数理解析研究所講究録
第1922巻 2014年 34-37

Nomizu, Hattori, Mostow の定理の発展

糟谷　久矢　(東京工業大学)*

1. Nomizu, Hattori, Mostow の定理概観

Gを単連結可解リー群とし、Gは離散部分群Γで商が$\Gamma\backslash G$がコンパクトであるもの (Gの格子と呼ぶ) を持つとする。この時、コンパクト等質空間$\Gamma\backslash G$を可解多様体と呼ぶ。特に、Gが冪零の時、$\Gamma\backslash G$を冪零多様体と呼ぶ。多様体としてはGはユークリッド空間と同相であり、可解多様体$\Gamma\backslash G$はΓを基本群とするEilenberg-Maclane空間$K(\Gamma,1)$である。$\mathfrak{g}$をGのリー環とする。双対空間の外積代数$\bigwedge\mathfrak{g}^*$は可解多様体$\Gamma\backslash G$のde Rham複体$A^*(\Gamma\backslash G)$の左不変形式のなす部分複体と見なすことが出来る。野水克己氏は論文[11]で以下を示した。

定理 1.1 $\Gamma\backslash G$を**冪零**多様体とする。このとき、包含関係

$$\bigwedge\mathfrak{g}^*\subset A^*(\Gamma\backslash G)$$

はコホモロジーの同型

$$H^*(\mathfrak{g})\cong H^*(\Gamma\backslash G,\mathbb{R})$$

を導く。

注意 1.2 松島与三氏は論文[9]で一次と二次のコホモロジーで同型を示しており、実際は野水氏の結果はこの松島氏の結果の発展として出来たものである。

$\rho:G\to GL(V)$をGの表現とする。Vを$\mathfrak{g}$-moduleと見て、複体$\bigwedge\mathfrak{g}^*\otimes V$を考える。また、$\rho:\Gamma\to GL(V)$をモノドロミーとするような$\Gamma\backslash G$の平坦ベクトル束$E$とそこに値をとるde Rham複体$A^*(\Gamma\backslash G,E)$を考える。服部晶夫氏は論文[4]にて以下を示した。

定理 1.3 $\Gamma\backslash G$を可解多様体とし、Gは以下を満たすとする。

($*$) 全ての$g\in G$で、随伴作用素Ad_gが実固有値のみを持つ。

$\rho:G\to GL(V)$をGの表現で、全ての$g\in G$で$\rho(g)$が実固有値のみを持つものとする。この時包含関係

$$\bigwedge\mathfrak{g}^*\otimes V\subset A^*(\Gamma\backslash G,E)$$

はコホモロジーの同型

$$H^*(\mathfrak{g},V)\cong H^*(\Gamma\backslash G,E)$$

を導く。

条件($*$)を満たすGを服部氏は三角(Triangular)リー群と呼んだ。(実際、実三角行列に埋め込める) 現在では、完全可解(completely solvable)リー群と呼ばれることが多い。

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山2-12-1　東京工業大学 大学院理工学研究科 数学専攻
e-mail: kasuya@math.titech.ac.jp
web: http://www.math.titech.ac.jp/~kasuya/

注意 1.4 $V=\mathbb{R}$でρが自明な場合はもちろん定理の条件を満たすので、$(*)$を満たすGに対して、同型$H^*(\mathfrak{g})\cong H^*(\Gamma\backslash G,\mathbb{R})$が成り立つ。この同型が応用上最も重要であるため、多くの文献では単にこの同型のみが引用されていることが多いが。しかし、実際に証明をする上で、自明ではない表現ρを考えることは本質的に重要なことである。論文[11]と[4]の証明を読み比べてみるとそのような事情がよくわかるであろう。

またG. D. Mostow氏は論文[10]において以下を示した。

定理 1.5 $\Gamma\backslash G$を可解多様体とし、$\rho: G\to GL(V)$をGの表現とする。さらに以下の条件を仮定する。

$(\star)$ 像$(Ad\oplus\rho)(G)$と$(Ad\oplus\rho)(\Gamma)$が$Aut(\mathfrak{g})\times GL(V)$のなかで同一のZariski閉包を持つ。

この時、包含関係

$$\bigwedge\mathfrak{g}^*\otimes V\subset A^*(\Gamma\backslash G,E)$$

はコホモロジーの同型

$$H^*(\mathfrak{g},V)\cong H^*(\Gamma\backslash G,E)$$

を導く。

実はMostowの定理はHattoriの定理を含んでいる。(参照[2])

注意 1.6 一般の可解多様体でコホモロジーの同型が成り立つ訳ではない。

例：$G=\mathbb{R}\ltimes_\phi\mathbb{R}^2\quad \phi(t)=\begin{pmatrix}\cos\pi t & -\sin\pi t\\ \sin\pi t & \cos\pi t\end{pmatrix}$、$\Gamma=2\mathbb{Z}\ltimes\mathbb{Z}^2$.

この時$\Gamma\cong\mathbb{Z}^3$より、G/Γは3-トーラスであり、$\dim H^1(G/\Gamma,\mathbb{R})=3$. 一方、$\mathfrak{g}$は非可換で、$\dim H^1(\mathfrak{g})=1$。よって、同型$H^*(\mathfrak{g})\cong H^*(G/\Gamma,\mathbb{R})$を満たさない。

これらの定理が発表された当時は可解多様体は幾何学対象としてあまり調べられていなかったようである。ところが、論文[15]で、W. P. Thurston氏がケーラー構造を持たないシンプレクティック多様体の（歴史上初めての）例としてある冪零多様体が挙げられたことによって、冪零多様体や可解多様体は幾何学的対象として注目されるようになり、以後活発に研究されるようになる。(参照[12])（実はThurston氏の例は小平邦彦氏も発見しており、現在ではKodaira-Thurston多様体と呼ばれることが多い）de Rhamコホモロジーが明示的に計算できることは幾何学において、大きなアドバンテージである。野水の定理や服部の定理は冪零多様体や可解多様体の研究において、基本定理としての重要な役割をしている。実際MathSciNetで調べると、論文[11]の100件以上の、論文[4]の40件以上の引用のほとんどが1990年以後の論文からの引用であり、古典的結果が時代を超えて、現代数学の中で価値を増していく様が見て取れよう。

2. Nomizu, Hattori, Mostow の定理の発展

注意1.4で説明したように、一般の可解多様体$\Gamma\backslash G$に対して、Nomizu, Hattori, Mostowの定理を単純に拡張することは出来ない。論文[2]ではリー群GのModificationとり、Mostowの定理の場合に帰着するアイディアが与えられている。また、論文[1]では代数群を用いて、可解多様体を含むようなコンパクトaspherical多様体を構成し、そのコホモロジーを計算している。さらに本稿では筆者がこれまでに出した、Nomizu, Hattori, Mostowの定理の発展的な結果を紹介する。それぞれの詳細は挙げられている著者の論文を参照されたい。

1. (**de Rhamホモトピー論的拡張** [6])

   野水の定理はSullivanの極小モデル([16])を幾何学的に構成できる重要な例に成っている。筆者は野水の定理のde Rhamホモトピー論的拡張として、可解多様体の（局所系に関する）Sullivanの極小モデルを幾何学的に構成した。

2. (**計算法の拡張** [7]) コホモロジーの同型

   $$H^*(\mathfrak{g}, V) \cong H^*(\Gamma\backslash G, E)$$

   が成り立たないような可解多様体$\Gamma\backslash G$と表現ρの組に対しても、コホモロジー$H^*(\Gamma\backslash G, E)$を計算するような複体を明示的に構成した。

   さらに同様のことをDolbeaultコホモロジーに対しても行った。これは坂根由昌氏による野水の定理のDolbeault版([14])の拡張に成っている。

3. (**代数化による拡張** [8])

   $\Gamma\backslash G$はEilenberg-Maclane空間$K(\Gamma,1)$であるので、可解多様体のコホモロジーは離散群Γの群コホモロジーである。可解リー群の離散群はtorsion-free polycyclic群の一種である。([13]) 筆者はtorsion-free polycyclic群の群コホモロジーがある代数群の有理コホモロジー（参照 [5]) と同型であることを示した。この結果はNomizu, Hattori, Mostowの定理の"代数化"であり、ある意味でこれらの定理を含むものとなっている。

参考文献

[1] O. Baues, Infra-solvmanifolds and rigidity of subgroups in solvable linear algebraic groups. Topology **43** (2004), no. 4, 903–924.

[2] S. Console, A. Fino, On the de Rham cohomology of solvmanifolds. Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 10 (2011), no. 4, 801–818.

[3] K. Hasegawa, Minimal models of nilmanifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* **106** (1989), no. 1, 65–71.

[4] A. Hattori, Spectral sequence in the de Rham cohomology of fibre bundles. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I **8** 1960 289–331 (1960).

[5] G. Hochschild, Cohomology of algebraic linear groups. Illinois J. Math. **5** 1961 492–519.

[6] H. Kasuya, Minimal models, formality and hard Lefschetz properties of solvmanifolds with local systems. J. Differential Geometry, **93**, (2013), 269–298.

[7] H. Kasuya, de Rham and Dolbeault Cohomology of solvmanifolds with local systems. Math. Res. Lett. **21**, (2014) to appear.

[8] H. Kasuya, Central theorems for cohomologies of certain solvable groups. arXiv:1311.1310

[9] Y. Matsushima, On the discrete subgroups and homogeneous spaces of nilpotent Lie groups. Nagoya Math. J. 2, (1951). 95–110.

[10] G. D. Mostow, Cohomology of topological groups and solvmanifolds. Ann. of Math. (2) **73** 1961 20–48.

[11] K. Nomizu, On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups. Ann. of Math. (2) **59**, (1954). 531–538.

[12] J. Oprea, and A. Tralle, Symplectic manifolds with no Kähler structure. Lecture Notes in Math. 1661, Springer (1997).

[13] M. S. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 68.

[14] Y. Sakane, On compact complex parallelisable solvmanifolds. Osaka J. Math. **13** (1976), no. 1, 187–212.

[15] W. P. Thurston, Some simple examples of symplectic manifolds. Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), no. 2, 467–468.

[16] D. Sullivan, Infinitesimal computations in topology. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. **47** (1977), 269–331 (1978).