

電卓を用いた数学教材について

兵庫教育大学大学院・認識形成系教育コース

濱中 裕明 (Hiroaki Hamanaka)

Faculty of Recognition Development Education,

Hyogo University of Teacher Education

1 はじめに

蟹江 [1] は、数学者が数学の教育に正当に関与できるプラットフォームとして、「教育数学」という概念を提案している。そして、ここでは「教育数学」を「数学を教育的な観点から眺めることにより、数学と教育に関する様々な知見を得ること、および、そうした知見を数学や教育の実践に役立てることを目的とする営み」と暫定的ではあるが定義している。

なるほど、これまで数学教育にも関わって、教材研究・授業開発などを行ったこともあるが、数学教育の立場からだけでは不足している部分、逆に言えば、数学者として数学の教育に関与する意義を強く感じる場面はいくつかあった。特に、数学教育の視座から、必要な教材の観点が見えてきたとしても、実際にその観点に見合った教材を作り上げる部分には数学の知見がかなり必要である。もちろん、これはいわゆる抽象的な現代数学の知見という意味ではないが、「数学を教育的な観点から眺める」ことにより、見えてくる教材というのは確かにある。

ここでは、電卓を用いた数学教材について、いくつか紹介したい。IT 活用の流れもあって、数学科の授業のなかで、コンピュータ等を用いることもまったく普通のこととなってきた。だが、コンピュータは汎用的でなんでも出来るだけに良質な教材を生み出すのは、難しい面もあるのではないか。ある意味魔法のようになんでも出力できるコンピュータでは逆に学習者の納得感は少なく、また、探究課題の設定も難しい。むしろ機能を押さえた電卓を使った教材のほうが、教育的効果は高いのではないか。では、電卓を使った教材のなかに、数学的に興味深いものがあるだろうか。

いや、ここでは「教育数学」に沿って逆に考えよう。数学を考えるなかで、「電卓を使った教材」として教育的に扱える部分をみつけていきたい。そのような例をいくつか紹介する。

2 平方根の和

電卓は当然ながら有限桁しか表示できない。そのため、通常の電卓は表示可能桁数を越えた部分を切り捨ててして表示する¹。となれば、平方数ではない自然数 a, b に対して、

$$\sqrt{a} + \sqrt{b}$$

を電卓で計算させた結果が自然数となることもあり得るだろう。では、そのような a, b をうまく見つけるにはどうすればいいだろうか。

このような問題を考えるのは、一つには初等的で手頃な、数学の探究課題として興味深いからである。と同時に、教育の視点からも有益と思える部分もあるのだが、それについては後述することとしよう。

いま $a < b$ と仮定して議論を進める。 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ を電卓で計算して、自然数 n が表示されるためには、 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ が n よりもほんの少し大きい値（切り捨てられる量）になっている必要がある。正確には、 \sqrt{a}, \sqrt{b} を計算するときの切り捨て量と、それらを足し合わせるときの切り捨て量を個別にみる必要があるだろうが、ここでは微小な正の実数 ϵ （例えば $\epsilon < 10^{-8}$ ）を用いて

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = n + \epsilon \quad (1)$$

となるような自然数 a, b, n を見つけるという問題設定とする。

式(1)には平方根があるので、 b について解くことで、一方の平方根を外すのは自然だろう。実際、

$$\begin{aligned} \sqrt{b} &= (n + \epsilon) - \sqrt{a} \\ b &= (n + \epsilon)^2 + a - 2(n + \epsilon)\sqrt{a} \end{aligned}$$

を得る。ここから、

$$\sqrt{a} = \frac{(n + \epsilon)^2 + a - b}{2(n + \epsilon)} \quad (2)$$

という式を得る。

ϵ は微小量であったから、式(2)の右辺は

$$\frac{n^2 + a - b}{2n} \quad (3)$$

に近い値となる。つまり、これは \sqrt{a} の有理数近似である。

逆に、上記の式(3)が \sqrt{a} の近似、具体的には微小な正数 δ だけ \sqrt{a} より小さい値となっているとしよう。つまり、

$$\frac{n^2 + a - b}{2n} = \sqrt{a} - \delta$$

¹なかには表示可能桁数を越えた部分を四捨五入する機種も存在するが、ここでは切り捨てずとして考える。

という式がなりたつとし、さらに $n > \sqrt{a}$ という仮定も加える。このとき、逆向きに変形していくと、

$$\begin{aligned} 2n\sqrt{a} &= n^2 + a - b + 2n\delta \\ b - 2n\delta &= n^2 - 2n\sqrt{a} + a \\ \sqrt{b - 2n\delta} &= n - \sqrt{a} \\ \sqrt{a} + \sqrt{b - 2n\delta} &= n \end{aligned}$$

を得るから、 δ が微小であれば、これは $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ が n よりも微小量だけ大きい値であることを示している。

そこで、自然数 a, b, n および微小な正の数 ϵ, δ が

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = n + \epsilon \qquad \sqrt{a} = \frac{n^2 + a - b}{2n} + \delta$$

を満たしているときの、 ϵ と δ の関係（評価式）について考えよう。上記の左の式が成り立つとき、(2) 式がなりたつので、

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{(n + \epsilon)^2 + a - b}{2(n + \epsilon)} - \frac{n^2 + a - b}{2n} \\ &= \frac{n(n + \epsilon)\epsilon - (a - b)\epsilon}{2n(n + \epsilon)} \\ &= \epsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{b - a}{2n(n + \epsilon)} \right) \\ &\geq \frac{1}{2}\epsilon \end{aligned}$$

つまり、 $n > \sqrt{a}$ の範囲で、

$$\sqrt{a} - \delta < \frac{n^2 + a - b}{2n} < \sqrt{a}$$

となるような \sqrt{a} の有理数近似 ($\delta > 0$) を求めれば、

$$n < \sqrt{a} + \sqrt{b} < n + 2\delta$$

なる a, b, n が見つかるということになる。

早速、 $a = 2$ としてやってみる。 $\sqrt{2}$ の近似有理数としては連分数展開による方法が有名であろう。

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

という連分数表示から、

$$\begin{aligned}
 1 + \frac{1}{2} &= \frac{3}{2} \\
 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} &= \frac{7}{5} \\
 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} &= \frac{17}{12} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

という $\sqrt{2}$ の有理近似列が得られる。このとき、連分数展開の性質上、この近似列中には、 $\sqrt{2}$ より大きい値と小さい値が交互に出現するから、 $\sqrt{2}$ より小さい近似だけを取り出すと、

$$\frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \frac{1393}{985}, \frac{8119}{5741}, \dots$$

となるが、特に $\frac{239}{169}$ に注目して、この分数を次のように変形すると、

$$\frac{239}{169} = \frac{2 \times 239}{2 \times 169} = \frac{169^2 + 2 - 28085}{2 \times 169} = 1.4142011$$

つまり、 $a = 2, b = 28085, n = 169$ とすれば、 \sqrt{a} の $\frac{n^2+a-b}{2n}$ 形の有理近似となっている。

実際、一般的な安価の電卓は8桁表示のものが多く、これを用いて計算すると、

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2} &= 1.41421356 \dots \approx 1.4142135 \\
 \sqrt{28085} &= 167.585798 \dots \approx 167.58579
 \end{aligned}$$

となるので（8桁表示の結果を最右辺に示した）、これらを足し合わせると、

$$1.4142135 + 167.58579 = 169.0000035 \approx 169$$

という結果が得られる。是非、手頃な電卓で実際に試してもらいたい。

実際、電卓を使った上記の操作で、“169”という整数値の結果が出た瞬間には、ある種の気持ちよさがある。電卓を使うということ、計算の手間を省くという使い方が想起されがちだが、考察の通りに、結果が出て、それが簡単に確かめられる、これも電卓を使った活動の良さではないだろうか。

また、この計算結果には、教材としての別の使い方もある。例えば、学部生（教員養成系の学部）に、この計算結果（電卓を使った「 $\sqrt{2} + \sqrt{28085} = 169$ 」という結果）を提示すると、「それは正しい結果ではない」と即座に答える。しかし、その理由を問うと「無理数と無理数の和は無理数だから」といった、誤った理由を言う者が少なくない。この計算は、高校生等を対象として、学習者を無理数や平方根に関する精緻な理解へと導入する教材となりえるのではないかと考えられる。

3 3乗根の計算

[2]には、一般的な電卓を用いた立方根の計算に関する話が載っている。ここでいう一般的な電卓というのは、四則演算と平方根の計算が出来る電卓、という意味である。まずその方法を紹介し、その背景にある数理について考えてみる。

まず、電卓の動作について、次のことを確認しておく。

- 何か数値 x が表示されているときに、

×	5	=
---	---	---

 の3つのボタンをこの順に押すと、電卓は $5x$ (の近似値) を表示する。
- 何か数値 x が表示されているときに、

√

 を押すと、電卓は \sqrt{x} (の近似値) を表示する。

以上を踏まえて、[2]に紹介されている方法を $\sqrt[3]{5}$ の近似値計算を例にして説明する。

1. 初めに

1

 を押して、1を表示させる。(実は初期値は正であれば何でもよい)
2. その後、

×	5	=	√	√
---	---	---	---	---

 を押す。
3. 上記2. の5つのボタンを押すという一連の動作を、値が変化しなくなるまで繰り返す。そのときの、変化しなくなった値が $\sqrt[3]{5}$ の近似値となる。

なぜ、これで $\sqrt[3]{5}$ の近似値が得られるのか、説明の方法は何通りもあるだろう。結局、上記の計算がやっていることは、初期値 $a_0 = 1$ 、漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{\sqrt{5}a_n}$ の数列の収束値を計算しているに過ぎないので、もしも収束性を仮定していいなら(実際、上記の計算自体が収束することを示唆している)、収束値 α が

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{5}\alpha}$$

を満たすことから、これを解いて $\alpha^3 = 5$ が示される。当然この方法は、5の立方根に限ったことではなく、5を適当な別の値に置き換えることで、さまざまな立方根の近似計算が可能である。

また、この場合も、具体的な操作として得られる値(8桁電卓の場合、1.7099759で変化しなくなる)に対して、これが5の3乗根の近似値であろうということを考察したのち、実際にその値を3乗してみても、5に極めて近い値となることを直ちに確かめてみる点ができる点が教育的である。

さて、この計算は、数学に関するいくつかの良質な探究課題を提供してくれる。まず、上記の繰り返しにおいて、

√

 を押す回数を増やして、

- | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| × | 5 | = | √ | √ | √ |
|---|---|---|---|---|---|

 を押す

を繰り返したらどうなるのかを考えるのは自然だろう。この場合は、収束値をやはり α とおけば、

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\sqrt{5\alpha}}}$$

を満たすことから、 $\alpha = \sqrt[3]{5}$ が得られる。

こうなると、様々なべき乗根について、平方根と四則演算から近似計算が可能なのかを考えたい。

- 平方根を求める機能は、もともと備わっている。
- 3乗根は、上記の方法で求められる。
- 4乗根は、平方根をとることを、2回繰り返せばよい。
- 6乗根は、3乗根の平方根であるから、3乗根を求めてのち、 $\sqrt{\quad}$ を押せばよい。
- 7乗根は、上記の方法で求められる。

上記は直ちに分かるが、そこには5乗根の計算が抜けているので、5乗根の計算方法を探したくなる。例えば、次のようないくつかの方法があるだろう。

1. 3乗根、7乗根の求め方の方法から推論して、繰り返しの動作のなかで、 $\sqrt{\quad}$ を押す回数をもう一つ増やし、

×	5	=	√	√	√	√
---	---	---	---	---	---	---

 を押すことを繰り返すことにすれば、収束値 α は、

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5\alpha}}}}}$$

を満たすから、 $\alpha = \sqrt[5]{5}$ となる。この値を3乗すれば、5乗根が得られる。

2. 上記のように、15乗根を求めることができると分かれば、

$$\sqrt[5]{5} = \sqrt[15]{5^3} = \sqrt[15]{125}$$

という計算により、125の15乗根を求めるという方法も考えられる。

このように、5乗根の計算方法の発見には、べき乗根に関する指数法則をうまく活用することが必要であり、高校の範囲の数学の教材としても適当であろう。

さて、ではどんな自然数 n に対しても、電卓の計算機能を繰り返すことで n 乗根を求めることは可能なのだろうか。これについて、以下のように統一的に考えることが可能である。

いま、5の n 乗根を求めることを考えることとし、また、電卓の一連の操作として、

- 「 $\sqrt{\quad}$ 」を押す」操作を A と呼ぶことにする。
- 「 $\times \quad 5 \quad = \quad \sqrt{\quad}$ 」を押す」操作を B と呼ぶことにする。

いま、電卓に正の数 x が表示されているとし、 $a = \log_5 x$ とおく。つまり、 $x = 5^a$ である。このとき、

- A の操作、つまり $\sqrt{\quad}$ を押すと、電卓には $\sqrt{x} = 5^{\frac{a}{2}}$ が表示される。
- B の操作、つまり $\times \quad 5 \quad = \quad \sqrt{\quad}$ を押すと、電卓には $\sqrt{5x} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{a}{2}}$ が表示される。

このように、電卓で表示されている値を 5^a の形で表すことにすると、A, B の操作は、指数をそれぞれ、 $\frac{a}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{a}{2}$ に変化させるわけだが、ここで指数の a を 2 進数の小数表示することを考えると、その変化の意味が一目瞭然となる。

2 進数での小数表示を $(a_0.a_1a_2a_3)_2$ というように表すことにしよう。ここで、各位の数である a_i などは 0 もしくは 1 である。例えば、

$$(0.101)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

となる。いま $1 \leq x \leq 5$ として、 $x = 5^a$ の指数 a を 2 進数の小数表示することとし、 $a = (0.a_1a_2a_3\dots)_2$ とおく。つまり、

$$x = 5^{(0.a_1a_2a_3\dots)_2}$$

である。このとき、A の操作後の値、B の操作後の値はそれぞれ、

$$5^{(0.0a_1a_2a_3\dots)_2}, \quad 5^{(0.1a_1a_2a_3\dots)_2}$$

となる。つまり、A, B の操作は 指数を 2 進数表示したときの各位を 1 つずつ右にずらし、小数点第 1 位にそれぞれ 0 または 1 を挿入するという操作なのである。

3 乗根の近似値の計算は $\times \quad 5 \quad = \quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad}$ を繰り返すというものだったが、これは B, A の操作を繰り返すということに他ならない。つまり、この操作を繰り返すと、表示される値は

$$5^{(0.010101\dots)_2}$$

に近づいていくというわけである。実は、 $\frac{1}{3}$ を 2 進数表示すれば、 $(0.010101\dots)_2$ という循環小数になるので、上記の結果と符合している。

逆に、 $\sqrt[n]{5}$ を求めたいときは、 $\frac{1}{n}$ を 2 進数で小数展開すればよい。どんな有理数も 2 進数の小数表示をすると、循環小数になるので、A, B の一連の操作の繰り返しによって、近似値を求めることができる。例えば、

$$\frac{1}{5} = (0.0011001100110011\dots)_2$$

というように、 $\frac{1}{5}$ の小数表示は“0011”を循環節とする純循環小数となるから、B,B,A,Aの操作を繰り返せば、やがて $\sqrt[5]{5}$ に収束することになる。

実際、電卓に1を入力したのち、

×	5	=	√	×	5	=	√	√	√
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

という一連の動作を繰り返して、 $\sqrt[5]{5}$ に収束することを確認されたい。

参考文献

- [1] 蟹江幸博, 「教育数学の位置づけ」, 数理解析研究所講究録1801(2012), pp.93–108.
- [2] 野崎昭弘、何森仁、伊藤潤一、小沢健一, 「数と計算の意味が分かる」, ベレ出版(2001), p.96.