数理解析研究所講究録
第 1922 巻 2014 年 84-89

LEFSCHETZ PENCILS AND FINITELY PRESENTED GROUPS

RYOMA KOBAYASHI AND NAOYUKI MONDEN

1. 序

Lefschetz pencil は, S. Lefschetz が代数曲面を調べる補助手段として導入した概念である. 1970 年代後半から 1980 年代にかけ, 種数 1 の Lefschetz pencil が楕円曲面のトポロジーの研究において基礎的な役割を果たし, その重要性が認識された. 特に, 次の Donaldson[5] と Gompf[7] の結果によって, Lefschetz pencil と 4 次元シンプレクティック多様体 (非退化な閉 2 次形式を持つ 4 次元多様体) の密接な関係が明らかにされた.

定理 1.1 ([5],[7]). C^{∞} 級有向閉 4 次元多様体 X がシンプレクティック構造を持つことと Lefschetz pencil の構造を持つことは必要十分条件である.

定理 1.1 が現れたのを契機に, 4 次元トポロジーにおいて Lefschetz pencil(或いは Lefschetz fibration) の研究やその構成が本格化し, 現在も活発に行われている.

4 次元シンプレクティック多様体は K3 曲面や一般型曲面を含んでおり, 複素曲面のきれいな性質をトポロジーのカテゴリーに拡張したような性質を持つ. また, 4 次元シンプレクティック多様体からエキゾチック (同相かつ微分同相) な例が豊富に構成されてきたこともあり, 4 次元トポロジーにおける重要な研究対象である. 4 次元シンプレクティック多様体の豊富さを表す定理として, 次のものがある.

定理 1.2 ([6]). 任意の有限表示群 Γ に対し, 基本群が Γ と同型であるような 4 次元シンプレクティック多様体 X が存在する.

以上の結果を組み合わせることにより, 次の結果を得る.

系 1.3. 任意の有限表示群 Γ に対し, Lefschetz pencil の構造を持ち, 基本群が Γ と同型であるような C^{∞} 級有向閉 4 次元多様体 X が存在する.

系 1.3 は Lefschetz pencil を具体的に構成しているわけではない. 一方, 構成的な別証明が Amorós-Bogomolov-Katzarkov-Pantev [1] により与えられている. さて,「Lefschetz pencil」と「境界付き有向曲面の写像類群の **positive factorization** という関係式」が互いに対応していることが知られている. つまり, Lefschetz pencil を与えると positive factorization が与えられ, その逆も成り立つ. しかしながら, 系 1.3 や [1] で与えられた Lefschetz pencil に対応する positive factorization はわからない. 本稿では, そのような positive factorization 達を具体的に与える.

本稿の概略を述べる. 第 2 節では Lefschetz pencil と写像類群の定義を述べ, Lefschetz pencil と写像類群の positive factorization との関係を述べる. 第 3 節では, Lefschetz pencil の具体例と Lefschetz pencil の構造を持つ 4 次元多様体の基本群の計算方法を紹介する. 最後に, 主結果を紹介する. 本稿では, 紹介する結果の証明は省略し, 主結果においては証明の概略を述べるにとどめる.

2. Lefschetz pencil と写像類群の positive factorization

この節では, Lefschetz pencil と写像類群の定義とそれらの関係について紹介する. Lefschetz pencil と後に紹介する写像類群の positive factorization との対応により, 組合せ的な議論が可能になった. 写像類群の性質と Lefschetz pencil の性質の相互応用が可能であることから, 両側の側面から活発に研究されている.

まず, Lefschetz pencil の定義を紹介する. X を C^∞ 級有向閉 4 次元多様体, $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ を空でない有限個の X の点集合, Σ_g を種数 g の C^∞ 級有向閉曲面とする.

定義 2.1. X が種数 g の **Lefschetz pencil** の構造を持つとは, C^∞ 級写像 $f : X - B \to S^2$ が次の条件 (1), (2), (3) を満たすときをいう.

(1): 各 $x_i \in B$ の近傍において, f は射影化 $\mathbb{C}^2 - \{0\} \to \mathbb{CP}^1$ に同型である,

(2): f は有限個の臨界値 $b_1, b_2, \dots, b_t \in S^2$ を持ち, $f^{-1}(b) \cup B$ ($b \in S^2 - \{b_1, b_2, \dots, b_t\}$) は X の部分多様体であり, $f^{-1}(b) \cup B \cong \Sigma_g$ となる. B を **base locus** という.

(3): 各 $f^{-1}(b_i)$ は唯 1 つの臨界点 $p_i \in X$ を持つ. 各 p_i の周りでは, p_i, b_i を中心とする局所複素座標 $(z_1, z_2), w$ が存在し, f は

$$w = f(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$$

と表示される. さらに局所複素座標が定める向きは X, S^2 の向きと両立している.

各 $f^{-1}(b_i) \cup B$ は $f^{-1}(b) \cup B$ ($\cong \Sigma_g$) 上のある単純閉曲線 v_i を 1 点に縮めることによって得られる (つまり, $f^{-1}(b_i) \cup B$ は singular surface である). v_i を Lefschetz pencil f の **vanishing cycle** と呼ぶ. 本稿では, 各 v_i は本質的 (v_i は disk の境界ではない) と仮定する.

次に写像類群の定義を紹介する.

定義 2.2. Σ_g^m を境界 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ を持つ種数 g の有向曲面とする. Σ_g^m の向きを保ち, 境界 $\delta_1.\delta_2, \dots, \delta_m$ 上の点を保つ微分同相写像全体のなす群を $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g^m$ とおく. このとき, 境界 $\delta_1.\delta_2, \dots, \delta_m$ 上の点を保つような isotopy による $\mathrm{Diff}_+\Sigma_g^m$ の商群

$$\mathcal{M}_g^m := \mathrm{Diff}_+\Sigma_g^m/\text{isotopy}$$

を Σ_g^m の**写像類群**と呼ぶ. また, 図 1 のような $\mathcal{M}_g^m$ の元を t_c とかき, Σ_g^m 上の単純閉曲線 c に沿った (right-handed) **Dehn twist** と呼ぶ. 境界 δ_j に沿う (right-handed) Dehn twist を t_{δ_i} とかく.

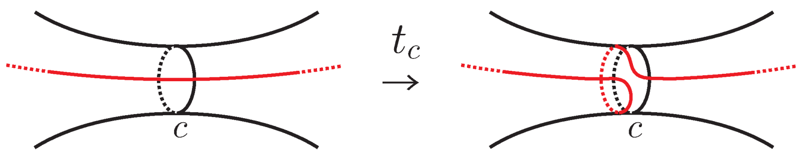

Figure 1. 単純閉曲線 c に沿った Dehn twist.

非分離的な単純閉曲線に沿う Dehn twist は写像類群の生成元であることが知られており (see [4]), 様々な場面で現れる重要な元である. 次に紹介する positive factorization はこの Dehn twist によって表される関係式のことである.

定義 2.3. 写像類群 $\mathcal{M}_g^m$ の元 $t_{\delta_1}t_{\delta_2}\cdots t_{\delta_m}$ を考える．このとき，次のような $t_{\delta_1}t_{\delta_2}\cdots t_{\delta_m}$ の単純閉曲線 u_i $(i=1,2,\ldots,t)$ に沿う Dehn twist による因数分解

$$t_{\delta_1}t_{\delta_2}\cdots t_{\delta_m} = t_{u_1}t_{u_2}\cdots t_{u_t}$$

を **positive factorization** と呼ぶ.

第 1 節で紹介したように, Lefschetz pencil と positive factorization には対応がある．より正確に述べると, 次の事実が知られている．

事実 2.4. Σ_g を Σ_g^m の境界 $\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_m$ に disk を貼り付けて得られたものし，この埋め込み写像を $\iota:\Sigma_g^m\hookrightarrow\Sigma_g$ とかく．また, 定義 2.1 の記号において, 向きを保つ微分同相写像 $\Phi: f^{-1}(b)\cup B\to\Sigma_g$ を固定する．このとき, $|B|=m$ で vanishing cycle $v_1,v_2,\ldots,v_t$ を持つ種数 g の Lefschetz pencil $f: X-B\to S^2$ に対し, 次のような $\mathcal{M}_g^m$ の positive factorization が定まる:

$$t_{\delta_1}t_{\delta_2}\cdots t_{\delta_m} = t_{u_1}t_{u_2}\cdots t_{u_t} \qquad (\text{in } \mathcal{M}_g^m)$$

ただし, Σ_g^m 上の単純閉曲線 $c_1,c_2,\ldots,c_t$ は $\Phi(v_i)\sim\iota(u_i)$ を満たす ("$\sim$" は isotopic を表す)．逆に, このような positive factorization を与えると, 上記のような Lefschetz pencil が定まる．

3. Lefschetz pencil の例と基本群の計算方法

ここでは, Korkamz [12] によって与えられた Lefschetz pencil(に対応する positive factorization) の例を紹介する．本稿の主結果は, この例を用いて構成される．

Σ_g^2 を考える．g が偶数 (resp. 奇数) のとき, $B_0,B_1,\ldots,B_g$, c (resp. a,b) を図 2 のような Σ_g^2 上の単純閉曲線とする．g が偶数 (resp. 奇数) のとき, $t_{\delta_1}t_{\delta_2}$ は, 次のような $2g+4$ 個 (resp. $2g+10$ 個) の Dehn twist による positive factorization を持つ:

$$t_{\delta_1}t_{\delta_2} = \begin{cases} (t_{B_0}t_{B_1}\cdots t_{B_g}t_c)^2 & (g:\text{even}) \\ (t_{B_0}t_{B_1}\cdots t_{B_g}t_a^2t_b^2)^2 & (g:\text{odd}). \end{cases}$$

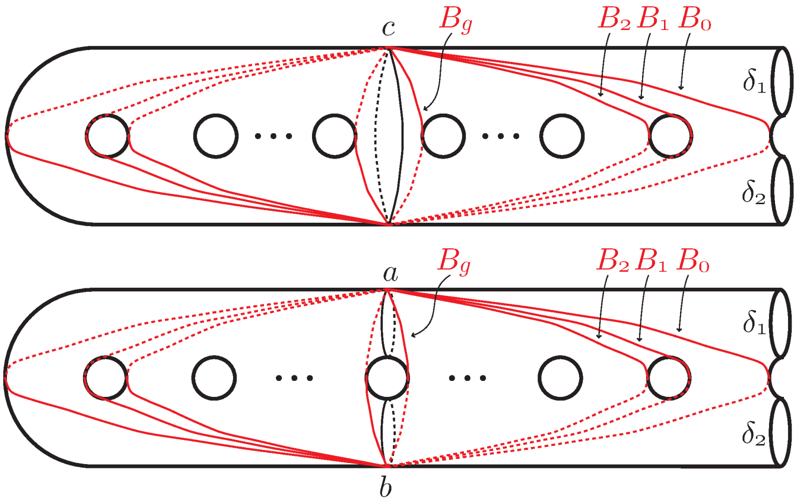

FIGURE 2. Σ_g^2 上の単純閉曲線 $B_0,B_1,\ldots,B_g,a,b,c$ と境界 δ_1,δ_2.

簡単のため, 右辺を

$$W := \begin{cases} (t_{B_0}t_{B_1}t_{B_2}\cdots t_{B_g}t_c)^2 & (g:\text{even}) \\ (t_{B_0}t_{B_1}t_{B_2}\cdots t_{B_g}t_a^2t_b^2)^2 & (g:\text{odd}) \end{cases}$$

とおくと, 事実 2.4 より, W に対応する Lefschetz pencil が存在する. W に対応する種数 g の Lefschetz pencil を

$$f_W : X_W^g - B_W \to S^2$$

とおくと, $t_{\delta_1}t_{\delta_2} = W$ より, $|B_W| = 2$ である.

W は, positive relator と呼ばれる閉曲面の写像類群の関係式の "lift" になっている. そのような positive relator は $g = 2$ の場合に松本幸夫氏 [13] により構成され, 後に, Cadavid[3], Korkmaz[11] により, 独立に, $g \geq 3$ の場合に拡張された.

次に, Lefschetz pencil の構造を持つ 4 次元多様体の基本群の計算方法を紹介する.

補題 3.1 (cf.[7]). $|B| = m$ で種数 g の Lefschetz pencil $f : X - B \to S^2$ に対応する positive factorization が $t_{\delta_1}t_{\delta_2}\cdots t_{\delta_m} = t_{u_1}t_{u_2}\cdots t_{u_t}$ であるとする. このとき,

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(\Sigma_g^m)/N(u_1, u_2, \ldots, u_t, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$$

となる. ここで, $N(u_1, u_2, \ldots, u_t, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$ は, $u_1, u_2, \ldots, u_t, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ を基本群 $\pi_1(\Sigma_g^m)$ の元と見なしたときの, $u_1, u_2, \ldots, u_t, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ により生成される $\pi_1(\Sigma_g^m)$ の正規部分群とする.

先ほど紹介した 4 次元多様体 X_W^g の基本群を補題 3.1 に基づいて計算すると,

(1) g が偶数のとき,

$$\pi_1(X_W^g) = \pi_1(\Sigma_g^2)/N(B_0, B_1, \ldots, B_g, c_r, \delta_1, \delta_2) \cong \pi_1(\Sigma_{g/2})$$

(2) g が奇数のとき,

$$\pi_1(X_W^g) = \pi_1(\Sigma_g^2)/N(B_0, B_1, \ldots, B_g, a, b, \delta_1, \delta_2) \cong \pi_1(\Sigma_{(g-1)/2})$$

となる.

4. 主結果

この節で主結果とその証明の概略を述べる. そのために必要な用語の定義を行う.

定義 4.1 ([12]). n 個の生成元と k 個の関係式を持つ有限表示群

$$\Gamma = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \mid r_1, r_2 \ldots, r_k \rangle \tag{1}$$

を考える. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ で生成される階数 n の自由群を F_n とおく. $w \in F_n$ に対し, $l(w)$ を次のように定義する.

$$l(w) = \min\{s \mid w = a_{i_1}^{m_1}a_{i_2}^{m_2}\cdots a_{i_s}^{m_s},\ 1 \leq i_j \leq n,\ m_j \in \mathbb{Z}\}.$$

$l(w)$ を w の **syllable length** と呼ぶ. さらに,

$$l = \max\{l(r_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$$

と定める. ただし, $k = 0$ のとき, $l = 1$ とする.

l は Γ の表示に依存する. また, r_i は常に cyclically reduced であると仮定する. 以上で主結果を述べる準備が整った.

主結果 4.2 ([10]). Γ を定義 4.1 の表示を持つ有限表示群とする. $k \geq 1$ (resp. $k = 0$) のとき, 任意の $g \geq 4(n+l-1)+k$ (resp. $g \geq 4n+2$) に対し, 種数 g の Lefschetz pencil $f : X - B \to S^2$ で, $\pi_1(X) \cong \Gamma$ かつ $|B| = 2$ となるものが存在する. さらに, これらの Lefschetz pencil に対応する positive factorization は具体的にわかる.

主結果 4.2 の証明の概略. g を偶数とする. 図 2 のような Σ_g^2 上の単純閉曲線 c とある単純閉曲線 $x_1, x_2, \ldots, x_t$ が $\mathcal{M}_g^m$ で次のような関係式.

$$t_c = t_{x_1} t_{x_2} \cdots t_{x_t}.$$

が成り立つとする. 簡単のため,

$$T := t_{x_1} t_{x_2} \cdots t_{x_t}$$

とおく. このとき, $\mathcal{M}_g^m$ の元 ϕ が $\phi(c) = c$ をみたすものを考えると, 写像類群の関係式 $t_{\phi(c)} = \phi t_c \phi^{-1}$ から,

$$t_c = t_{\phi(x_1)} t_{\phi(x_2)} \cdots t_{\phi(x_t)}.$$

が成り立つ. 同様に, 簡単のため

$$T_\phi := t_{\phi(x_1)} t_{\phi(x_2)} \cdots t_{\phi(x_t)}$$

とおく. よって, g が偶数のとき, 第 3 章の例と $t_c = T = T_\phi$ から, 次のような positive factorization を得る:

$$\begin{aligned} t_{\delta_1} t_{\delta_2} &= (t_{B_0} t_{B_1} \cdots t_{B_g} T)(t_{B_0} t_{B_1} \cdots t_{B_g} T_\phi) \\ &\Big(= (t_{B_0} t_{B_1} \cdots t_{B_g} t_{u_1} t_{u_2} \cdots t_{u_t})(t_{B_0} t_{B_1} \cdots t_{B_g} t_{\phi(u_1)} t_{\phi(u_2)} \cdots t_{\phi(u_t)})\Big) \end{aligned}$$

この positive factorization の右辺を

$$W_{T,\phi} := (t_{B_0} t_{B_1} \cdots t_{B_g} T)(t_{B_0} t_{B_1} \cdots t_{B_g} T_\phi)$$

とおくと, 事実 2.4 より, $W_{T,\phi}$ に対応する種数 g の Lefschez pencil $f_{W_{T,\phi}} : X^g_{W_{T,\phi}} - B_{W_{T,\phi}} \to S^2$ が定まる. $t_{\delta_1} t_{\delta_2} = W_{T,\phi}$ より, $|B_{W_{T,\phi}}| = 2$ である. さらに, 補題 3.1 より,

$$\pi_1(X_W^g) = \pi_1(\Sigma_g^2)/N(B_0, B_1, \ldots, B_g, x_1, x_2, \ldots, x_t, \phi(x_1), \phi(x_2), \ldots, \phi(x_t), \delta_1, \delta_2)$$

となる.

与えられた有限表示群 Γ とその表示 (1) に対し, T と ϕ を上手く選ぶと, $\pi_1(X^g_{W_{T,\phi}}) \cong \Gamma$ を得る. その選び方に関しては, [12], [2], [9] のアイデアに基づく. g が奇数のときも同様の議論を行う. $\square$

謝辞. 研究集会「変換群の位相幾何と代数構造」にお招き下さった主催者の皆様に, 心より感謝を申し上げます.

References

[1] J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov, and T. Pantev; *Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups,* J. Differential Geom. **54** (2000), no. 3, 489–545.

[2] A. Akhmedov and B. Ozbagci; *Exotic stein fillings with arbitrary fundamental group,* arXiv:1212.1743.

[3] C. Cadavid; *A remarkable set of words in the mapping class group*, Dissertation, Univ. of Texas, Austin, 1998.

[4] M. Dehn; *Die Gruppe der Abbildungsklassen,* Acta Math. **69** (1938), 135–206.

[5] S. K. Donaldson; *Lefschetz pencils on symplectic manifolds,* J. Diff. Geom. **53** (1999), 205–236.
[6] R. Gompf; *A new construction of symplectic manifolds,* Ann. of Math. **142** (1995), 527–595.
[7] R. Gompf and A. Stipsicz; *4-manifolds and Kirby calculus,* Graduate Studies in Mathematics, vol. 20, American Math. Society, Providence 1999.
[8] D. Johnson; *Homeomorphisms of a surface which act trivially on homology,* Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), 119–125.
[9] R. Kobayashi; *On genera of Lefschetz fibrations and finitely presented groups,* arXiv:1403.7736v1 [math.GT], 2014.
[10] R. Kobayashi and N. Monden; *Lefschetz pencils and finitely presented groups,* arXiv:1404.5380.
[11] M. Korkmaz; *Noncomplex smooth 4-manifolds with Lefschetz fibrations,* Internat. Math. Res. Not. (2001), no. 3, 115–128.
[12] M. Korkmaz; *Lefschetz fibrations and an invariant of finitely presented groups,* Internat. Math. Res. Not. (2009), no. 9, 1547–1572.
[13] Y. Matsumoto; *Lefschetz fibrations of genus two — a topological approach,* Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), 123–148, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Tokyo University of Science, Noda, Chiba, 278-8510, Japan

E-mail address: `kobayashi_ryoma@ma.noda.tus.ac.jp`

Department of Engineering Science, Osaka Electro-Communication University, Hatsu-cho 18-8, Neyagawa, 572-8530, Japan

E-mail address: `monden@isc.osakac.ac.jp`