理的理解に役立つ可能性がある。ここではミニマルクエット乱流における regeneration cycle の物理機構を共変リャプノフ解析を用いて特徴付ける。

## 2 問題設定及び数値計算法

クエット乱流は3次元非圧縮性ナビエ-ストークス方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

によって記述される平行平板間の乱流である。ここで  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ ,  $p$  はそれぞれ  $(x, y, z) \in [0, L_x] \times [0, L_y] \times [-1, 1]$  で定義された無次元化された速度場、圧力場である。長さの無次元化には平行平板間距離の半分  $h$ , 速度には平行平板の速度差の半分  $U_0$ , 圧力には  $U_0^2 \rho$  を用いた ( $\rho$  は流体の密度)。境界条件は壁面上で non-slip, 水平方向 ( $x$ - $y$ ) は周期境界条件とした。また、流れ ( $x$ -) 方向のフラックスおよびスパン ( $y$ -) 方向の平均圧力勾配はそれぞれゼロとした。流れ場をトロイダル・ポロイダルポテンシャルに分解し、その時間発展を数値的に計算した。計算領域はミニマルサイズである  $L_x = 1.755\pi, L_y = 1.2\pi$  であり、レイノルズ数は  $Re = 400$  とした。ポテンシャルを水平方向にはフーリエ展開し、壁垂直方向にはチェビシェフ展開した： $\psi(x, y, z) = \sum_{k=-KM}^{KM} \sum_{l=-LM}^{LM} \sum_{m=0}^{MM} \hat{\psi}_{(k,l,m)} e^{i(\alpha kx + \beta ly)} T_m(z)$ 。ここで  $\alpha = 2\pi/L_x$ ,  $\beta = 2\pi/L_y$  は流れ方向とスパン方向の基本波数である。切断波数は  $KM = 8, LM = 8, MM = 32$  とした。力学系の次元  $N$  は  $N = 19074$  である。

## 3 ミニマルクエット乱流の軌道不安定性

前節の設定でミニマルクエット乱流の数値計算を行った結果、先行研究で報告されている regeneration cycle (ストリークの崩壊と再形成) が観察された。ストリークが崩壊する際に、流れ方向渦度  $\omega_x$  が壁の

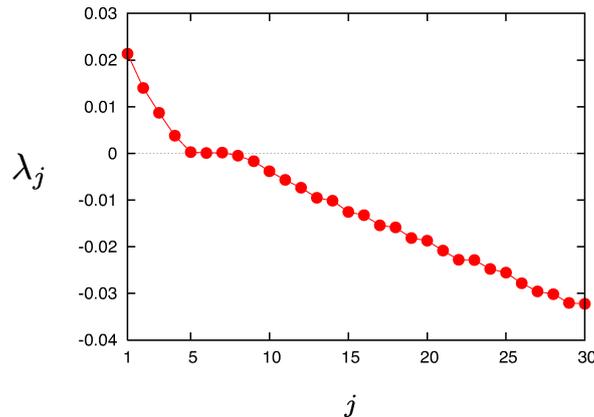


Fig.2 Lyapunov spectrum  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, 30$ ) of the minimal Couette turbulence. There are four positive Lyapunov exponents and three zero Lyapunov exponents. The maximum Lyapunov exponent is  $\lambda_1 = 0.021$ . The Lyapunov dimension is  $D_L = 14.8$  and the Kolmogorov-Sinai entropy is  $h_{KS} = 0.048$ .

中間付近 ( $z \sim 0$ ) に強く局在する。このことを定量的に示すために Fig.3 の下段に渦度の  $z = 0$  における RMS:  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  の典型的な時系列 ( $2730 \leq t \leq 3030$ ) を示した。ここで平均は水平方向平均である:  $\langle \cdot \rangle_H = \frac{1}{L_x L_y} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \cdot dx dy$ 。この時系列においてストリークの崩壊・再形成は 3 回見られ、先行研究で報告されている regeneration cycle の“周期” $T$  が  $T \sim 100$  であることと整合的である。このストリークの崩壊・再形成に対応して流れ方向渦の強い局在も 3 回見られ、Fig.3 の下段の時系列の  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  の 3 つのピークに対応する。ここでは  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  が増大している期間と減衰している期間の 2 つに regeneration cycle を分け、それぞれ Phase (i) と Phase (ii) と呼ぶことにする。最初の 1 サイクルに関しては Phase (i) は  $2730 \lesssim t \lesssim 2760$ 、Phase (ii) は  $2760 \lesssim t \lesssim 2830$  である。

### 3.1 リャプノフスペクトル

次にミニマルクエット乱流に対して共変リャプノフ解析を行った結果を示す。まず得られたリャプノフスペクトルを Fig.2 に示す。ミニマルクエット乱流は 4 つの正のリャプノフ指数、3 つのゼロリャプノフ指数をもつことがわかった。3 つのゼロリャプノフ指数はそれぞれ水平方向の空間並進対称性と時間方向の並進対称性を反映していると考えられる。最大リャプノフ指数は  $\lambda_1 = 0.021$  であり、乱流の統計量を良く再現する不安定周期軌道 (UPO) のフロケ乗数  $\mu = 0.019$  (Kawahara (2009) [5]) に近い。Saiki and Yamada (2011) は低次元カオス力学系の UPO の統計量とカオス解の統計量を比較し、『カオス解のリャプノフ指数に近いフロケ指数をもつ UPO は、その軌道長が短くとも、カオス解の種々の統計量を良く近似する』と結論付けている [6]。ミニマルクエット乱流を良く近似する UPO のフロケ指数の値と (最大) リャプノフ指数の値が近いことは、Saiki and Yamada (2011) が低次元力学系で見出した結果と整合的であるといえる。リャプノフスペクトルによって定義されるアトラクタ次元 (リャプノフ次元) は  $D_L = 14.8$  であり、コルモゴロフ-シナイエントロピーは  $h_{KS} = 0.048$  である。

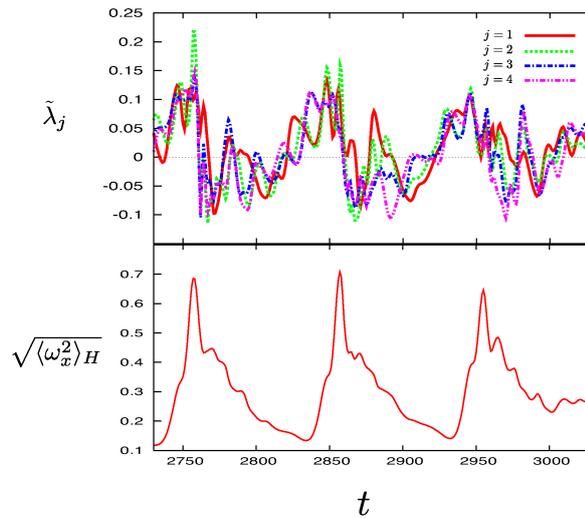


Fig.3 [Upper panel] Time series of the local Lyapunov exponents  $\tilde{\lambda}_j$  for  $j = 1$  (red solid line), 2 (green dotted line), 3 (blue dashed dotted line) and 4 (pink dashed double-dotted line). [Lower panel] The 'horizontal' RMS of streamwise vorticity  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  at the mid-plane ( $z = 0$ ).

### 3.2 局所リャプノフ指数

Regeneration cycle を特徴付けるため局所リャプノフ指数を Fig.3 の上段に示した。局所リャプノフ指数の定義は  $\tilde{\lambda}_j(\mathbf{x}_0, \tau) = \frac{1}{\tau} \ln \frac{\|D\mathbf{f}^\tau \mathbf{u}^{(j)}(0)\|}{\|\mathbf{u}^{(j)}(0)\|}$  である。  $\tau$  は局所的な平均時間であり、ここでは  $\tau = 1$  とした。 Fig.3 の上段に示したのは、正のリャプノフ指数に対応する局所リャプノフ指数  $\tilde{\lambda}_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) の  $2730 \leq t \leq 3030$  における時系列である (実線;  $j = 1$ , 点線;  $j = 2$ , 一点鎖線;  $j = 3$ , 二点鎖線;  $j = 4$ )。 Fig.3 の下段に示した流れ方向渦度の RMS  $\sqrt{\langle \omega_x^2 \rangle_H}$  の時系列に対応して、Phase (i) では局所リャプノフ指数はおおむね正 ( $\tilde{\lambda}_j > 0$ )、Phase (ii) では局所リャプノフ指数はおおむねゼロか負 ( $\tilde{\lambda}_j \lesssim 0$ ) であることがわかる。さらに Phase (i) から Phase (ii) へ切り替わるとき、局所リャプノフ指数は急激に正から負へ減少することがわかる。

確認のため、有限時間増幅率  $\Lambda_j(t_0, \tau) = \frac{\|D\mathbf{f}^\tau \mathbf{y}^{(j)}(t_0)\|}{\|\mathbf{y}^{(j)}(t_0)\|}$  を調べる。これは時刻  $t_0$  に軌道に加えられた無限小摂動の有限時間  $\tau$  の増幅率である。 Fig.4 は  $\tau$  の関数として有限時間増幅率  $\Lambda_j(t_0, \tau)$  を示したもので、摂動を加える時刻は Fig.4 (a) は  $t_0 = 2730$  (Phase (i) の初期時刻) であり、 Fig.4 (b)  $t_0 = 2760$  (Phase (ii) の初期時刻) である ( $j = 1, 2, 3, 4$ )。 Phase (i) の初期に摂動を加えた場合、無限小摂動は  $\tau \simeq 30$  (i.e.  $t_0 + \tau = 2760$ ) までは増幅している (Fig.4 (a))。他方、Phase (ii) の初期に摂動を加えた場合、無限小摂動は増幅せず ( $\Lambda_j(t_0, \tau) \lesssim 1$ )、これは Phase (ii) で指数的不安定性がないことを示唆している (Fig.4 (b))。つまり、流れが不安定であるのは乱流中の流れ方向渦が成長している過程のみで、流れ方向渦が成長し終わり減衰する過程では流れに不安定性はないと考えられる。

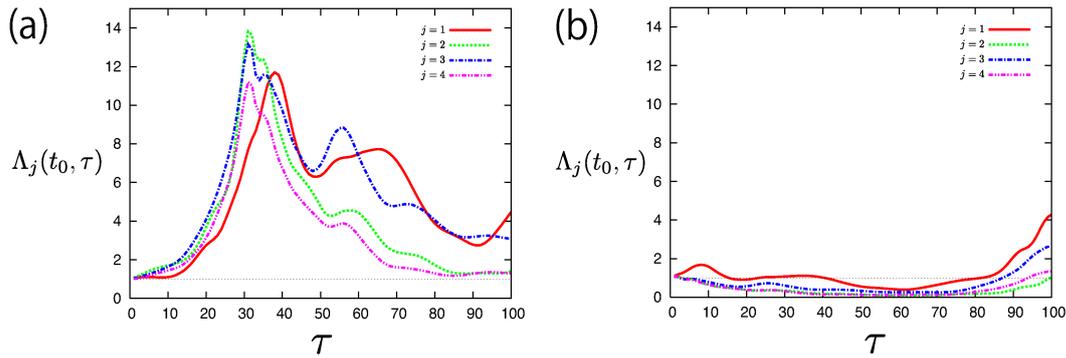


Fig.4 Finite time growth rate  $\Lambda_j(t_0, \tau)$ ; (a)  $t_0 = 2730$ , (b)  $t_0 = 2760$  for  $\tilde{\lambda}_j(t)$  for solid line (red) :  $j = 1$ , dotted line (green) :  $j = 2$ , dashed dotted (blue) :  $j = 3$ , and dashed double-dotted (pink) :  $j = 4$ . The black dot horizontal line denotes  $\Lambda_j(t_0, \tau) \equiv 1$  (i.e. neutral).

### 3.3 共変リャプノフベクトル

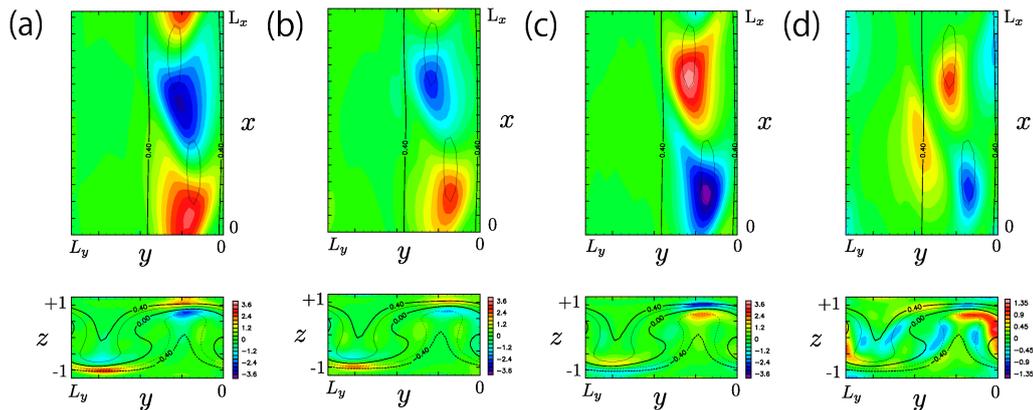


Fig.5 Lyapunov modes at the initial stage of the phase (i) ( $t = 2730$ ). Streamwise vorticities of the Lyapunov modes  $\delta\omega_{x_j}$  are shown as color tone for (a);  $j = 1$ , (b);  $j = 2$ , (c);  $j = 3$ , (d);  $j = 4$  and streamwise velocities of the base flow are shown as counter lines.

前節では局所リャプノフ指数を調べることで、ミニマルクエット乱流の不安定性は Phase (i) のみに現れることがわかった。正のリャプノフ指数に対応する共変リャプノフベクトルは軌道に沿った不安定方向を指し示しているため、本節では、共変リャプノフベクトルを調べることで Phase (i) の不安定性を考察する。

まず、Phase (i) の初期時刻 ( $t = 2730$ ) におけるリャプノフベクトルを Fig.5 に示す。共変リャプノフベクトル  $\delta\omega_{x_j}$  の流れ方向渦度はカラートーンで示され、Fig. 5 (a,b,c,d) はそれぞれ  $j = 1, 2, 3, 4$  の場合である。Base flow (ミニマルクエット乱流) の流れ方向速度は等高線で示されている。共変リャプノフベクトルはエンストロフィーノルムを用いて  $1/2\langle|\delta\omega_j|^2\rangle_V = 1$  を規格化されている。それぞれの図の上図は  $z = 0.8$  の断

面であり，下図は  $x = 1.5$  の断面である．共変リャプノフベクトルの流れ方向渦度  $\delta\omega_{xj}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) は (A)  $u_x = 0$  の等高線の壁付近の領域に局在しており (Fig. 5 下図)，(B) 渦度の符号は流れ方向に正負交互に現れることがわかる (Fig. 5 上図)．これらの Phase (i) 初期における共変リャプノフベクトルの渦度分布は，Schoppa and Hussain [7] や Kawahara *et al.* [8] によるモデルストリークの sinuous 不安定モードと呼ばれる固有関数の渦度分布に近い．特に上記の特徴 (A), (B) は共変リャプノフベクトルとモデルストリークの固有関数の双方で確認することができる．したがって，Phase (i) の初期では共変リャプノフベクトルは sinuous 不安定性を指し示しているといえる．

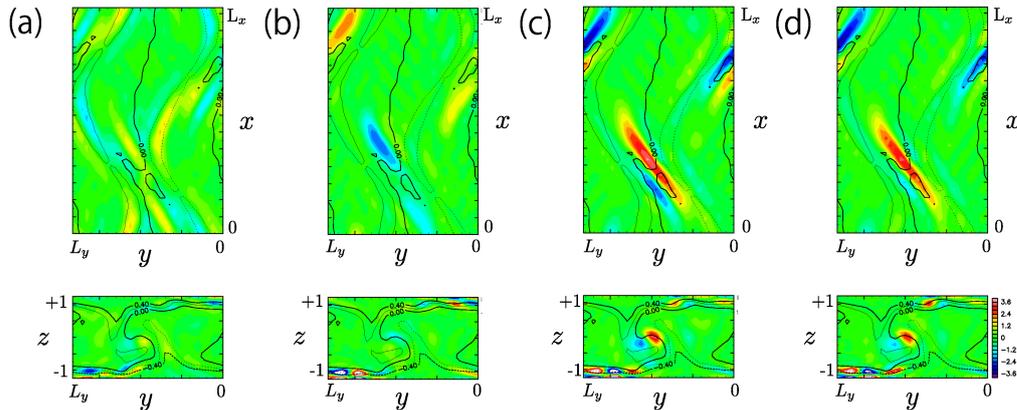


Fig.6 Lyapunov modes at the final stage of the phase (i) ( $t = 2760$ ). Streamwise vorticity of the Lyapunov mode  $\delta\omega_{xj}$  is shown as color tone for (a);  $j = 1$ , (b);  $j = 2$ , (c);  $j = 3$ , (d);  $j = 4$  and streamwise velocity of the base flow is shown as counter lines.

Sinuous 不安定によってストリークは蛇行する．ストリークの蛇行に伴って流れ方向渦の局在が起こり，それが局所リャプノフ指数の再生成サイクルにおける最大を与える (Fig. 3)．局所リャプノフ指数が最大となる時刻である  $t = 2760$  (Phase (i) 終期) における共変リャプノフベクトルを Fig.6 に示した．上図は  $z = 0$  の断面，下図は  $x = 1.5$  の断面であり，その他，カラートーンや等高線は Fig.5 と同じである．共変リャプノフベクトルの流れ方向渦度  $\delta\omega_{xj}$  (特に  $j = 3, 4$ ) は蛇行したストリークの間局在していることがわかる．これは base flow (ミニマルクエット乱流) の流れ方向渦度の局在に対応していると考えられる．したがって，Phase (i) の終期の不安定性は流れ方向渦の局在に関係しているといえる．

## 4 結論

本稿では，モデル化や現象論的な議論で従来説明されてきた regeneration cycle を，ナビエ-ストークス方程式の軌道不安定性で特徴付けた．特に局所リャプノフ指数によって，再生成サイクルの Phase (i) は不安定であるが，Phase (ii) に不安定性がないことが明らかになった．また共変リャプノフベクトルによって Phase (i) の不安定性を特徴付け，Phase (i) の初期では sinuous 不安定性，Phase (i) の終期では流れ方向渦の局在に関係する不安定性が支配的であることがわかった．

## 参考文献

- [1] Uriel Frisch, "Turbulence: The Legacy of A. N. Kolmogorov", Cambridge University Press, (1995).
- [2] 木田 重雄, 柳瀬 真一郎, "乱流力学", 朝倉書店 (1999).
- [3] F. Ginelli, P. Poggi, A. Turchi, H. Chate, R. Livi, and A. Politi, "Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors", *Phys. Rev. Lett.* 99, 130601(4), (2007).
- [4] J. M. Hamilton, J. Kim, and F. Waleffe, "Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures", *J. Fluid Mech.*, vol. 287, pp. 317–348 (1995).
- [5] G. Kawahara, "Theoretical interpretation of coherent structures in near-wall turbulence", *Fluid Dyn. Res.* 41, 064001 (2009).
- [6] Y. Saiki and M. Yamada, "On the relations between statistical values along unstable periodic orbits in differential equation systems", *RIMS Kokyuroku*, 1768, pp.143–149 (2011).
- [7] W. Schoppa and F. Hussain, "Coherent structure generation in near-wall turbulence", *J. Fluid Mech.* vol.453, pp.57–108 (2002).
- [8] G. Kawahara, J. Jimenez, M. Uhlmann, and A. Pinelli, "Linear instability of a corrugated vortex sheet - a model for streak instability" *J. Fluid Mech.*, vol.483, pp.315–342 (2003).