数理解析研究所講究録
第 1923 巻 2014 年 172-178

Halpern 型不動点近似アルゴリズムとハイブリッド最急降下法

千葉大学・法経学部 青山 耕治
Koji Aoyama
Faculty of Law and Economics,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47J20, 47H09, 47H10.
Keywords and phrases. ハイブリッド最急降下法, 変分不等式, 非拡大写像, 不動点.

概要

ハイブリッド最急降下法 [19] による点列が, ある変分不等式問題の解に収束するための十分条件に関する結果 [5,7] の紹介と解説を行う。

1 はじめに

本稿では, 次の変分不等式問題を考える[*1]。

問題 1.1. H を実 Hilbert 空間, $\{T_n\}$ を H 上の非拡大写像の列, F を $\{T_n\}$ の共通不動点の集合, κ および η を正の定数, A を H 上の κ-強単調かつ η-Lipschitz 連続な写像とする。このとき, 任意の $y \in F$ に対して $\langle y - w, Aw \rangle \geq 0$ を満たす $w \in F$ を求めよ。

問題 1.1 のもとで, H の二つの点列 $\{x_n\}$ および $\{y_n\}$ に注目する。$\{\lambda_n\}$ を $[0,1]$ の数列とするとき, 一つ目の $\{x_n\}$ は, $u \in H, x_1 \in H$ と各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + (1 - \lambda_n) T_n x_n \tag{1.1}$$

で定義される点列である。二つ目の $\{y_n\}$ は, $y_1 \in H$ と各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$y_{n+1} = (I - \lambda_n A) T_n y_n \tag{1.2}$$

で定義される点列である。ここで, I は H 上の恒等写像である。

点列 $\{x_n\}$ は, 非拡大写像の不動点近似アルゴリズムの一つで, Halpern 型と呼ばれる。ある仮定のもとで, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ へ強収束することが知られている [2,6,8,14,18]。ここで, $P_F(u)$ は, u からの距離が最短となる F 上の点である。

---

*1 この問題を理解するために必要な事項は, 次節で説明する。

一方, $\{y_n\}$ は, 問題 1.1 のような非拡大写像の不動点集合上の変分不等式問題を近似するための計算アルゴリズムとして文献 [19] で提案されたもので, ハイブリッド最急降下法 (hybrid steepest descent method) と呼ばれる。[19] で指摘されている通り, $A = I - u$ のとき, 問題 1.1 は $P_F(u)$ を求める問題と同値になり, $y_1 = x_1$ とすれば, 点列 $\{y_n\}$ と $\{x_n\}$ は同じになる。つまり, ある仮定のもとで $\{y_n\}$ が問題 1.1 の解へ収束するならば, 同じ仮定のもとで $\{x_n\}$ が $P_F(u)$ へ収束することになる。

本稿では, その逆の関係について考察する。そして, ある仮定のもとで, 点列 $\{x_n\}$ が収束することは, $\{y_n\}$ が収束するための十分条件であることを示す。

2 準備

以下, H を実 Hilbert 空間, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, I を H 上の恒等写像, C を H の空でない閉凸部分集合, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。

写像 $S\colon C \to C$ が Lipschitz 連続であるとは, ある定数 $\eta \geq 0$ が存在し, すべての $x, y \in C$ に対して $\|Sx - Sy\| \leq \eta\|x - y\|$ が成り立つときをいう。このとき, S は η-Lipschitz 連続であるといわれる。特に, S が 1-Lipschitz 連続のとき, S は非拡大 (nonexpansive) であるといい, $0 \leq \eta < 1$ のとき, η-Lipschitz 連続写像を η-縮小写像 (contraction) という。写像 $S\colon C \to C$ の不動点 (fixed point) の集合を $\mathrm{Fix}(S)$ で表す。つまり, $\mathrm{Fix}(S) = \{z \in C : Sz = z\}$ である。S が非拡大のとき, $\mathrm{Fix}(S)$ は H の閉凸部分集合であることが知られている (例えば, [16] を参照)。このことから, 問題 1.1 の F は閉凸であることがわかる。

C は閉凸であるから, 各 $x \in H$ に対して, $\|z - x\| = \min\{\|y - x\| : y \in C\}$ となる点 $z \in C$ がただ一つ存在する。x に z を対応させる写像を P_C と表し, P_C を H から C の上への距離射影 (metric projection) という。距離射影 P_C は非拡大であり, $u \in H$, $z \in C$ のとき

$$z = P_C(x) \Leftrightarrow \langle y - z, u - z\rangle \leq 0 \, (\forall y \in C)$$

となることが知られている (例えば, [16] を参照)。このことから, 問題 1.1 で $u \in H$, $A = I - u$ のとき, その解は $P_F(u)$ であることがわかる。

C 上の写像の列 $\{S_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは, 以下が成り立つときをいう [2,4,10–13]。

> $\{x_n\}$ が C の有界点列で $x_n - S_n x_n \to 0$ ならば, $\{x_n\}$ の弱収積点 (weak cluster point) は $\{S_n\}$ の共通不動点である。

写像 $A\colon H \to H$ が強単調 (strongly monotone) であるとは, ある定数 $\kappa > 0$ が存在し,

すべての $x, y \in H$ に対して $\langle x-y, Ax-Ay\rangle \geq \kappa \|x-y\|^2$ が成り立つときをいう。このとき, A を κ-強単調写像という。

本節の最後に, 問題 1.1 に関する注意点を述べる。

註 1. 問題 1.1 において, 一般性を失うことなく, $\eta^2 < 2\kappa$ と仮定できる。実際, $0 < \mu < 2\kappa/\eta^2$ となる実数 μ をとり, $\tilde{\kappa} = \mu\kappa$, $\tilde{\eta} = \mu\eta$, $\tilde{A} = \mu A$ とおくと, $\tilde{A}$ は $\tilde{\kappa}$-強単調かつ $\tilde{\eta}$-Lipschitz 連続であり

$$(\tilde{\eta})^2 = \mu(\mu\eta^2) < 2\mu\kappa = 2\tilde{\kappa}$$

となる。さらに, $\langle y-z, Az\rangle \geq 0 \Leftrightarrow \left\langle y-z, \tilde{A}z\right\rangle \geq 0$ も容易に確かめられる。つまり, 問題 1.1 は, それと同値な $\tilde{A}$ に関する変分不等式問題へ書き換えられる。

註 2. 問題 1.1 の解は $P_F(I-A)$ の不動点であり, $P_F(I-A)$ は H 上の縮小写像である [5, Lemma 2.4]。したがって, 縮小写像の不動点定理より, 問題 1.1 の解は一意に存在し, 任意の $x \in H$ に対して点列 $\left\{\left(P_F(I-A)\right)^n x\right\}$ は, その解へ収束することがわかる。このように, P_F を使えば, 問題 1.1 の解を近似的に求めること (計算で求めること) は容易である。しかし, 本稿では P_F を使わない近似法であるハイブリッド最急降下法に焦点をあてる。

3 ハイブリッド最急降下法と Halpern 型不動点近似法

本節ではまず, 問題 1.1 の求解アルゴリズムであるハイブリッド最急降下法と, Halpern 型アルゴリズムの関係に関する結果を述べる (定理 3.1)。そして, 問題 1.1 の $\{T_n\}$ にある条件を仮定すれば, ハイブリッド最急降下法により, 問題 1.1 の解が近似できることを示す。

次の定理は, Halpern 型の点列 $\{x_n\}$ が収束することが, ハイブリッド最急降下法による点列 $\{y_n\}$ が収束するための十分条件であることを示している [5,7]。

定理 3.1. H, $\{T_n\}$, F, κ, η および A を問題 1.1 と同じとし, $\eta^2 < 2\kappa$ とする。また, $\{\lambda_n\}$ を $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ を満たす $[0,1]$ の数列とする。さらに

> 任意の $x, u \in H$ に対し, $x_1 = x$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して式 (1.1) で定義される点列 $\{x_n\}$ が $P_F(u)$ に強収束する

と仮定する。点列 $\{y_n\}$ を, $y_1 \in H$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.2) で定義する。このとき, $\{y_n\}$ は問題 1.1 の解へ強収束する。

定理 3.1 の「$\{x_n\}$ が $P_F(u)$ に強収束する」という仮定は, $\{T_n\}$ および $\{\lambda_n\}$ に条件を加えることで成り立つことが知られている。たとえば, [3,8] より, 次の定理が得られる。

定理 3.2. H, $\{T_n\}$ および F は問題 1.1 と同じとする。$\{\lambda_n\}$ を $[0,1]$ の数列で, 以下の条件を満たすとする。

$$\lambda_n \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty, \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty. \tag{3.1}$$

さらに, $\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たし, すべての空でない有界集合 $D \subset H$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{\|T_{n+1}y - T_n y\| : y \in D\} < \infty \tag{3.2}$$

が成り立つとする。x, u を H の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = x$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.1) で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する。

定理 3.2 で, $\{T_n\}$ が一つの非拡大写像 $T\colon H \to H$ の繰り返しになっている場合, つまり, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $T_n = T$ の場合は, Wittmann [18] の定理としてよく知られている*2。

定理 3.1 および定理 3.2 を使えば, 次の結果が直ちに得られる。

定理 3.3. H, $\{T_n\}$, F, κ, η および A は問題 1.1 と同じとし, $\eta^2 < 2\kappa$ とする。$\{\lambda_n\}$ を (3.1) を満たす $[0,1]$ の数列とする。さらに, $\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たし, 任意の空でない有界集合 $D \subset H$ に対して (3.2) を満たすとする。点列 $\{y_n\}$ を, $y_1 \in H$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.2) で定義する。このとき, $\{y_n\}$ は問題 1.1 の解に強収束する。

証明. $x, u \in H$ とする。定理 3.2 より, $x_1 = x$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して (1.1) で定義される点列 $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ へ強収束する。したがって, 定理 3.1 より結論を得る。 □

4 周辺の結果

前節の定理 3.3 より, $\{T_n\}$ にいくつかの制限を加えると, ハイブリッド最急降下法により, 問題 1.1 の解が近似できることがわかった。本節では, その $\{T_n\}$ の制限をはずすことを考える。たとえば, アルゴリズムを少し変更することによって, それは実現可能であることが知られている。ここでは, [15] の結果を引用し, それと定理 3.1 の関係を述べる。

---

*2 厳密には, [18] では $x_1 = u$ の場合の結果が得られている。

定理 4.1 ([15, Theorem 3.1]). H, $\{T_n\}$, F, κ, η および A は問題 1.1 と同じとし, $\eta^2 < 2\kappa$ とする。$\{\lambda_n\}$ を

$$\lambda_n \to 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \tag{4.1}$$

を満たす $[0,1]$ の数列, $\{\gamma_n\}$ を $[a,b]$ の数列とする。ここで, $0 < a \leq b < 1$ である。各 $n \in \mathbb{N}$ および $k \in \{1,2,\ldots,n+1\}$ に対して, 写像 $U_{n,k}$ を $U_{n,n+1} = I$ および

$$U_{n,k} = \gamma_k T_k U_{n,k+1} + (1-\gamma_k)I \quad (1 \leq k \leq n)$$

で定義する。点列 $\{y_n\}$ を $y_1 \in H$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$y_{n+1} = (I - \lambda_n A)U_{n,1}y_n \tag{4.2}$$

で定義する。このとき, $\{y_n\}$ は問題 1.1 の解へ強収束する。

定理 3.1 と次の結果 [2,6] を用いると定理 4.1 を示すことができる。

定理 4.2. H, $\{T_n\}$ および F は問題 1.1 と同じとする。$\{\lambda_n\}$ および $\{\beta_n\}$ を (4.1) および

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \beta_n, \limsup_{n\to\infty} \beta_n < 1 \tag{4.3}$$

を満たす $[0,1]$ の数列とする。さらに, $\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たし, すべての空でない有界集合 $D \subset C$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\|T_{n+1}y - T_n y\| : y \in D\} = 0 \tag{4.4}$$

が成り立つとする。u, x を H の点とし, 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = x$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + (1-\lambda_n)\big(\beta_n x_n + (1-\beta_n)T_n x_n\big) \tag{4.5}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する。

定理 4.1 の証明. $S_n = T_1 U_{n,2}$ とおく。明らかに, S_n は H 上の非拡大である。[17, Lemma 3.2] より

$$\mathrm{Fix}(S_n) = \mathrm{Fix}(U_{n,1}) = \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Fix}(T_k)$$

が成り立つことが知られている。よって

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(S_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(U_{n,1}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{n} \mathrm{Fix}(T_k) = F$$

が得られる。また, [4,6,11,13] の結果を踏まえると, $\{S_n\}$ は条件 (Z) を満たし, 任意の空でない有界部分集合 $D \subset H$ に対して (4.4) が成り立つことが知られている。よって, 任意の $x, u \in H$ に対して, 点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = x$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + (1 - \lambda_n) U_{n,1} x_n = \lambda_n u + (1 - \lambda_n)\big((1 - \gamma_1) x_n + \gamma_1 S_n x_n\big)$$

で定義すると, 定理 4.2 より, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ へ強収束する。ゆえに, 定理 3.1 より結論を得る。 □

定理 3.2 と定理 4.2 は似ているが, 互いに独立である。なぜなら, $\{\lambda_n\}$ および $\{T_n\}$ に対する仮定は定理 3.2 の方が強いが, 後者では式 (4.3) を仮定しているため, (4.5) で $\beta_n \equiv 0$ とすることはできないからである。

参考文献

[1] M. Akatsuka, K. Aoyama, and W. Takahashi, *Mean ergodic theorems for a sequence of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Sci. Math. Jpn. **68** (2008), 233–239.

[2] K. Aoyama, *An iterative method for fixed point problems for sequences of nonexpansive mappings*, Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2010, pp. 1–7.

[3] ———, *An iterative method for a variational inequality problem over the common fixed point set of nonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2010, pp. 21–28.

[4] ———, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III, Yokohama Publ., Yokohama, 2011, pp. 343–350.

[5] K. Aoyama and Y. Kimura, *A note on the hybrid steepest descent methods* (2011), available at `arXiv:1101.0881[math.FA]`.

[6] ———, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Applied Mathematics and Computation **217** (2011), 7537–7545.

[7] ———, *A note on the hybrid steepest descent methods*, Fixed Point theory and its Applications, House of the Book of Science Cluj-Napoca, Romania, 2013, pp. 73–80.

[8] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.

[9] ______, *Finding common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Sci. Math. Jpn. **66** (2007), 89–99.

[10] ______, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.

[11] ______, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2008, pp. 1–18.

[12] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.

[13] ______, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.

[14] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.

[15] S. Iemoto and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by a hybrid steepest descent method for countable nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Sci. Math. Jpn. **69** (2009), 227–240.

[16] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publ., Yokohama, 2009.

[17] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems*, Math. Comput. Modelling **32** (2000), 1463–1471.

[18] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings*, Arch. Math. (Basel) **58** (1992), 486–491.

[19] I. Yamada, *The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings*, Inherently parallel algorithms in feasibility and optimization their applications (Haifa, 2000), Stud. Comput. Math., vol. 8, North-Holland, Amsterdam, 2001, pp. 473–504.