数理解析研究所講究録
第 1925 巻 2014 年 73-77

The Dynkin index and parabolic subalgebra of Heisenberg type

東京大学 大学院数理科学研究科 久保 利久*
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要

$\mathfrak{g}$ を複素単純 Lie 代数とし, $\mathfrak{q}^H = \mathfrak{l}^H \oplus \mathfrak{n}^H$ を巾零根基 $\mathfrak{n}^H$ が Heisenberg 代数である複素放物型部分代数とする. 本稿では Dynkin index の公式から着想を得た式を元に, Levi 部分代数 $\mathfrak{l}^H$ の各単純イデアル $\mathfrak{l}_j^H$ より暗に得られるある 2 つの定数 $c(\mathfrak{l}_j^H)$, $p(\mathfrak{l}_j^H)$ を明示的に示す.

1 序

$\mathfrak{q}^H = \mathfrak{l}^H \oplus \mathfrak{n}^H$ を巾零根基 $\mathfrak{n}^H$ が Heisenberg 代数である複素放物型部分代数とする. 本稿の目的は Levi 部分代数 $\mathfrak{l}^H$ の各単純イデアル $\mathfrak{l}_j^H$ に付随するある 2 つの定数 $c(\mathfrak{l}_j^H)$, $p(\mathfrak{l}_j^H)$ に対して, 一様な式を与えることである. これら 2 つの定数 $c(\mathfrak{l}_j^H)$, $p(\mathfrak{l}_j^H)$ を明確にするべく, まず基本設定について述べることとする.

必要な記号の定義から始める. $\mathfrak{g}$ を複素単純 Lie 代数とする. Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を 1 つ固定し, $\Delta \equiv \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に対するルート系とする. 次に Borel 部分代数 $\mathfrak{b}$ を 1 つ選び, 対応する正ルート系を Δ^+ と書く. $\alpha \in \Delta$ に対し, $\mathfrak{g}_\alpha$ を α のルート空間とおく. 特に $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$. また $\rho := (1/2) \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ とし, 最高ルートを γ で表すこととする. $B_\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式を正数倍したものとし, 対応する $\mathfrak{h}^*$ 上の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ とおく. $B_\mathfrak{g}$ をどの様に正規化するかはこの後に記す. $\alpha \in \Delta$ に対し, $||\alpha||^2 := \langle \alpha, \alpha \rangle$, そして $\alpha^\vee := 2\alpha/||\alpha||^2$ と書くこととする.

次にルートベクトルなどの正規化について述べる. 本稿では各 $\alpha \in \Delta^+$ に対し, 下の条件 (C1)~(C5) を満たす様, $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, および $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ をとる.

(C1) 各 $\alpha \in \Delta$ に対し, $\{X_\alpha, H_\alpha, X_{-\alpha}\}$ は $\mathfrak{sl}(2)$-triple. 特に, $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$.

(C2) 各 $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して, $[H_\alpha, X_\beta] = \beta(H_\alpha) X_\beta$.

(C3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}$-span$\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$ 上で positive-definite.

(C4) $\alpha \in \Delta$ に対し, $B_\mathfrak{g}(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 2/||\alpha||^2$.

(C5) $\alpha, \beta \in \Delta$ に対し, $\beta(H_\alpha) = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle = 2\langle \beta, \alpha \rangle / ||\alpha||^2$.

また $B_\mathfrak{g}$ は最高ルート γ のルートベクトル X_γ に対し, $B_\mathfrak{g}(X_\gamma, X_{-\gamma}) = 1$ となるよう正規化する. これは (C4) より, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $||\gamma||^2 = 2$ とするよう正規化することと同値である.

次に巾零根基が Heisenberg 代数となる複素放物型部分代数 $\mathfrak{q}^H = \mathfrak{l}^H \oplus \mathfrak{n}^H$ について簡単に考察する. まず $\mathrm{ad}(X_\gamma)$ は $\mathfrak{g}$ 上で固有値 $-2, -1, 0, 1, 2$ を持つ. そこで $\mathfrak{g}(k)$ を固有値 k の固有空間とし, その固有空間分解を $\mathfrak{g} = \bigoplus_{j=-2}^{2} \mathfrak{g}(j)$ と書くことにすると, $\mathfrak{q}^H := \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(2)$ は Levi 部分代数 $\mathfrak{l}^H$ が $\mathfrak{l}^H = \mathfrak{g}(0)$, そして巾零根基 $\mathfrak{n}^H$ が $\mathfrak{n}^H = \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(2)$ となる複素放物型部分代数になる. 特に $\mathfrak{n}^H = \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(2)$ は Heisenberg

*E-mail address: toskubo@ms.u-tokyo.ac.jp

代数の構造を持つ. つまり $[\mathfrak{n}^H, \mathfrak{n}^H] \neq \{0\}$ であり, $\dim_{\mathbb{C}}[\mathfrak{n}^H, [\mathfrak{n}^H, \mathfrak{n}^H]] = 1$. 便宜上, 本稿ではこの放物型部分代数 $\mathfrak{q}^H = \mathfrak{g}(0) \oplus \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}(2)$ を **Heisenberg 型**放物型部分代数と呼ぶこととする. また $\mathfrak{g}(0) = \mathfrak{l}^H$, $\mathfrak{g}(2) = \mathfrak{g}_\gamma$ であることから,

$$\mathfrak{q}^H = \mathfrak{l}^H \oplus \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}_\gamma$$

と書く. さて, もし $\mathfrak{g}$ が A_2 型であれば, $\mathfrak{q}^H = \mathfrak{b}$ となり, $[\mathfrak{l}^H, \mathfrak{l}^H] = \{0\}$. また逆に $[\mathfrak{l}^H, \mathfrak{l}^H] = \{0\}$ となるのはこの場合に限るので, したがって, これ以降, $\mathfrak{g}$ は A_2 型ではないと仮定し, $[\mathfrak{l}^H, \mathfrak{l}^H] \neq \{0\}$ とする.

それではこれから本稿の主役である定数 $c(\mathfrak{l}_j^H)$, $p(\mathfrak{l}_j^H)$ の紹介に移る. これらは Barchini–Kable–Zierau がある一般 Verma 加群間の準同型を具体的に構成する際に発見したものである. 定数 $c(\mathfrak{l}_j^H)$, $p(\mathfrak{l}_j^H)$ と一般 Verma 加群間の準同型の関係については, [1] の Introduction, または [6] のそれを参照されたい.[1]

これら 2 つの数を紹介する最後の準備として以下の記号を定義しておく. W を複素簡約 Lie 代数の有限次元表現であるとしたとき, $\Delta(W)$ をそのウェイトの集合とする. また $\Delta(W)\backslash\{0\} \subset \Delta$ のとき, $\Delta^+(W) = \Delta(W) \cap \Delta^+$, そして $\Pi(W) = \Delta(W) \cap \Pi$ とおく.

定義 1.1. [1, Proposition 2.1] $\mathfrak{l}^H$ の各単純イデアル $\mathfrak{l}_j^H$ に対して, ある $c(\mathfrak{l}_j^H) \in \mathbb{C}$ が存在し, 全ての $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}(1))$, $\delta \in \Delta(\mathfrak{l}_j^H)$ に対して,

$$\sum_{\beta \in \Delta(\mathfrak{g}(1))} \langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \delta \rangle = c(\mathfrak{l}_j^H) \langle \alpha, \delta \rangle \tag{1}$$

を満たす.

定義 1.2. [1, Proposition 2.2] $[\mathfrak{l}^H, \mathfrak{l}^H]$ の単純イデアルによる直和を $[\mathfrak{l}^H, \mathfrak{l}^H] = \bigoplus_{j=1}^m \mathfrak{l}_j^H$ とする. このとき, 各単純イデアル $\mathfrak{l}_j^H$ に対して, ある $p(\mathfrak{l}_j^H) \in \mathbb{C}$ が存在し, 全ての $X \in \mathfrak{g}(1)$, $Y \in \mathfrak{g}(-1)$ に対して,

$$\sum_{\beta \in \Delta(\mathfrak{g}(1))} ||\beta||^2 [[X, X_{-\beta}], [X_\beta, Y]] = \sum_{j=1}^m p(\mathfrak{l}_j^H) pr_j([X, Y]) \tag{2}$$

を満たす. ここで pr_j は $[\mathfrak{l}^H, \mathfrak{l}^H]$ から $\mathfrak{l}_j^H$ への射影作用素である.

さて主役である定数 $c(\mathfrak{l}_j^H)$, $p(\mathfrak{l}_j^H)$ を紹介した所で, 次はそれらをどのように具体的に示すかだが, 今回 Dynkin index と呼ばれる指数の公式から着想を得た. それではここで主結果を求めるまでの大雑把な流れを述べ, 序節を終わらせることとする. 本稿はこの序節を含め全 4 節で構成される. まず第二節では Dynkin index について復習する. この節では Dynkin index の定義の他に Kumar–Narasimhan–Ramanathan によって与えられた (有限次元表現の) Dynkin index の公式に触れる (命題 2.3). またこの公式に手を加え, 我々の目的に沿うようにしたものを紹介・考察するのが第三節の目的である. W を $\mathfrak{l}^H$ の有限次元表現としたとき, 各 $\mathfrak{l}_j^H$ に対し, その「加工された Dynkin index」を $K(\mathfrak{l}_j^H; W)$ と表すこととする (定義 3.1). 第四節ではこの $K(\mathfrak{l}_j^H; \cdot)$ を用い, 主結果として, $c(\mathfrak{l}_j^H)$, $p(\mathfrak{l}_j^H)$ はそれぞれ $c(\mathfrak{l}_j^H) = K(\mathfrak{l}_j^H; \mathfrak{g}(1))$, $p(\mathfrak{l}_j^H) = K(\mathfrak{l}_j^H; \mathfrak{l}_j^H)$ と表されることを示す (定理 4.1, 4.4).

なお本稿は筆者の論文 [6] の要点をまとめた物である. 特に証明の多くは省いてあるので, 証明等を詳しく知りたい方は [6] を参照されたい.[2]

2 The Dynkin index

この節では簡単にだが Dynkin index について復習する. 特に断らない限り前節で定めた記号, 正規化をそのまま用いることとする. まず Dynkin index の定義から紹介する.

[1] [1], [6] 共に, 共形不変微分方程式系 (conformally invariant systems) と呼ばれるある微分作用素の系について書かれているため, 少々分かりづらいかも知れない. 共形不変微分方程式系と一般 Verma 加群については [2] を参照されたい.

[2] その場合, [6] では Heisenberg 型放物型部分代数 "$\mathfrak{q}^H = \mathfrak{l}^H \oplus \mathfrak{n}^H$" が単に "$\mathfrak{q} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$" と書かれていることに注意されたい.

定義 2.1. [4, Section 2] $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ を *2* つの複素単純 *Lie* 代数とする. もし $\phi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ を *Lie* 代数の準同型写像とすると, ある $m_\phi \in \mathbb{C}$ が存在して, 全ての $X, Y \in \mathfrak{g}_1$ に対して

$$B_{\mathfrak{g}_2}(\phi(X), \phi(Y)) = m_\phi B_{\mathfrak{g}_1}(X, Y)$$

を満たす. ここで $B_{\mathfrak{g}_i}(\cdot,\cdot)$ は前節と同じように正規化された $\mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i$ 上の *Killing* 形式である. この数 m_ϕ を ϕ **における *Dynkin index*** と呼ぶ.

Dynkin index は 1950 年代に複素単純 Lie 代数の単純 Lie 部分代数を分類する際に Dynkin によって考案された. 詳しくは [8] を参照されたい. 本稿では次に紹介する特別な場合の Dynkin index について主に考察する.

定義 2.2. [4, Section 2] V を複素単純 *Lie* 代数 $\mathfrak{g}$ の有限次元表現とする. このとき**表現 V に対する *Dynkin index*** m_V を *Lie* 代数の準同型写像

$$\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}(V)$$

に対する *Dynkin index* と呼ぶ. ここで $\mathfrak{sl}(V)$ はトレースが *0* の自己準同型写像の成す *Lie* 代数である.

この V に対する Dynkin index に関して, Kumar–Narasimhan–Ramanathan によって次の興味深い公式が成り立つことが示されている.

命題 2.3. [7, Lemma 5.2] m_V を有限次元表現 V に対する *Dynkin index* としたとき次が成り立つ:

$$m_V = \frac{1}{2} \sum_{\lambda \in \Delta(V)} \dim(V_\lambda) \langle \lambda, \gamma \rangle^2. \tag{3}$$

ここで γ は $\mathfrak{g}$ の最高ルートであり, V_λ はウェイト λ に対する V のウェイト空間である. 特に, 随伴表現 $(\mathfrak{g}, \mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ に対し, 次が成り立つ:

$$m_{\mathrm{ad}} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \langle \alpha, \gamma \rangle^2 = 2(1 + \langle \rho, \gamma^\vee \rangle). \tag{4}$$

ここで $m_{\mathrm{ad}} = 2(1 + \langle \rho, \gamma^\vee \rangle)$ の公式は (3) を用いずに Dynkin によって Kumar–Narasimhan–Ramanathan よりも先に与えられていることを断っておく ([4, Theorem 2.5]). また $1 + \langle \rho, \gamma^\vee \rangle$ は $\mathfrak{g}$ の *dual Coxeter number* と呼ばれる数である. (例えば [5, Section 6.1 and Exercise 6.2] を参照のこと.)

次節では式 (4) を改良し, 我々の目的に沿う形にする.

3 定数 $K(\mathfrak{l}_j; W)$

この節では Dynkin index に関する式 (4) を元に, $K(\mathfrak{l}_j; W)$ というある定数を定める. この定数 $K(\mathfrak{l}_j; W)$ が $c(\mathfrak{l}_j^H)$, $p(\mathfrak{l}_j^H)$ を明示的に示す際の鍵となる. また前節と同じく特に断らない限り, 記号, 定義は序節で定めたものを踏襲する.

定義 3.1. [6, Definition 4.1] $\mathfrak{l}$ を複素簡約 *Lie* 代数とする. このとき有限次元 $\mathfrak{l}$-加群 W, および $\mathfrak{l}$ の単純イデアル $\mathfrak{l}_j$ に対し, $K(\mathfrak{l}_j; W)$ を次に定める:[3]

$$K(\mathfrak{l}_j; W) := \frac{1}{||\xi_j||^2} \sum_{\lambda \in \Delta(W)} \dim(W_\lambda) \langle \lambda, \xi_j \rangle^2.$$

ここで W_λ は W のウェイト λ に対するウェイト空間であり, また ξ_j は $\mathfrak{l}_j$ の最高ルートである.

[3] [6] の Definition 4.1 では $\langle \gamma, \gamma \rangle = 2$ という正規化を施さない場合も想定して定義しているため, 本稿の定義と若干違うことに注意されたい. 本稿では常に $\langle \gamma, \gamma \rangle = 2$ を仮定した際の式を示すこととする.

定義より, $j=k$ でなければ $K(\mathfrak{l}_j;\mathfrak{l}_k)=0$ である. $j=k$ の場合, 次が成り立つ.

補題 3.2. [6, Lemma 4.2] $\rho(\mathfrak{l}_j):=(1/2)\sum_{\alpha\in\Delta^+(\mathfrak{l}_j)}\alpha$ としたとき

$$K(\mathfrak{l}_j;\mathfrak{l}_j)=2(1+\langle\rho(\mathfrak{l}_j),\xi_j^\vee\rangle). \tag{5}$$

特に $m_{\mathrm{ad}}(\mathfrak{l}_j)$ を $(\mathfrak{l}_j,\mathrm{ad},\mathfrak{l}_j)$ に対する *Dynkin index* とすれば, $K(\mathfrak{l}_j;\mathfrak{l}_j)=m_{\mathrm{ad}}(\mathfrak{l}_j)$.

命題 2.3 より,

$$\frac{1}{2}m_{\mathrm{ad}}=1+\langle\rho,\gamma\rangle$$

が成り立つ. $K(\mathfrak{l}_j;\cdot)$ に対しても同じ様な等式が成り立つことを示し, この節を終えることとする.

命題 3.3. [6, Proposition 4.4] $\mathfrak{g}=\bigoplus_{k=-r}^{r}\mathfrak{g}(k)$ を複素単純 *Lie* 代数とし, $\mathfrak{q}=\mathfrak{l}\oplus\mathfrak{n}=\mathfrak{g}(0)\oplus\bigoplus_{k>0}\mathfrak{g}(k)$ とする. このとき $\mathfrak{l}=\mathfrak{g}(0)$ の単純イデアル $\mathfrak{l}_j$ に対し,

$$\frac{1}{2}K(\mathfrak{l}_j;\mathfrak{l}_j)+\sum_{k=1}^{r}K(\mathfrak{l}_j;\mathfrak{g}(k))=1+\langle\rho,\gamma\rangle$$

が成り立つ. ここで γ は $\mathfrak{g}$ の最高ルート.

系 3.4. $\mathfrak{l}_j^H$ を *Heisenberg* 型放物型部分代数 $\mathfrak{q}^H=\mathfrak{l}^H\oplus\mathfrak{g}(1)\oplus\mathfrak{g}_\gamma$ の *Levi* 部分代数 $\mathfrak{l}^H$ の単純イデアルとする. このとき

$$\frac{1}{2}K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{l}_j^H\big)+K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{g}(1)\big)=1+\langle\rho,\gamma^\vee\rangle \tag{6}$$

が成り立つ.

証明. まず命題 3.3 より, $\mathfrak{g}(2)=\mathfrak{g}_\gamma$ であることから,

$$\frac{1}{2}K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{l}_j^H\big)+K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{g}(1)\big)+K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{g}_\gamma\big)=1+\langle\rho,\gamma^\vee\rangle$$

が成り立つ. ここで $\mathfrak{l}^H$ はその定義より $\mathfrak{l}^H=\mathfrak{g}(0)$, つまり $\mathrm{ad}(H_\gamma)$ の 0 固有空間である. 特に $\xi_j\perp\gamma$. 従って定義 3.1 より, $K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{g}_\gamma\big)=0$. かくして (6) が成り立つ. □

4 主結果

この節では主結果として, $c\big(\mathfrak{l}_j^H\big)=K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{g}(1)\big)$, および $p\big(\mathfrak{l}_j^H\big)=K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{l}_j^H\big)$ が成り立つことを示す. まず $c\big(\mathfrak{l}_j^H\big)=K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{g}(1)\big)$ から始めることとする.

定理 4.1. [6, Theorem 5.1] $\mathfrak{g}$ を A_2 型でない複素単純 *Lie* 代数とし, $\mathfrak{q}^H=\mathfrak{l}^H\oplus\mathfrak{g}(1)\oplus\mathfrak{g}_\gamma$ を *Heisenberg* 型複素放物型部分代数とする. $\mathfrak{l}_j^H$ を $\mathfrak{l}^H$ の単純イデアルとするとき

$$c\big(\mathfrak{l}_j^H\big)=K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{g}(1)\big) \tag{7}$$

が成り立つ.

定理 4.1 の証明だが, 方針としては Braden の補題 ([3, Lemma 1.3]) およびその一般化などを用いて, 定義 1.1, 3.1 より直接 (左辺)=(右辺) を示す. 詳しくは [6] を参照されたい.

次に (7) を用いて, $p\big(\mathfrak{l}_j^H\big)=K\big(\mathfrak{l}_j^H;\mathfrak{l}_j^H\big)$ を示す. これを示す上で Heisenberg 型放物型部分代数 $\mathfrak{q}^H=\mathfrak{l}^H\oplus\mathfrak{g}(1)\oplus\mathfrak{g}_\gamma$ に関する次の補題, 命題が効いてくる.

補題 4.2. [6, Lemma 5.2] 次の等式が成り立つ:

$$1 + \langle \rho, \gamma^\vee \rangle = \frac{\dim(\mathfrak{g}(1)) + 4}{2}.$$

命題 4.3. [1, Proposition 3.1] 次の等式が成り立つ:

$$\frac{1}{2} p\big(\mathfrak{l}_j^H\big) + c\big(\mathfrak{l}_j^H\big) = \frac{\dim(\mathfrak{g}(1)) + 4}{2}.$$

補題 4.2, 命題 4.3 を踏まえ, これから $p\big(\mathfrak{l}_j^H\big) = K\big(\mathfrak{l}_j^H; \mathfrak{l}_j^H\big)$ を示すこととする.

定理 4.4. $\mathfrak{g}$ を A_2 型でない複素単純 *Lie* 代数とし, $\mathfrak{q}^H = \mathfrak{l}^H \oplus \mathfrak{g}(1) \oplus \mathfrak{g}_\gamma$ を *Heisenberg* 型複素放物型部分代数とする. このとき $\mathfrak{l}^H$ の単純イデアル $\mathfrak{l}_j^H$ に対し,

$$p\big(\mathfrak{l}_j^H\big) = K\big(\mathfrak{l}_j^H; \mathfrak{l}_j^H\big) \tag{8}$$

が成り立つ.

証明. 系 3.4 より

$$\frac{1}{2} K\big(\mathfrak{l}_j^H; \mathfrak{l}_j^H\big) + K\big(\mathfrak{l}_j^H; \mathfrak{g}(1)\big) = 1 + \langle \rho, \gamma^\vee \rangle$$

が従う. 一方で命題 4.3 より,

$$\frac{1}{2} p\big(\mathfrak{l}_j^H\big) + c\big(\mathfrak{l}_j^H\big) = \frac{\dim(\mathfrak{g}(1)) + 4}{2}$$

が成り立つ. 特に補題 4.2 より

$$\frac{1}{2} K(\mathfrak{l}_j; \mathfrak{l}_j) + K(\mathfrak{l}_j; \mathfrak{g}(1)) = \frac{\dim(\mathfrak{g}(1)) + 4}{2} = \frac{1}{2} p(\mathfrak{l}_j) + c(\mathfrak{l}_j).$$

したがって (7) より, (8) が得られる. □

参考文献

[1] L. Barchini, A.C. Kable, and R. Zierau, *Conformally invariant systems of differential equations and prehomogeneous vector spaces of Heisenberg parabolic type*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **44** (2008), no. 3, 749–835.

[2] ———, *Conformally invariant systems of differential operators*, Advances in Math. **221** (2009), no. 3, 788–811.

[3] H.W. Braden, *Integral pairings and Dynkin indices*, J. London Math. Soc. **43** (1991), no. 2, 313–323.

[4] E.B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. II **6** (1957), 111–244.

[5] V.S. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras. third edition*, Progress in Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1990, xxii+400 pp.

[6] T. Kubo, *The Dynkin index and conformally invariant systems associated to parabolic subalgebras of Heisenberg type*, Osaka J. Math. **51** (2014), no. 2, 359–373.

[7] S. Kumar, M.S. Narasimhan, and A. Ramanathan, *Infinite Grassmannians and moduli spaces of G-bundles*, Math. Ann. **300** (1994), 41–75.

[8] D.I. Panyushev, *On the Dynkin index of a principal $\mathfrak{sl}_2$-subalgebra*, Advances in Math. **221** (2009), 1115–1121.