数理解析研究所講究録
第 1925 巻 2014 年 78-93

奇数次直交群の有限型多重旗多様体

龍谷大学・文学部　松木 敏彦
Toshihiko Matsuki
Faculty of Letters, Ryukoku University

1　多重旗多様体

G を無限体 $\mathbb{F}$ 上の代数群とし、$P_1, \ldots, P_k$ $(\neq G)$ を G の放物型部分群とする。このとき、次の多重旗多様体の G-軌道分解を考える。

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= (G/P_1) \times \cdots \times (G/P_k) \\ &\cong (G \times \cdots \times G)/(P_1 \times \cdots \times P_k)\end{aligned}$$

ただし、G は $\mathcal{M}$ に対角的に作用するものとする。すなわち

$$g \cdot (m_1, \ldots, m_k) = (gm_1, \ldots, gm_k)$$

とする。$\mathcal{M}$ が有限個の G-軌道に分解されるとき、 $\mathcal{M}$ は**有限型**であるという。

[MWZ99] は $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ のとき、
(1) $k \geq 4$ ならば $\mathcal{M}$ は無限型であることを示し、
(2) 3 重旗多様体 $\mathcal{M} = (G/P_1) \times (G/P_2) \times (G/P_3)$ が有限型になるための P_1, P_2, P_3 の条件を与え、
(3) (2) のときの軌道分解を quiver を用いて記述した。
(ただし、彼らは $\mathbb{F}$ を代数的閉体と仮定している。) [MWZ00] では $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F})$ のときに同じことを行なった。

2　奇数次直交群の有限型多重旗多様体

2.1　奇数次直交群の旗多様体

$\mathbb{F}$ を標数 $\neq 2$ の無限体とし、$\mathbb{F}^{2n+1}$ 上の対称双線形形式 (,) を

$$(e_i, e_j) = \delta_{i,2n+2-j}$$

で定義する。ただし、$e_1, \ldots, e_{2n+1}$ は $\mathbb{F}^{2n+1}$ の標準基底である。このとき、$2n+1$ 次 split 直交群 G が

$$\begin{aligned}G &= \{g \in \mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{F}) \mid (gu, gv) = (u, v) \text{ for all } u, v \in \mathbb{F}^{2n+1}\} \\ &\quad (= \mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{F}) \text{ と書く})\end{aligned}$$

で定義される。

$\mathbb{F}^{2n+1}$ の部分空間 V は $(V,V)=\{0\}$ のとき **isotropic** であるといい、さらに $\dim V = n$ のとき、**maximally isotropic** であるという。正の整数列 $\mathbf{a}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ であって

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_p\le n$$

を満たすものによって、G の旗多様体

$$\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}=\{V_1\subset\cdots\subset V_p \mid \dim V_j=\alpha_1+\cdots+\alpha_j,\ V_p\ \text{は isotropic}\}$$

が定義される。G の標準的旗

$$\mathcal{F}_0:\mathbb{F}e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}e_{\alpha_1}\subset\cdots\subset\mathbb{F}e_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{F}e_{\alpha_1+\cdots+\alpha_p}$$

によって、G の標準的放物型部分群

$$\begin{aligned}P_{\mathbf{a}}&=\{g\in G\mid g\mathcal{F}_0=\mathcal{F}_0\}\\
&=\left\{\begin{pmatrix}A_1 & & & & & & *\\ & \ddots & & & & & \\ & & A_p & & & & \\ & & & B & & & \\ & & & & A_p^* & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & A_1^*\end{pmatrix}\ \middle|\ A_i\in\mathrm{GL}_{\alpha_i}(\mathbb{F}),\ B\in\mathrm{O}_{2\alpha_0+1}(\mathbb{F})\right\}\end{aligned}$$

が定義される。ただし、$\alpha_0=n-(\alpha_1+\cdots+\alpha_p)$, $A_i^*=J_{\alpha_i}{}^tA_i^{-1}J_{\alpha_i}$,

$$J_{\alpha_i}=\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \iddots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}$$

とする。$\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}$ は G-等質であることが示せるので、$\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}\cong G/P_{\mathbf{a}}$ である。

注意 2.1 split 特殊直交群 $G_0=\{g\in G\mid \det g=1\}$ $(=\mathrm{SO}_{2n+1}(\mathbb{F})$ と書く$)$ について $G=G_0\sqcup(-I_{2n+1})G_0$ であるが、$-I_{2n+1}$ は $\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}$ に自明に作用するので、$\mathrm{Fl}_{\mathbf{a}}$ 上の G-軌道と G_0-軌道は同じである。

2.2 $k\ge 4\Longrightarrow\mathcal{M}$ は無限型

命題 2.2 ([M14] Proposition 1.2) $G=\mathrm{O}_{2n+1}(\mathbb{F})$ の多重旗多様体 $\mathcal{M}=(G/P_1)\times\cdots\times(G/P_k)$ $(P_j\ne G)$ について、

$$k\ge 4\Longrightarrow\mathcal{M}\ \text{は無限型}$$

注意 2.3 $k=2$ のとき、写像 $(g_1, g_2) \mapsto g_2^{-1} g_1$ により、

$$G \backslash ((G/P_1) \times (G/P_2)) \cong P_2 \backslash G / P_1$$

であるから、Bruhat 分解により、$\mathcal{M}$ は有限型である。

命題 2.2、注意 2.3 により $k=3$ の場合だけを調べればよい。

2.3 有限型３重旗多様体

３つの正整数列 $\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \dots, \beta_q)$, $\mathbf{c} = (\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ $(\alpha_1 + \dots + \alpha_p, \beta_1 + \dots + \beta_q, \gamma_1 + \dots + \gamma_r \leq n)$ に対し、３重旗多様体

$$\mathcal{M} = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}$$

を考える。順序の入れ換えにより $p \leq q \leq r$ と仮定してよい。

命題 2.4 ([M14] Proposition 1.3) $\mathcal{M}$ が有限型 $\Longrightarrow p = q = 1$

以下、$p = q = 1$ とする。さらに、$r = 1$ のときは $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$ とし、$r \geq 2$ のときは $\alpha_1 \leq \beta_1$ としてよい。

命題 2.5 ([M14] Proposition 1.4) $\mathcal{M}$ が有限型のとき、

$$\text{(C)} \qquad \max(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) < n \Longrightarrow |\mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^2| < \infty$$

注意 2.6 (1) $\mathbb{F}$ が代数的閉体のとき、$(\mathbb{F}^\times)^2 = \mathbb{F}^\times$

(2) $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{F}$ が有限体のとき、$|\mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^2| = 2$

(3) $|\mathbb{F}^\times / (\mathbb{F}^\times)^2| = \infty$ となる体も多くある。例えば、有理数体 $\mathbb{Q}$ とか 1 変数有理関数体 $\mathbb{C}(x)$ など。

定理 2.7 ([M14] Theorem 1.6) $p = q = 1$ とし、$r = 1$ のときは $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \gamma_1$ とし、$r \geq 2$ のときは $\alpha_1 \leq \beta_1$ とする。さらに条件 (C) も仮定する。このとき、$\mathcal{M} = \mathrm{Fl}_{\mathbf{a}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{b}} \times \mathrm{Fl}_{\mathbf{c}}$ が有限型であるための必要十分条件は次の (I),(II),(III),(IV) のいずれかが成り立つことである。

(I) $\alpha_1 = \beta_1 = n$　　(II) $\alpha_1 = 1$

(III) $r = 1$ and $\gamma_1 = n$　　(IV) $r = 2$ and $\beta_1 = n$

注意 2.8 (1) 写像 $(g_1, g_2, g_3) \mapsto (g_3^{-1} g_1, g_3^{-1} g_2)$ により、$(G/P_{\mathbf{a}}) \times (G/P_{\mathbf{b}}) \times (G/P_{\mathbf{c}})$ 上の G-軌道分解は２重旗多様体 $\mathcal{D} = (G/P_{\mathbf{a}}) \times (G/P_{\mathbf{b}})$ 上の $P_{\mathbf{c}}$-軌道分解と同一視できる。

(2) [L94], [S03] において、開 B-軌道（B は G の Borel 部分群）を持つ２重旗多様体が分類されている（[L94] は $P_{\mathbf{a}}$, $P_{\mathbf{b}}$ が極大放物型部分群のとき）。

一方、$\mathbb{F}$ が標数 0 の代数的閉体のとき、[B86], [V86] により

$$\mathcal{D} \text{ が開 } B\text{-軌道を持つ} \Longleftrightarrow |B \backslash \mathcal{D}| < \infty$$

である。定理 1 の (I) と (II) は $\mathbf{c}$ について無条件であるので、$\mathbf{c} = (1^n) = (1, \dots, 1)$ すなわち $P_{\mathbf{c}} = B$ のときも含まれ、この場合に当たる。

3 (III) 型の軌道分解

定理 2.7 において、(III) 型の有限性は軌道分解を具体的に与えることによって示される ([M14])。次の例 3.3、例 3.6 は (III) 型の最も簡単な場合であるが、(I) 型にも含まれる ([M13] Theorem 1.3)。

3.1 $n = 1$ のとき

$U_0 = \mathbb{F}e_1,\ U_1 = \mathbb{F}e_3$ とし、$B = \{g \in G \mid gU_0 = U_0\}$ とおく。

補題 3.1 $\mathrm{Fl}_{(1)} = \{U_0\} \sqcup \{\mathbb{F}((-x^2/2)e_1 + xe_2 + e_3) \mid x \in \mathbb{F}\} = \{U_0\} \sqcup BU_1 = \{U_0\} \sqcup BwU_0$ ($\mathrm{Fl}_{(1)}$ の Bruhat 分解) 。ただし、

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$$

とする。

証明 2番目の等式の証明：

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -x & -(x^2/2) \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば、$g \in B$ であり、$ge_3 = (-x^2/2)e_1 + xe_2 + e_3$。1番目の等式は容易。3番目の等式は明らか。 □

系 3.2 $\mathrm{Fl}_{(1)} = GU_0$

例 3.3 $n = 1$ のとき、$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = (1)$ である。3つの1次元 isotropic subspace U_+, U_-, V の配置を分類すればよい。

系 3.2 により、$U_+ = U_0$ としてよい。

(1) $U_- = U_+ = U_0$ のとき、V の B-軌道を分類すればよいので、補題 3.1 により、代表元は

$$U_0, \qquad U_1$$

の2つである。

(2) $U_- \neq U_+$ のとき、補題 3.1 により $U_- = U_1$ としてよい。$R = \{g \in G \mid gU_+ = U_+,\ gU_- = U_-\}$ とおくと、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \middle| \ a \in \mathbb{F}^\times \right\}$$

である。$\{\mathbb{F}((-x^2/2)e_1+xe_2+e_3) \mid x\in\mathbb{F}^\times\}$ は R-等質であるので、V の代表元としては

$$U_0,\qquad U_1,\qquad \mathbb{F}(-\frac{1}{2}e_1+e_2+e_3)$$

の 3 つが取れる。

(1), (2) により、$\mathcal{M}=\mathrm{Fl}_{(1)}\times\mathrm{Fl}_{(1)}\times\mathrm{Fl}_{(1)}$ は 5 つの G-軌道に分解される。

3.2 $n=2$ のとき

$U_0=\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_2,\ U_1=\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_4,\ U_2=\mathbb{F}e_4\oplus\mathbb{F}e_5$ とおき、$P=\{g\in G \mid gU_0=U_0\}$ とおく。

補題 3.4 $\mathrm{Fl}_{(2)}=\{U_0\}\sqcup PU_1\sqcup PU_2$

証明 V を $\mathbb{F}^5$ の 2 次元 isotropic subspace とする。$V\supset U_0$ ならば、$V=U_0$ であるので、$\dim(V\cap U_0)\leq 1$ のときを考えればよい。

$\dim(V\cap U_0)=1$ のとき： $A\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ に対し、

$$\ell(A)=\begin{pmatrix} A & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & J_2\,{}^tA^{-1}J_2 \end{pmatrix}\quad (J_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix})$$

は P の元である。適当な $\ell(A)$ の作用により、$V\cap U_0=\mathbb{F}e_1$ としてよい。

$$V\subset(\mathbb{F}e_1)^\perp=\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_2\oplus\mathbb{F}e_3\oplus\mathbb{F}e_4$$

であるので、補題 3.1 と同様にして

$$V=\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}((-x^2/2)e_2+xe_3+e_4)\quad\text{for some } x\in\mathbb{F}$$

と書ける。さらに、補題 3.1 と同様に $ge_4=(-x^2/2)e_2+xe_3+e_4$ を満たす $g\in P$ が作れるので、

$$V\in P(\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_4)=PU_1$$

である。

$\dim(V\cap U_0)=0$ のとき： $V+U_0^\perp=(V^\perp\cap U_0)^\perp=(V\cap U_0)^\perp=\mathbb{F}^5$ であるから、次の形の V の元 v_1,v_2 が存在する ($x_{ij}\in\mathbb{F}$)。

$$v_1=e_4+x_{11}e_1+x_{21}e_2+x_{31}e_3$$
$$v_2=e_5+x_{12}e_1+x_{22}e_2+x_{32}e_3$$

$(v_1, v_1) = (v_2, v_2) = (v_1, v_2) = 0$ であるので、$g \in P$ が次で定義できる。

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_{32} & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 1 & -x_{31} & x_{21} & x_{22} \\ 0 & 0 & 1 & x_{31} & x_{32} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって、$V = g(\mathbb{F}e_4 \oplus \mathbb{F}e_5) \in PU_2$ である。 □

系 3.5 $\mathrm{Fl}_{(2)} = GU_0$

例 3.6 $n = 2$, $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{c} = (2)$ のときを考える。3 つの 2 次元 (maximal) isotropic subspace U_+, U_-, V の配置を分類すればよい。

系 3.5 により、$U_+ = U_0$ としてよい。さらに、補題 3.4 により、$U_- = U_0$, U_1, U_2 の 3 つの場合を考えればよい。

(1) $U_- = U_0$ のとき、補題 3.4 により、V の代表元として、

$$U_0, \qquad U_1, \qquad U_2$$

の 3 つが取れる。

(2) $U_- = U_1$ のとき：$W = U_+ \cap U_- = \mathbb{F}e_1$ とおき、$R = \{g \in G \mid gU_+ = U_+,\ gU_- = U_-\}$ とするとき、$\mathrm{Fl}_{(2)}$ を R-軌道分解すればよい。

(a) $V \supset W$ のとき、$V \subset W^\perp = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3 \oplus \mathbb{F}e_4$ であるから、例 3.3 と同様にして、

$$V = W \oplus \mathbb{F}e_2 \text{ または } W \oplus \mathbb{F}((-x^2/2)e_2 + xe_3 + e_4)\ (x \in \mathbb{F})$$

である。$g = \mathrm{diag}(1, a, 1, a^{-1}, 1)$ $(a \in \mathbb{F}^\times)$ は R の元であるので、例 3.3 と同様にして、V の R-軌道の代表元として、

$$U_+, \qquad U_-, \qquad \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(-\frac{1}{2}e_2 + e_3 + e_4)$$

の 3 つが取れる。

(b) $V \cap W = \{0\}$ のとき、$V \not\subset W^\perp$ であるから、V は $v = xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4 + e_5$ $(x, y, z, w \in \mathbb{F},\ (v, v) = 0)$ の形の元を含む。

$$g = \begin{pmatrix} 1 & -w & -z & -y & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は R の元であって、$ge_5 = v$ である。よって、$g^{-1}V$ は $\mathbb{F}e_5$ を含み、$(\mathbb{F}e_5)^{\perp} = \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3 \oplus \mathbb{F}e_4 \oplus \mathbb{F}e_5$ に含まれる。(a) の議論と同様にして、V の R-軌道の代表元として

$$\mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5, \qquad \mathbb{F}e_4 \oplus \mathbb{F}e_5, \qquad \mathbb{F}(-\frac{1}{2}e_2 + e_3 + e_4) \oplus \mathbb{F}e_5$$

の 3 つが取れる。

(3) $U_- = U_2$ のとき： $R = \{g \in G \mid gU_+ = U_+,\ gU_- = U_-\}$ とおくと、

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \pm 1 & \\ 0 & & J_2{}^tA^{-1}J_2 \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}) \right\}$$

である。$\mathrm{Fl}_{(2)}$ を R-軌道分解すればよい。$d = \dim(V \cap U_+) + \dim(V \cap U_-)$ とおく。

(a) $d = 2$ のとき、$\dim(V \cap U_+) = 2$ であれば $V = U_+ = U_0$ であり、$\dim(V \cap U_-) = 2$ であれば $V = U_- = U_2$ である。$\dim(V \cap U_+) = \dim(V \cap U_-) = 1$ のとき、適当な $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ により、$\ell(A)(V \cap U_+) = \mathbb{F}e_1$ となる。このとき、$\ell(A)(V \cap U_-)$ は $\mathbb{F}e_1$ に直交して、$U_- = \mathbb{F}e_4 \oplus \mathbb{F}e_5$ に含まれるので、

$$\ell(A)(V \cap U_-) = \mathbb{F}e_4$$

である。よって、$\ell(A)V = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_4 = U_1$ である。以上により、$d = 2$ のときの代表元は

$$U_0, \qquad U_1, \qquad U_2$$

の 3 つである。

(b) $d = 1$ のとき、$\dim(V \cap U_+) = 1$ または $\dim(V \cap U_-) = 1$ である。$\dim(V \cap U_+) = 1$ のとき、適当な $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ により、$\ell(A)(V \cap U_+) = \mathbb{F}e_1$ となる。$\ell(A)V \supset \mathbb{F}e_1$, $e_2, e_4 \notin \ell(A)V$ だから (2) の議論により

$$\ell(A)V = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}((-x^2/2)e_2 + xe_3 + e_4) \quad \text{for some } x \in \mathbb{F}^{\times}$$

と書ける。さらに、$g = \mathrm{diag}(1, x^{-1}, 1, x, 1) \in R$ により、

$$g\ell(A)V = \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(-\frac{1}{2}e_2 + e_3 + e_4)$$

となる。$\dim(V \cap U_-) = 1$ のときも同様にして、V は R の元によって

$$\mathbb{F}(-\frac{1}{2}e_2 + e_3 + e_4) \oplus \mathbb{F}e_5$$

に移る。以上により、この場合の代表元は 2 つである。

(c) $d=0$ のとき、$V \subset U_+ \oplus U_-$ の場合とそうでない場合がある。
$V \subset U_+ \oplus U_-$ のとき、線形同型 $f: U_+ \xrightarrow{\sim} U_-$ があって、

$$V = \{v + f(v) \mid v \in U_+\}$$

と書ける。$e_1 + f(e_1) \in V$ について

$$0 = (e_1 + f(e_1), e_1 + f(e_1)) = 2(e_1, f(e_1))$$

だから $f(e_1) = xe_4$ for some $x \in \mathbb{F}^\times$ である。よって

$$V = \mathbb{F}(e_1 + xe_4) \oplus \mathbb{F}(xe_5 - e_2)$$

となる。$g = \mathrm{diag}(1, x, 1, x^{-1}, 1) \in R$ とおけば

$$gV = \mathbb{F}(e_1 + e_4) \oplus \mathbb{F}(e_5 - e_2)$$

となる。

$V \not\subset U_+ \oplus U_-$ のとき、$\dim(V \cap (U_+ \oplus U_-)) = 1$ である。適当な $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ により、

$$\ell(A)V \cap (U_+ \oplus U_-) = \mathbb{F}(e_1 + xe_4) \quad \text{for some } x \in \mathbb{F}^\times$$

となる。$g = \mathrm{diag}(1, x, 1, x^{-1}, 1) \in R$ とおけば

$$g\ell(A)V \cap (U_+ \oplus U_-) = \mathbb{F}(e_1 + e_4)$$

となる。$V' = g\ell(A)V$ とおくと、

$$V' = \mathbb{F}(e_1 + e_4) \oplus \mathbb{F}(y(e_5 - e_2) + e_3 - \frac{1}{2y}e_1) \quad \text{for some } y \in \mathbb{F}^\times$$

と書ける。$h = \mathrm{diag}(y, y^{-1}, 1, y, y^{-1}) \in R$ とおけば

$$hV' = \mathbb{F}(e_1 + e_4) \oplus \mathbb{F}(e_5 - e_2 + e_3 - \frac{1}{2}e_1)$$

となる。

よって $d=0$ のときの代表元は 2 つである。

以上により、(3) の R-軌道の数は $3+2+2=7$ であることがわかった。

(1),(2),(3) により、$\mathcal{M} = \mathrm{Fl}_{(2)} \times \mathrm{Fl}_{(2)} \times \mathrm{Fl}_{(2)}$ の G-軌道の数は $3+6+7=16$ である。

3.3 (III) 型の一般論

(III) 型の 3 重旗多様体

$$\mathcal{M} = \mathrm{Fl}_{(\alpha)} \times \mathrm{Fl}_{(\beta)} \times \mathrm{Fl}_{(n)}$$

の軌道分解を考える。

U_+ を $\mathbb{F}^{2n+1}$ の α 次元 isotropic subspace、U_- を β 次元 isotropic subspace とする。$W_0 = U_+ \cap U_-$, $W_+ = U_+ \cap U_-^{\perp}$, $W_- = U_- \cap U_+^{\perp}$ とおき、

$$a_0 = \dim W_0, \quad a_+ = \dim W_+ - a_0, \quad a_- = \dim W_- - a_0$$

とすると、a_0, a_+, a_- は (U_+, U_-) の G-軌道の不変量である。$(\ ,\ )$ は U_+/W_+ と U_-/W_- の間の非退化双一次形式を与えるので、$\alpha - a_0 - a_+ = \beta - a_0 - a_-$ $(= a_1$ とおく) である。

$i \in I = \{1, \dots, 2n+1\}$ に対し、$\bar{i} = 2n+2-i$ とする。$d = a_0 + a_+ + a_-$, $d' = \overline{d + a_1} - 1$ とおき、

$$\begin{aligned} W_{(0)} &= \mathbb{F}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{a_0}, & W_{(+)} &= \mathbb{F}e_{a_0+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{a_0+a_+}, \\ W_{(-)} &= \mathbb{F}e_{a_0+a_++1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_d, & U_{(+)} &= \mathbb{F}e_{d+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{d+a_1}, \\ U_{(-)} &= \mathbb{F}e_{d'+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}e_{d'+a_1}, & W &= W_{(0)} \oplus W_{(+)} \oplus W_{(-)} \end{aligned}$$

とおく。このとき、(U_+, U_-) は次のように標準化できる。

命題 3.7 ([M14] Proposition 3.6) $gU_+ = W_{(0)} \oplus W_{(+)} \oplus U_{(+)}$, $gU_- = W_{(0)} \oplus W_{(-)} \oplus U_{(-)}$ となる $g \in G$ が存在する。

以下、$U_+ = W_{(0)} \oplus W_{(+)} \oplus U_{(+)}$, $U_- = W_{(0)} \oplus W_{(-)} \oplus U_{(-)}$ としてよい。このとき、$W_0 = W_{(0)}$, $W_+ = W_{(0)} \oplus W_{(+)}$, $W_- = W_{(0)} \oplus W_{(-)}$ である。

$$R = \{g \in G \mid gU_+ = U_+,\ gU_- = U_-\}$$

とおくとき、$M = \mathrm{Fl}_{(n)} = \{\mathbb{F}^{2n+1}$ の maximally isotropic subspaces$\}$ の R-軌道を分類すればよい。

$V \in M$ の R-軌道は次の不変量 $b_1, \dots, b_{15}, \varepsilon$ を持つ。

$$\begin{aligned} &b_1 = \dim(W_0 \cap V),\ b_2 = a_0 - b_1, \\ &b_3 = \dim(W_+ \cap V) - b_1, \quad b_4 = \dim(W_- \cap V) - b_1, \\ &b_5 = \dim(U_+ \cap V) - b_1 - b_3, \quad b_6 = \dim(U_- \cap V) - b_1 - b_4, \\ &b_7 = \dim(W \cap V) - b_1 - b_3 - b_4, \\ &b_8 = \dim((W_+ + U_-) \cap V) - \dim(W \cap V) - b_6, \\ &b_9 = \dim((W_- + U_+) \cap V) - \dim(W \cap V) - b_5, \\ &b_{10} = a_+ - b_3 - b_7 - b_8, \quad b_{11} = a_- - b_4 - b_7 - b_9 \end{aligned}$$

さらに、$X' = (U_+ + U_-) \cap V^\perp$, $X = (U_+ + U_-) \cap V$, $X_0 = ((W_+ + U_-) \cap V) + ((W_- + U_+) \cap V)$ とおき、X' の部分空間 X_1 を

$$X_1 = \{v \in X' \mid (v_+, X') = \{0\}\}$$

で定義すると、$X_1 \supset X_0$ である。ただし、$v = v_+ + v_-$ $(v_\pm \in U_\pm)$ とする。

$$b_{12} = \dim X_1 - \dim X_0, \quad b_{15} = \dim X' - \dim X_1, \quad \varepsilon = \dim X' - \dim X,$$
$$b_{13} = a_1 - b_5 - b_6 - b_8 - b_9 - 2b_{12} - b_{15}, \quad b_{14} = n - d - a_1 - b_{12} - b_{13}$$

とおく。($b_{13}, b_{14} \geq 0$ が示せる。)

注意 3.8 $b_2, b_{10}, b_{11}, b_{13}, b_{14}$ の定義式により、$b_1, \ldots, b_{15}$ は次の 5 つの関係式を満たす。

$$a_0 = b_1 + b_2 \tag{3.1}$$
$$a_+ = b_3 + b_7 + b_8 + b_{10} \tag{3.2}$$
$$a_- = b_4 + b_7 + b_9 + b_{11} \tag{3.3}$$
$$a_1 = b_5 + b_6 + b_8 + b_9 + 2b_{12} + b_{13} + b_{15} \tag{3.4}$$
$$a_2 = b_{12} + b_{13} + b_{14} \tag{3.5}$$

ただし、$a_2 = n - d - a_1 = n - a_0 - a_+ - a_- - a_1$ とする。

注意 3.9 ((I) 型のとき) $\alpha = \beta = n$ のとき、$n = \alpha = a_0 + a_+ + a_1$ であるから、$a_- = a_2 = 0$ であり、$n = \beta = a_0 + a_- + a_1$ であるから、$a_+ = a_2 = 0$ である。よって、

$$a_+ = a_- = a_2 = 0$$

であり、

$$b_j = 0 \quad \text{for } j = 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$$

であるので、不変量は $b_1, b_2, b_5, b_6, b_{15}$ および $\varepsilon \in \{0, 1\}$ である ([M13] Theorem 1.2, 例 3.3, 例 3.6)。

$j \in J_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 14\}$ に対し、$I_{(j)}$, $V_{(j)}$ を次で定義する。

$$I_{(1)} = \{1, \ldots, b_1\}, \quad I_{(2)} = \{b_1 + 1, \ldots, a_0\}, \quad I_{(3)} = \{a_0 + 1, \ldots, a_0 + b_3\},$$
$$I_{(4)} = \{a_0 + a_+ + 1, \ldots, a_0 + a_+ + b_4\}, \quad I_{(5)} = \{d + 1, \ldots, d + b_5\},$$
$$I_{(6)} = \{d' + 1, \ldots, d' + b_6\}, \quad I_{(10)} = \{a_0 + a_+ - b_{10} + 1, \ldots, a_0 + a_+\},$$
$$I_{(11)} = \{d - b_{11} + 1, \ldots, d\}, \quad I_{(14)} = \{d + a_1 + 1, \ldots, d + a_1 + b_{14}\},$$
$$V_{(j)} = \begin{cases} \bigoplus_{i \in I_{(j)}} \mathbb{F} e_i & \text{if } j = 1, 3, 4, 5, 6, 14, \\ \bigoplus_{i \in I_{(j)}} \mathbb{F} e_{\bar{i}} & \text{if } j = 2, 10, 11. \end{cases}$$

$j \in J_2 = \{7, 8, 9, 13\}$ に対し、$I_{(j)}$, $\eta_j : I_{(j)} \to I$, $V_{(j)}$ を次で定義する。

$$
\begin{aligned}
I_{(7)} &= \{a_0 + b_3 + 1, \ldots, a_0 + b_3 + b_7\}, \\
&\eta_7(a_0 + b_3 + k) = a_0 + a_+ + b_4 + k, \\
I_{(8)} &= \{a_0 + b_3 + b_7 + 1, \ldots, a_0 + b_3 + b_7 + b_8\}, \\
&\eta_8(a_0 + b_3 + b_7 + k) = d' + b_6 + k, \\
I_{(9)} &= \{a_0 + a_+ + b_4 + b_7 + 1, \ldots, a_0 + a_+ + b_4 + b_7 + b_9\}, \\
&\eta_9(a_0 + a_+ + b_4 + b_7 + k) = d + b_5 + k, \\
I_{(13)} &= \{d + b_5 + b_9 + b_{12} + b_{15} + 1, \ldots, d + b_5 + b_9 + b_{12} + b_{15} + b_{13}\}, \\
&\eta_{13}(d + b_5 + b_9 + b_{12} + b_{15} + k) = d + a_1 + b_{14} + b_{12} + k, \\
V_{(j)} &= \bigoplus_{i \in I_{(j)}} (\mathbb{F}(e_i + e_{\eta_j(i)}) \oplus \mathbb{F}(e_{\bar{i}} - e_{\overline{\eta_j(i)}}))
\end{aligned}
$$

$I_{(12)} = \{d+b_5+b_9+1, \ldots, d+b_5+b_9+b_{12}\}$ とおき、$\kappa, \lambda : I_{(12)} \to I$, $V_{(12)}$ を次で定義する 。

$$
\kappa(d + b_5 + b_9 + k) = d' + b_6 + b_8 + k, \quad \lambda(d + b_5 + b_9 + k) = d + a_1 + b_{14} + k,
$$

$$
V_{(12)} = \bigoplus_{i \in I_{(12)}} (\mathbb{F}(e_i + e_{\kappa(i)}) \oplus \mathbb{F}(e_i + e_{\lambda(i)}) \oplus \mathbb{F}(e_{\bar{i}} - e_{\overline{\kappa(i)}} - e_{\overline{\lambda(i)}}))
$$

$I_{(15)} = \{d + b_5 + b_9 + b_{12} + 1, \ldots, d + b_5 + b_9 + b_{12} + b_{15}\}$, $U_{(15)} = (\bigoplus_{i \in I_{15} \sqcup \overline{I_{(15)}}} \mathbb{F} e_i) \oplus \mathbb{F} e_{n+1}$ とおき、$\eta_{15} : I_{(15)} \to I_{(15)}$ を

$$
\eta_{15}(d + b_5 + b_9 + b_{12} + k) = d' + b_6 + b_8 + b_{12} + b_{13} + k \quad \text{for } k = 1, \ldots, b_{15}
$$

で定義する。$b_{15} = 0$ のときは $V^{\varepsilon}_{(15)} = \{0\}$ とおく。 $b_{15} > 0$ のとき、

$$
c = d + b_5 + b_9 + b_{12} + \left[\frac{b_{15} + 1}{2}\right], \quad I^+_{(15)} = \{d + b_5 + b_9 + b_{12} + 1, \ldots, c\}
$$

とおき、

$$
V_{<i>} = \mathbb{F}(e_i + e_{\eta_{15}(i)}) \oplus \mathbb{F}(e_{\bar{i}} - e_{\overline{\eta_{15}(i)}}) \quad \text{for } i \in I^+_{(15)} - \{c\}
$$

$$
V^{\varepsilon}_{<c>} = \begin{cases} \mathbb{F}(e_c + e_{\eta_{15}(c)}) \oplus \mathbb{F}(e_{\bar{c}} - e_{\overline{\eta_{15}(c)}}) & \text{if } b_{15} \text{ is even and } \varepsilon = 0, \\ \mathbb{F}(e_c + e_{\eta_{15}(c)}) \oplus \mathbb{F}(e_{\bar{c}} - e_{\overline{\eta_{15}(c)}} - \frac{1}{2}e_c + e_{n+1}) & \text{if } b_{15} \text{ is even and } \varepsilon = 1, \\ \mathbb{F}(e_{\bar{c}} - \frac{1}{2}e_c + e_{n+1}) & \text{if } b_{15} \text{ is odd } (\varepsilon = 1) \end{cases}
$$

とおく。(注: b_{15} が奇数 $\Longrightarrow \varepsilon = 1$) このとき、$U_{(15)}$ の maximally isotropic subspace $V^{\varepsilon}_{(15)}$ を

$$
V^{\varepsilon}_{(15)} = (\bigoplus_{i \in I^+_{(15)} - \{c\}} V_{<i>}) \oplus V^{\varepsilon}_{<c>}
$$

で定義する。

定理 3.10 ([M14] Theorem 3.15) $gV=(\bigoplus_{j=1}^{14}V_{(j)})\oplus V_{(15)}^{\varepsilon}$ となる $g\in R$ が存在する。

3.4 (III) 型の典型例

例 3.11 $n=3$, $\alpha=\beta=2$ のときを考える。まず、命題 3.7 により U_+, U_- の配置は次の 5 つに分類できる。

	(a_0,a_+,a_-,a_1)	$(U_+,\ U_-)$ の代表元
(1)	$a_0=2,\ a_+=a_-=a_1=0$	$(\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_2,\ \mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_2)$
(2)	$a_0=1,\ a_+=a_-=1,\ a_1=0$	$(\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_2,\ \mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_3)$
(3)	$a_0=1,\ a_+=a_-=0,\ a_1=1$	$(\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_2,\ \mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_6)$
(4)	$a_0=0,\ a_+=a_-=a_1=1$	$(\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_3,\ \mathbb{F}e_2\oplus\mathbb{F}e_5)$
(5)	$a_0=a_+=a_-=0,\ a_1=2$	$(\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_2,\ \mathbb{F}e_6\oplus\mathbb{F}e_7)$

この 5 つの場合のそれぞれについて、定理 3.10 の代表元 gV は次のようになる。

(1) $a_0=2,\ a_+=a_-=a_1=0,\ a_2=1$ であるから、(3.1)〜(3.5) により、$b_j=0$ for $j=3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15$ であり、

$$(b_1,b_2,b_{14})=(2,0,1),\qquad (1,1,1),\qquad (0,2,1)$$

の 3 通りである。それぞれの場合の定理 3.10 の gV は

$$\mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_2\oplus\mathbb{F}e_3,\qquad \mathbb{F}e_1\oplus\mathbb{F}e_6\oplus\mathbb{F}e_3,\qquad \mathbb{F}e_6\oplus\mathbb{F}e_7\oplus\mathbb{F}e_3$$

である。

(2) のとき、$a_1=a_2=0$ であるから (3.4), (3.5) により、$j\neq 1,2,3,4,7,10,11\Longrightarrow b_j=0$ であり、可能な組み合わせは

b_1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0
b_2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
b_3	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0
b_4	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
b_{10}	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
b_{11}	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0
b_7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1

の 10 通りである。それぞれの場合の gV は順に

$$
\begin{array}{lll}
\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \\
\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_2+e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6-e_5), & \\
\mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \\
\mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_2+e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6-e_5) &
\end{array}
$$

である。

(3) のとき、$a_+ = a_- = 0,\ a_1 = 1$ であるから、$j \neq 1, 2, 5, 6, 13, 14, 15 \Longrightarrow b_j = 0$ であり、可能な組み合わせは

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
b_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
b_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
b_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
b_{15} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
b_{14} & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
b_{13} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

の 8 通りである。それぞれの場合の gV は順に

$$
\begin{array}{ll}
\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \\
\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_6 + e_4 - \frac{1}{2}e_2) \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_2+e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6-e_5), \\
\mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \\
\mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_6 + e_4 - \frac{1}{2}e_2) \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_2+e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6-e_5)
\end{array}
$$

である。

(4) のとき、$a_0 = a_2 = 0$ であるから (3.1), (3.5) により $b_1 = b_2 = b_{12} = b_{13} = b_{14} = 0$ であり、可能な組み合わせは $b_7 = b_8 = b_9 = 0$ のとき、

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc}
b_3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
b_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
b_5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
b_6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
b_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
b_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
b_{15} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

の 12 通りであり、それぞれの場合の gV は順に

$$\begin{array}{lll} \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}(e_5 + e_4 - \frac{1}{2}e_3), \\ \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}(e_5 + e_4 - \frac{1}{2}e_3), \\ \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}(e_5 + e_4 - \frac{1}{2}e_3), \\ \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_5, & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}(e_5 + e_4 - \frac{1}{2}e_3) \end{array}$$

である。

$(b_7, b_8, b_9) \neq (0, 0, 0)$ のとき、

b_3	0	0	0	0	0	1	0
b_4	0	0	0	1	0	0	0
b_5	1	0	0	0	0	0	0
b_6	0	1	0	0	0	0	0
b_7	1	1	1	0	0	0	0
b_8	0	0	0	1	1	0	0
b_9	0	0	0	0	0	1	1
b_{10}	0	0	0	0	0	0	1
b_{11}	0	0	0	0	1	0	0
b_{15}	0	0	1	0	0	0	0

の 7 通りであり、それぞれの場合の gV は順に

$$\begin{array}{ll} \mathbb{F}e_3 \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_2) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_6), & \mathbb{F}e_5 \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_2) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_6), \\ \mathbb{F}(e_5 + e_4 - \frac{1}{2}e_3) \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_2) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_6), & \\ \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_5) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_3), & \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_5) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_3), \\ \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5), & \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5) \end{array}$$

である。

以上により、(4) の場合の R-軌道は 19 個である。

(5) のとき、$a_0 = a_+ = a_- = 0$ であるから、(3.1), (3.2), (3.3) により $b_j = 0$ for $j = 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11$ である。(3.5) により $b_{12} + b_{13} + b_{14} = a_2 = 1$ であるから

$$b_{12} = 1, \qquad b_{13} = 1, \qquad b_{14} = 1$$

の 3 つの場合がある。まず、$b_{14} = 1$ のときを考えよう。このとき、$b_5, b_6, b_{15}, \varepsilon$ は次の 7 通りである。

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
b_5 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
b_6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
b_{15} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\
\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

これは例 3.6 (2) と同じであることに注意する。従って gV は例 3.6 (2) と同様に

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_2 \oplus \mathbb{F}e_3, \qquad \mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_3, \qquad \mathbb{F}e_6 \oplus \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}e_3,\\
&\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_6 + e_4 - \frac{1}{2}e_2) \oplus \mathbb{F}e_3, \qquad \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_6 + e_4 - \frac{1}{2}e_2) \oplus \mathbb{F}e_3,\\
&\mathbb{F}(e_1 + e_6) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_2) \oplus \mathbb{F}e_3, \qquad \mathbb{F}(e_1 + e_6) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_2 + e_4 - \frac{1}{2}e_1) \oplus \mathbb{F}e_3
\end{aligned}
$$

である。

次に $b_{13} = 1$ のときを考えると、

$$b_5 = 1, \qquad b_6 = 1, \qquad b_{15} = 1$$

の 3 つの場合がある。それぞれの gV は

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{F}e_1 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5), \qquad \mathbb{F}e_7 \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5),\\
&\mathbb{F}(e_7 + e_4 - \frac{1}{2}e_1) \oplus \mathbb{F}(e_2 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_6 - e_5)
\end{aligned}
$$

である。

最後に $b_{12} = 1$ のときを考える。このとき、他のすべての b_j は 0 であって、定理 3.10 の代表元 gV は

$$\mathbb{F}(e_1 + e_6) \oplus \mathbb{F}(e_1 + e_3) \oplus \mathbb{F}(e_7 - e_2 - e_5)$$

である。

以上により、(5) の場合の R-軌道の数は $7 + 3 + 1 = 11$ 個である。

(1)〜(5) により、$\mathcal{M} = \mathrm{Fl}_{(2)} \times \mathrm{Fl}_{(2)} \times \mathrm{Fl}_{(3)}$ の G-軌道の数は

$$3 + 10 + 8 + 19 + 11 = 51$$

である。

References

[B86] M. Brion, *Quelques propriétés des espaces homogènes sphériques*, Manuscripta Math. **55** (1986), 191–198.

[L94] P. Littelmann, *On spherical double cones*, J. Alg. **166** (1994), 142–157.

[MWZ99] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Multiple flag varieties of finite type*, Adv. Math. **141** (1999), 97–118.

[MWZ00] P. Magyar, J. Weyman and A. Zelevinsky, *Symplectic multiple flag varieties of finite type*, J. Alg. **230** (2000), 245–265.

[M13] T. Matsuki, *An example of orthogonal triple flag variety of finite type*, J. Alg. **375** (2013), 148–187.

[M14] T. Matsuki, *Orthogonal multiple flag varieties of finite type I : odd degree case*, arXiv:1402.6405.

[S03] J. R. Stembridge, *Multiplicity-free products and restrictions of Weyl characters*, Representation Theory **7** (2003), 404–439.

[V86] E. B. Vinberg, *Complexity of action of reductive groups*, Funct. Anal. Appl. **20** (1986), 1–11.