

# 籐多様体と量子クラスター代数 (Quiver varieties and quantum cluster algebras)

木村 嘉之 \*

2014 年 6 月 26 日 数理解析研究所

次数付き籐多様体とは、次数付き前射影多元環の枠付き表現のモジュライ空間として定義される代数多様体であり、クラスター代数は籐を用いて定義される可換環である。本稿は、覃帆氏（ストラスブール大学）との共同研究 [KQ12] に基づく籐多様体上の偏屈層を介したクラスター代数の構成およびその帰結（正值性予想）に関するものである。講演においては、グラスマン多様体の斉次座標環のクラスター代数構造から初めて、クラスター代数の定義、正值性予想と、非輪状型（量子）クラスター代数の正值性予想の解決について述べた。本稿では、問題点をより明確にするため、クラスター単項式にまつわる予想に関して事項を追加した。

## 1 クラスター代数とは？

### 1.1 幾何型クラスター代数の定義と基本的性質

クラスター代数の簡略された定義について述べる。より詳細な定義等については、Fomin-Zelevinsky[FZ03b, Fom10] や Geiss-Lecerc-Schröer によるサーベイ [Lec10, GLS12] を参照されたい。

以下では幾何型および、主要部が歪対称行列に対するクラスター代数の定義を復習する。詳しくは、[FZ02, FZ03a, BFZ05, FZ07] を参照されたい。

$Q = (Q_0, Q_1)$  を籐とする。 $Q_0$  を頂点集合、 $Q_1$  を辺の集合、また、 $\text{out}, \text{in}: Q_1 \rightarrow Q_0$  をそれぞれ始点と終点を対応させる写像とする。さて、 $B_Q$  を  $Q_0$  で添字付けられた歪対称行列を以下でさだめる。

$$(B_Q)_{ij} = \#\{h \in Q_1 \mid \text{out}(h) = i, \text{in}(h) = j\} - \#\{h \in Q_1 \mid \text{out}(h) = j, \text{in}(h) = i\}$$

$B_Q$  が一意的に  $Q$  を定めるために、以下では  $Q$  に対してループ及び長さ 2 のサイクルは含まないと仮定し、以下では歪対称行列と条件を満たす籐を常に同一視する。一般には、 $Q_0$  は変異を行う主要部 (principal part)  $Q_0^{\text{pr}}$  と行わない凍結部 (frozen part)  $Q_0^{\text{fr}}$  の非交和になっていると仮定し、 $Q_0^{\text{pr}}$  の定める充満部分籐  $Q^{\text{pr}}$  を  $Q$  の主要部 (principal part) といい、 $Q$  を氷籐 (ice quiver) という。 $k \in Q_0^{\text{pr}}$  をとり、歪対称行列の変異 (matrix mutation) もしくは対応する籐の変異 (quiver mutation)  $B' = \mu_k B$  (resp.  $Q' = \mu_k Q$ ) を以下で定義する。

$$B'_{ij} = \begin{cases} -B_{ij} & \text{if } i = k \text{ or } j = k \\ B_{ij} + \frac{1}{2}(B_{ik}|B_{kj}| + |B_{ik}|B_{kj}) & \text{otherwise} \end{cases}$$

---

\* 所属：京都大学数理解析研究所および大阪市立大学数学研究所  
E-mail: ykimura@kurims.kyoto-u.ac.jp  
2014 年 6 月 26 日 数理解析研究所にて

また  $\mathcal{F} = \mathbb{Q}(u_i \mid i \in Q_0)$  とし、 $\mathcal{F}$  の自由生成元の集合  $\vec{x} = \{x_i\}_{i \in Q_0}$  に対して、 $x'_k \in \mathcal{F}$  を以下で定める。

$$x'_k = \frac{1}{x_k} \left( \prod_{\substack{h \in Q_1 \\ \text{out}(h)=k}} x_{\text{in}(h)} + \prod_{\substack{h \in Q_1 \\ \text{in}(h)=k}} x_{\text{out}(h)} \right)$$

種  $(Q, \vec{x})$  とは、箭  $Q$  と  $Q_0$  で添字付けられた自由生成元  $\vec{x}$  の組みを言い、種の変異  $\mu_k(Q, \vec{x})$  を

$$(\mu_k(Q), \vec{x} \setminus \{x_k\} \cup \{x'_k\})$$

で定める。変異を繰り返して得られる  $\mathcal{F}$  の元全体を**クラスター変数 (cluster variable)** といい、 $\{u_i\}_{i \in Q_0^{\text{fr}}}$  を**凍結変数 (frozen variable)** といい、凍結変数の生成する多項式環  $\mathbb{Z}[u_i \mid i \in Q_0^{\text{pr}}]$  を係数 (coefficient) という。

**定義 1.1.** クラスター変数全体のなす集合を  $\mathcal{X}(Q)$  で表し、 $\mathcal{F}$  の  $\mathcal{X}(Q)$  で生成される係数上生成される部分環  $\mathcal{A}(Q)$  を**クラスター代数 (cluster algebra)** という。

クラスター代数の組み合わせ的な性質を取り出したものとして、交換グラフとクラスター複体がある。

**定義 1.2.** (1) 種を頂点集合とし、辺を変異で定めたグラフ  $\Gamma(Q)$  を**交換グラフ (exchange graph)** という。  
(2) クラスター変数を頂点とし、単体をクラスターの部分集合で定めた単体複体を**クラスター複体 (cluster complex)** という。

歪対称型の幾何型クラスター代数の交換グラフ及びクラスター複体が凍結部のとり方に**依存しない**ことが示された [CIKLFP13, Theorem 4.6, Theorem 4.8]。

クラスター代数の基本的な性質は以下である。

**定理 1.3** (ローラン現象 [FZ02])。以下が成り立つ。

$$\mathcal{X}(Q) \subset \overline{\mathcal{A}}(Q) := \bigcap_{t \in \Gamma(Q)} \mathbb{Z}[u_i \mid i \in Q_0^{\text{pr}}][x_{t,i}^{\pm 1} \mid i \in Q_0^{\text{fr}}].$$

**定理 1.4** (有限型の分類)。  $\#\mathcal{X}(Q) < \infty$  であることと、 $Q^{\text{pr}}$  が *Dynkin quiver* に変異同値であることは必要十分である。

さて、クラスター代数の研究においてその動機付けとして調べられているのは、以下の集合である。

**定義 1.5.**  $Q$  を氷箭とし、 $\Gamma(Q)$  を交換グラフとする。

$$\mathcal{M}(Q) = \bigcup_{(Q_t, \vec{x}_t) \in \Gamma(Q)_0} \left\{ \prod_{i \in (Q_t)_0} x_{t,i}^{a_i} \in \mathcal{A}(Q) \mid a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

をクラスター単項式のなす集合といい、各元をクラスター単項式という。一般に、 $\mathcal{M}(Q)$  が一次独立な集合であることが示された [CIKLFP13, Conjecture 2.4]。

さて  $\{x, y\} \subset \mathcal{X}(Q)$  が整合的であるとは、 $x, y$  を含むクラスターが存在することを言う。すなわち  $xy \in \mathcal{M}(Q)$  が成り立つことを言う。一般の幾何型クラスター代数に関して、以下の予想 [FP12, Conjecture 9.5] が提出されている (folklore には以前から考えられていたと思われる)。

**予想 1.6** (“クラスター基底” の存在)。  $\mathcal{A}(Q)$  の自由基底  $\mathcal{B}(Q)$  であって、以下の条件をみたすものが存在する。

(0)  $\mathcal{X}(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{Q})$  が成り立つ。

(1) 任意のクラスター変数たち  $\{x, y\} \subset \mathcal{X}(\mathcal{Q})$  に対して、 $\{x, y\}$  が整合的であることと  $xy \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$  は必要十分条件である。

(2) 任意の凍結変数 (の積) $z$  と、 $b \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$  に対して、 $zb \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$  が成り立つ。

(3)  $\{b_i\}_{1 \leq i \leq \ell} \subset \mathcal{B}(\mathcal{Q})$  を有限集合とし、任意の相異なる積  $b_i b_j$  が  $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$  に含まれるならば、単項式  $\prod_{1 \leq j \leq \ell} b_j$  が  $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$  に含まれる。

**命題 1.7.** 予想 1.6 の元、 $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$  の自由基底  $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$  はクラスター単項式  $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$  を含む。

*Proof.*  $x$  はクラスター変数であるため、 $\{x, x\}$  は整合的であり  $x^2 \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$  が成り立つ。 $\{x, x, \dots, x\}$  に (3) の条件を用いると、 $x^n \in \mathcal{B}(\mathcal{Q})$  が成り立つ。 $\{x_1, \dots, x_\ell\}$  をクラスターとする時、クラスター単項式  $x_1^{m_1} \dots x_\ell^{m_\ell}$  が  $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$  が成り立つことがわかる。 q.e.d

とくに、 $\mathcal{M}(\mathcal{Q})$  は一次独立であることが上の予想から従う。一次独立性は、Fomin-Zelevinsky[FZ07, Conjecture 7.2] によって予想され、歪対称型の場合に、最近 Cerulli-Keller-Labardini-Plamondon[CIKLP13, Corollary 5.3] によって解決された。今のところ、上のような性質をもつ基底  $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$  は、多くの場合に構成されていない。

## 1.2 正値性予想

全正値性の理論および、Laurent 現象に関連して、以下の予想が述べられていた。

**予想 1.8** (Laurent 正値性予想). 以下が成り立つ。

$$\mathcal{X}(\mathcal{Q}) \subset \bigcap_{i \in \Gamma(\mathcal{Q})} \mathbb{Z}_{\geq 0}[u_i \mid i \in \mathcal{Q}_0^{\text{pr}}][x_{i,i}^{\pm 1} \mid i \in \mathcal{Q}_0^{\text{fr}}].$$

Laurent 正値性予想に関しては、Lee-Schiffler により、係数を持たない rank3 の場合 [LS12] および、一般の反対称型の場合 [LS13] に解決された。

Laurent 正値性予想および一次独立性を簡潔に説明する上で、以下の形の予想が考えられる。

**予想 1.9** (強正値性予想).  $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$  の基底  $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$  であって、以下の性質をみたすものが存在する。

(1)  $\mathcal{M}(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{Q})$

(2)  $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$  の構造定数はすべて非負である。

Laurent 現象を用いれば、強正値性予想から Laurent 正値性予想が導かれる。強正値性予想を導くための枠組みとして、Hernandez-Leclerc[HL10] によるモノイダル圏論化がある。以下では、強正値性予想に関することのみを抽出した弱い定義を採用している。初期種への '依存性' や、係数に関する振る舞いに関する '関手' 的な振る舞いをすることが期待される。

**定義 1.10.**  $\mathcal{C}$  をモノイダルアーベル圏とする。このとき、 $\mathcal{C}$  がクラスター代数  $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$  のモノイダル圏論化であるとは、以下の条件をみたすことを言う。

(1) 環としての同型

$$\Phi: \mathcal{A}(\mathcal{Q}) \simeq K_0(\mathcal{C})$$

が存在する、ここで、 $K_0(\mathcal{C})$  は表現環である。

(2)  $\mathcal{B}(\mathcal{C})$  を  $\mathcal{C}$  の単純対象のなす  $K_0(\mathcal{C})$  の基底とする。このとき、 $\Phi(\mathcal{M}(\mathcal{Q})) \subset \mathcal{B}(\mathcal{C})$  が成り立つ。

クラスター変換を完全関手等にて実現すること、ローラン現象を理解することが出来るか等、基本的な問題

については現在のところ考えられていない。また、モノイダル圏論化の条件 (2) を仮定すれば、クラスター変数  $x$  に対応する単純加群  $S(x)$  は任意の  $n$  に対して  $S(x)^{\otimes n}$  が単純対象であることが従い、またクラスター単項式に対応する単純対象が

$$S\left(\prod_{i \in Q_0} x_{i;t}^{a_i}\right) \simeq \bigotimes_{i \in Q_0} S(x_{i;t})^{\otimes a_i}$$

という非自明なテンソル積の (順序によらない) 分解を得ることを意味している。また、モノイダル圏論化においては、 $S^{\otimes 2}$  が単純であるような単純対象を**実単純 (real simple) 対象**といい、非自明な単純対象のテンソル積への分解  $S \simeq S_1 \otimes S_2$  をもたないものを**素単純 (prime simple) 対象**といい、実単純対象とクラスター単項式、実素 (real prime) 単純対象とクラスター変数との一致を定義 [HL10, Definition 2.1] においては組み込んでいる。また、“クラスター基底”の性質 (4) に関しては、Hernandez[Her10]により一般の量子アフィン代数の有限次元既約表現たちに対してしられており、ADE 型 Hecke 代数の有限次元表現に対しても、量子クラスター代数の構成を介して Hernandez-Leclerc[HL11]によって示されている。また、Hecke 代数から量子アフィン代数の有限次元表現の圏への関手が、Kang-柏原-Kim[KKK12]によって構成されている。

モノイダル圏論化の構成は一般に難しく、特に (2) の条件が困難となる。知られている例は以下のとおりである。

- $A_n, D_4$  型 [HL10],  $D_n$  型 [HL12]
- 二部 (bipartite) 型 [Nak11]
- 非輪状 (acyclic) 型 [KQ12]

[Nak11] 及び [KQ12] では、有限型ではない場合には、直接的にはモノイダルアーベル圏を構成せず、表現環を幾何学的に偏屈層による構成を介して行っており、強正值予想を導くのに十分な条件を確認している。有限型の場合には、モノイダル圏を量子アフィン代数の有限次元表現の圏の部分テンソル圏として実現できる。一般の場合には、幾何学的な余積 [MO12, Nak13] を用いてテンソル圏を構成する必要がある。

### 1.3 量子クラスター代数

**量子クラスター代数 (quantum cluster algebra)** とは、Berenstein-Zelevinsky[BZ05]による一般の幾何型クラスター代数に付随するクラスター変数の量子化である。[BZ05]では、Berenstein-Fomin-Zelevinskyによる複素単純 Lie 群の二重 Bruhat 胞体の座標環上の (upper) クラスター代数構造の量子化として、量子二重 Bruhat 胞体の導入および、量子クラスター代数 (の上界) との同型が予想されていた。

Geiss-Leclerc-Schroer は、対称型 Kac-Moody 群の“小行列式”たちを初期種とする冪単部分群の座標環上のクラスター代数構造を前射影多元環の表現論を介して構成し、クラスター単項式を含む基底として、Lusztigの双対半標準基底 (の制限) が存在することを証明した [GLS11]。冪単部分群の座標環の量子化として、Lusztigによる Poincare-Birkhoff-Witt 型基底を用いて部分環として定義される量子冪単部分群が、Lusztig-柏原による双対標準基底が制限に関して整合的であり、量子小行列式を初期種とする量子冪単部分群上の量子クラスター代数構造および、量子クラスター単項式の双対標準基底への同定下での埋め込みを予想された。量子クラスター代数構造に関しては、Geiss-Leclerc-Schroer[GLS12]によって対称型の場合に証明された。

近年、Goodearl-Yakimov[GY13]により、量子二重 Bruhat 胞体の量子クラスター代数構造および、量子クラスター代数とその上界 (upper bound, upper cluster algebra) との一致が示された。また、Cauchon-Goodearl-Letzter 拡大とよばれる特別なクラスの Ore (反復) 拡大として、量子冪零代数 [GY12, GY13] というクラスの非可換環の導入、および非可換一意分解環の手法により量子クラスター代数構造が示された。量子冪零代数は例として、量子二重 Bruhat 胞体や、量子冪単部分群 (=量子 Schubert 胞体) を例として含み、Geiss-Leclerc-Schroer の構成した量子冪単部分群の量子クラスター代数構造への別証明を与えた。

以下では、[KQ12]で行った（次数付き）籠多様体を介した、（量子）クラスター代数の構成を紹介する。

## 2 籠多様体と量子クラスター代数

### 2.1 量子クラスター指標

クラスター代数の圏論化として、モノイダル圏論化以外に、加法圏論化が知られている。一般の歪対称型のクラスター代数はポテンシャル付き籠による構成が知られているが、今回は簡略化及び我々の結果への応用のために、非輪状型の種に対する場合のクラスター指標もしくは Calder-Chapoton 公式について紹介する。以下では簡単のため、 $Q$  は凍結部分を持たないと仮定し、非輪状型であると仮定する。一般に、非輪状型の初期種をとると、クラスター変数とシューアルルートと 1:1 対応する。ここで、シューアルルートとは、ルートを  $Q$  の直既約表現の次元ベクトルと思った時に、表現がリジッドである、すなわち  $\text{Ext}_Q^1(M, M) = 0$  を満たすことを言う。さて、 $x_W$  を対応するクラスター変数とし、初期種  $\vec{u} = (u_i)_{i \in Q_0}$  でのローラン展開  $CC_Q[W]$  が知られている。

**定理 2.1** (Caldero-Chapoton 公式 [CC04, CK08, CK06]).

$$CC_Q[W] = \frac{1}{\prod_{i \in Q_0} u_i^{w_i}} \sum_{V \leq W} \chi(\text{Gr}_V^Q M[W]) \prod_{h \in Q_1} u_{\text{out}(h)}^{w_{\text{in}(h)} - v_{\text{in}(h)}} u_{\text{in}(h)}^{v_{\text{out}(h)}}$$

また、量子クラスター代数への一般化 [Qin12a] も知られている。

### 2.2 次数付き籠多様体と量子クラスター指標

非輪状籠 (*acyclic quiver*) を主要部とするようなクラスター代数のモノイダル圏論化を考えたい。それを考える上で、bipartite partition を生じる根源的な理由である次数付き籠多様体の定義を変更する [Qin12b]。

$(I, E)$  をグラフ、 $(I, \Omega)$  を非輪状籠、 $(I, \bar{\Omega})$  をその反対とする。 $\hat{I} = I \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ ,  $\hat{I}_0 = I \times (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$ ,  $\hat{I}_1 = I \times \mathbb{Z}$  とおく。 $W = \bigoplus_{(i,a) \in \hat{I}_0} W_i(a)$  を  $\hat{I}_0$ -graded ベクトル空間、 $V = \bigoplus_{(i,a) \in \hat{I}_0} V_i(a)$  を  $\hat{I}_1$ -graded ベクトル空間とする。ただし、 $\dim W < \infty$ ,  $\dim V < \infty$  と仮定する。

$$\begin{aligned} E_\Omega(V, V)^{[0]} &:= \bigoplus_{\substack{h \in \Omega \\ (\text{out}(h), a) \in \hat{I}_1}} \text{Hom}_k(V_{\text{out}(h)}(a), V_{\text{in}(h)}(a)), \\ E_{\bar{\Omega}}(V, V)^{[-1]} &:= \bigoplus_{\substack{h \in \bar{\Omega} \\ (\text{out}(h), a) \in \hat{I}_1}} \text{Hom}_k(V_{\text{out}(h)}(a), V_{\text{in}(h)}(a-1)), \\ L(W, V)^{[-1/2]} &:= \bigoplus_{(i,a) \in \hat{I}_0} \text{Hom}_k(W_i(a), V_i(a-1/2)), \\ L(V, W)^{[-1/2]} &:= \bigoplus_{(i,a) \in \hat{I}_1} \text{Hom}_k(V_i(a), W_i(a-1/2)). \end{aligned}$$

とおき、

$$\mathbf{M}(V, W) := E_\Omega(V, V)^{[0]} \oplus E_{\bar{\Omega}}(V, V)^{[-1]} \oplus L(W, V)^{[-1/2]} \oplus L(V, W)^{[-1/2]}$$

とおく。各成分を  $(B_h(a), B_{\bar{h}}(a), \alpha_i(a), \beta_i(a))$  で表す。 $\mu: \mathbf{M}(V, W) \rightarrow L(V, V)^{[-1]}$  を

$$\mu(B, \alpha, \beta) := \sum_{h \in \Omega} B_h B_{\bar{h}} - B_{\bar{h}} B_h + \alpha \beta$$

で定める。 $\mu$  を運動量写像という。

$G(V) = \prod_{(i,a) \in \widehat{I}_1} GL(V_i(a))$  の  $\mathbf{M}(V, W)$  への作用  $(g_i(a) \cdot (B_h(a), B_{\bar{h}}(a), \alpha_i(a), \beta_i(a)))$  を以下の式で定義する。

$$(g_{\text{in}(h)}(a)B_h(a)g_{\text{out}(h)}(a)^{-1}, g_{\text{in}(h)}(a-1)B_{\bar{h}}(a)g_{\text{out}(h)}(a)^{-1}, g_i(a-1/2)\alpha_i(a), \beta_i(a)g_i(a)^{-1})$$

**定義 2.2.** (1)  $(B, \alpha, \beta)$  が安定 (stable) であるとは、 $B$ -invariant かつ  $V' \subset \text{Ker } \beta$  なる  $\widehat{I}_1$ -graded 部分空間  $S \subset V$  が  $S = 0$  に限る事を言う。

(2)  $(B, \alpha, \beta)$  が余安定 (costable) であるとは、 $B$ -invariant かつ  $V' \supset \text{Im } \alpha$  なる  $\widehat{I}_1$ -graded 部分空間  $T \subset V$  が  $T = V$  に限る事を言う。

$\mu^{-1}(0)^s$  で安定な  $\mu = 0$  を満たす  $(B, \alpha, \beta)$  の全体を表す。 $\mu^{-1}(0)^s$  は  $G(V)$  不変であることは明らかである。また、 $\mu^{-1}(0)^{s, s}$  で安定かつ余安定な  $\mu = 0$  を満たす  $(B, \alpha, \beta)$  の全体を表す。一般に、 $\mu^{-1}(0)^s$  と  $\mu^{-1}(0)^{s, s}$  は (空かもしれない) 開集合である。

**定義 2.3.** 幾何学的商  $\mu^{-1}(0)^s/G_V$  を  $\mathcal{M}^\bullet(V, W)$  で表し、なめらかな次数付き筋多様体 (smooth graded quiver variety) という。アファイン商  $\mu^{-1}(0)//G_V$  を  $\mathcal{M}_0^\bullet(V, W)$  で表し、アファイン次数付き筋多様体 (affine graded quiver variety) という。 $\mathcal{M}_0^\bullet(V, W)^{\text{reg}}$  で  $G(V)$ -作用が free であるような (一般には、空かもしれない) principal stratum とする。

$\pi: \mathcal{M}^\bullet(V, W) \rightarrow \mathcal{M}_0^\bullet(V, W)$  を (幾何学的不変式論から) 自然に定まる射影射とする。

注意 2.4. [Nak11, 4.1] では、odd cycle を含まない  $(I, E)$  に対して、bipartite partition  $I = I_0 \sqcup I_1$  を用いて、 $\xi_i: I \rightarrow \{0, 1\}$  を定め、 $\widehat{I}_1 := \{(i, a) \in I \times \mathbb{Z} \mid a + \xi_i/2 \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}\}$ ,  $\widehat{I}_0 := \{(i, a) \in I \times \mathbb{Z} \mid a + \xi_i/2 \in \mathbb{Z}\}$  として、 $\mathbf{M}(V, W) = E_\Omega(V, V)^{[-1/2]} \oplus E_{\bar{\Omega}}(V, V)^{[-1/2]} \oplus L_\Omega(W, V)^{[-1/2]} \oplus L_\Omega(V, W)^{[-1/2]}$  と定めることで、定義している。次数付き筋多様体は、通常の筋多様体から  $\mathbb{G}_m$  作用に関する固定点として得られるが、我々の次数付き筋多様体と、従来の次数付き筋多様体とは、 $\mathbb{G}_m$  作用の重み付けが異なる。しかしながら、様々な性質は  $(I, \Omega)$  が非輪状であるという仮定のもと同様に成り立つことが確かめられる [Qin12b]。

$V \leq V'$  で、任意の  $(i, a) \in \widehat{I}_1$  に対して、 $\dim V_i(a) \geq \dim V'_i(a)$  を満たすことを表す。 $\mathcal{M}_0(V, W)$  たちは、半単純 (閉) 軌道を分類しているので、

自明な半単純表現  $0$  を直和することで、 $V \leq V'$  に対して、closed embedding  $\mathcal{M}_0^\bullet(V', W) \subset \mathcal{M}_0^\bullet(V, W)$  が得られる。 $V$  全体を走らせることで得られる union を  $\mathcal{M}_0^\bullet(W)$  で表す。 $\mathcal{M}_0^\bullet(W)$  の表現多様体としての記述が、Lelclerc-Plamondon[LP12] および Schertotzke-Keller[KS13] により得られている。次数付きカルタン行列を

$$(\mathbf{C}_q v)_i(a) := v_i(a+1/2) + v_i(a-1/2) - \sum_{h \in \Omega; \text{out}(h)=i} v_{\text{in}(h)}(a+1/2) - \sum_{h \in \Omega; \text{in}(h)=i} v_{\text{out}(h)}(a-1/2)$$

で定める。

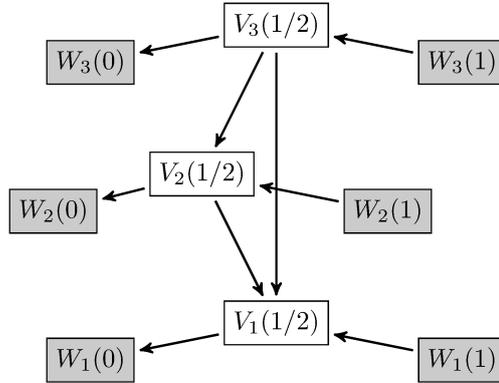
**定義 2.5.**  $(V, W)$  が  $\ell$ -dominant であるとは、 $w - \mathbf{C}_q v \leq 0$  であることを言う。

**命題 2.6.** 階層  $\mathcal{M}_0^{\bullet, \text{reg}}$  について、以下の性質が成り立つ。

- (1)  $\mathcal{M}_0^{\bullet, \text{reg}}(V, W) \neq \emptyset$  であることは、 $\mathcal{M}^\bullet(V, W) \neq \emptyset$  かつ  $(V, W)$  が  $\ell$ -dominant
- (2) もし  $\mathcal{M}_0^{\bullet, \text{reg}}(V, W) \subset \overline{\mathcal{M}_0^{\bullet, \text{reg}}(V', W)}$  ならば、 $V' \leq V$  すなわち、任意の  $(i, a) \in \widehat{I}_1$  に対して、 $\dim V'_i(a) \geq \dim V_i(a)$  が成立する。

### 2.3 レベル 1 の場合

以下では、 $W$  は  $[0, 1] \times I$  に台をもつと仮定する. すなわち  $(I, \Omega)$  に対して以下のような枠付き籠を考える.  $\bar{\Omega}$  に対する辺はなく、運動量写像は自明に成り立っていることに注意されたい。



もっとも簡単な場合ではあるが、以下に述べるように、非自明ながら、重要な例をなす. 以下では  $V$  は常に  $I \times \{1/2\}$ -graded vector space である. まず、 $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$  は安定性の条件に寄与しないので、さらに、 $W(1) = 0$  ( $i \in I$ ) という条件を化した籠多様体を見ると、vector bundle

$$p: \mathcal{M}^\bullet(V, W) \rightarrow \mathcal{M}^\bullet(V(1/2), W(0))$$

が得られることがわかる。

#### 2.3.1 $W(1) = 0$ の場合

$\mathcal{M}^\bullet(V(1/2), W(0))$  に関しては、Reineke[Rei08] による以下のような記述が知られている。

まず、 $\mathcal{M}^\bullet(V, W)$  は滑らかで射影的な多様体で、

$$\dim \mathcal{M}^\bullet(V, W) = \sum_{i \in I} w_i(0)v_i(1/2) + \sum_{h \in \Omega} v_{\text{out}(h)}(1/2)v_{\text{in}(h)}(1/2) - \sum_{i \in I} v_i(1/2)v_i(1/2)$$

が成り立つ.  $(I, \Omega)$  を籠として、 $S, V$  を  $I$ -graded ベクトル空間とすると、 $\text{Gr}(S, V) := \prod_{i \in I} \text{Gr}(\dim S_i, \dim V_i)$  を  $V$  の  $\dim S$  次元の  $I$ -graded 部分ベクトル空間をパラメトライズするグラスマン多様体 (の積) とする.

$$\widetilde{\text{Gr}}_{(I, \Omega)}(S, V) := \{(B, S') \in E_\Omega(V, V) \times \text{Gr}(S, V) \mid B_h S'_{\text{out}(h)} \subset S'_{\text{in}(h)} \text{ for } \forall h \in \Omega\}$$

と定める. 第一成分への射影のファイバーを  $B \in E_\Omega(V, V)$  に付随する籠グラスマン多様体といい、 $\text{Gr}_{(I, \Omega)}(S, (B, V))$  で表す. 籠グラスマン多様体は、(一般に特異点を持つ) 射影的多様体であり、籠の表現  $(B, V)$  の籠の表現としての部分空間 (=部分表現) をパラメトライズする多様体に他ならない.  $S_i$  を  $i \in I$  に付随する単純表現とし、 $\Delta_i$  を射影被覆、 $\nabla_i$  を入射包絡とする.  $\Delta_i (i \in I)$  は互いに非同型な射影直既約表現であり、 $\nabla_i (i \in I)$  は互いに非同型な入射直既約表現である。

**命題 2.7.**  $(V, W)$  に対して、 $\text{Gr}_{(I, \Omega)}(V, \nabla^{W(0)})$  で入射加群  $\nabla^{W(0)} = \bigoplus_{i \in I} \nabla_i \otimes W_i(0)$  の次元ベクトル  $V$  の籠グラスマン多様体を表す. このとき、同型が存在する.

$$\mathcal{M}^\bullet(V(1/2), W(0)) \cong \text{Gr}_{(I, \Omega)}(V(1/2), \nabla^{W(0)})$$

## 2.3.2

path  $r$  に対して  $z_r := \beta_{\text{in}(r)} B_r \alpha_{\text{out}(r)}$  と定めると,  $z = (z_r)$  は加群の射  $z: \Delta^{W(1)} \rightarrow \nabla^{W(0)}$  を定める. 長さ 0 の path  $r$  に対しても,  $z_r := \beta_{\text{in}(r)} \alpha_{\text{out}(r)}$  と定める. そこで,  $I \times [0, 1]$ -graded vector space  $W$  に対して,  $\mathbf{E}_W := \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\Delta^{W(1)}, \nabla^{W(0)})$  とおく. また,  $\text{Gr}(V(1/2), \nabla^{W(0)})$  上のベクトル束  $\widetilde{\text{Gr}}_{(I, \Omega)}(V, W)$  を

$$\widetilde{\text{Gr}}_{(I, \Omega)}(V, W) := \{(X, z) \in \text{Gr}_{(I, \Omega)}(V, \nabla^{W(0)}) \times \mathbf{E}_W \mid \text{Im}(z) \subset X\}$$

とさだめ,  $\pi: \widetilde{\text{Gr}}_{(I, \Omega)}(V, W) \rightarrow \mathbf{E}_W$  を第二成分への射影とする.  $\pi$  は射影射である. 以下は, [Nak11, Proposition 4.6] の非輪状態への一般化である.

**命題 2.8.** (1) 同型  $\mathcal{M}_0^*(W) \cong \mathbf{E}_W$  が

$$[(B, \alpha, \beta)] \mapsto (\beta_{\text{in}(r)} B_r \alpha_{\text{out}(r)})$$

で与えられる.

(2) 同型  $\mathcal{M}^*(V, W) \cong \widetilde{\text{Gr}}_{(I, \Omega)}(V, W)$  が,  $[(B, \alpha, \beta)] \mapsto (\text{Im } \Phi(B, \beta), (\beta_{\text{in}(r)} B_r \alpha_{\text{out}(r)}))$  で与えられる. 特に,  $\mathcal{M}^*(V, W)$  は既約. また以下の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^*(V, W) & \xrightarrow{\cong} & \widetilde{\text{Gr}}_{(I, \Omega)}(V, W) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{M}_0^*(V, W) & \xrightarrow{\cong} & \mathbf{E}_W \end{array}$$

## 2.3.3 直交バンドル

$\mathbf{E}_W$  の双対空間を考える. 任意の加群  $M$  に対して自然な双対性  $\text{Hom}_{\Omega}(\Delta_i, M) \cong M e_i \cong D \text{Hom}_{\Omega}(M, \nabla_i)$  が存在する. よって,  $\mathbf{E}_W^* \cong \text{Hom}_{\Omega}(\nabla^{W(0)}, \nabla^{W(1)})$  と自然に同一視される.  $\widetilde{\text{Gr}}_{(I, \Omega)}(V, W)$  の annihilator バンドルは, この同一視のもと, 以下のように記述される.

$$\widetilde{\text{Gr}}_{(I, \Omega)}^{\perp}(V, W) \cong \{(z^*, X) \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(\nabla^{W(0)}, \nabla^{W(2)}) \times \text{Gr}_{(I, \Omega)}(V, \nabla^{W(0)}) \mid X \subset \text{Ker}(z^*)\}$$

第一成分への射影  $\pi^{\perp}: \widetilde{\text{Gr}}_{(I, \Omega)}^{\perp}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{k\mathbb{Q}}(\nabla^{W(0)}, \nabla^{W(2)})$  のファイバーは,  $\text{Ker}(z^*)$  の旗グラスマン多様体に他ならない.

## 2.4 量子表現環

次数付き旗多様体  $\mathcal{M}_0^*(W)$  上の偏屈層のクラス  $\mathcal{P}_W$  と制限関手を定義し, **量子表現環** (quantum Grothendieck ring) を導入する.

$\mathbb{C}$  上の代数多様体  $X$  に対して,  $\mathcal{Q}_c^b(X)$  で構成可能層のなす導来圏とし,  $j \in \mathbb{Z}$  に対して, シフト関手を  $[j]: \mathcal{Q}_c^b(X) \rightarrow \mathcal{Q}_c^b(X)$  で表す. 局所閉部分多様体  $Y \subset X$  に対して,  $\mathbf{1}_Y := \mathbb{C}_Y[\dim Y]$  とし,  $Y$  の regular part  $Y^{\text{reg}}$  上の (finitary) 局所系  $\mathcal{L}$  に付随する交差コホモロジー複体を  $\mathbf{IC}(Y, \mathcal{L})$  で表す.  $\mathbf{IC}(Y, \mathbb{C}_{Y^{\text{reg}}})$  を単に,  $\mathbf{IC}(Y)$  で表す. ここで,  $\mathbf{IC}(Y, \mathcal{L})|_{Y^{\text{reg}}} = \mathcal{L}[\dim Y^{\text{reg}}]$  という約束とする.  $\pi: \mathcal{M}^*(V, W) \rightarrow \mathcal{M}_0^*(V, W)$  に対して,  $\mathcal{M}^*(V, W)$  上の偏屈層  $\mathbf{1}_{\mathcal{M}^*(V, W)}$  とその押し出し  $\pi_*(\mathbf{1}_{\mathcal{M}^*(V, W)})$  を考える.  $\pi$  は射影射かつ  $\mathcal{M}^*(V, W)$  は滑らかな多様体であるから, 分解定理より,  $\pi_*(\mathbf{1}_{\mathcal{M}^*(V, W)})$  は半単純複体であり,  $\mathbb{D}$  を Verdier 双対とすると,  $\mathbb{D}(\pi_*(\mathbf{1}_{\mathcal{M}^*(V, W)})) = \pi_*(\mathbf{1}_{\mathcal{M}^*(V, W)})$  を満たす.  $\mathcal{P}_W$  で,  $\mathcal{M}_0^*(V, W)$  上のある  $(V, W)$  に対して  $\pi_*(\mathbf{1}_{\mathcal{M}^*(V, W)})$  に (シフトを

除いて) 直和因子に現れる単純偏屈層の同型類のなす集合を表し,  $\mathcal{Q}_W$  で,  $\mathcal{P}_W$  を含む  $\mathcal{D}_c^b(\mathcal{M}_0^\bullet(W))$  の加法的かつ shift で閉じた部分圏とする. (split) Grothendieck 群  $K_0(\mathcal{Q}_W)$  には, シフトにより  $t$  作用が入り,  $\mathbb{Z}[t^\pm]$ -加群の構造が入り,  $\mathcal{P}_W$  は  $K_0(\mathcal{Q}_W)$  の  $\mathbb{Z}[t^\pm]$ -自由基底をなす. 横断片を用いた議論により,  $\mathcal{P}_W$  の分類が得られる.

**定理 2.9.** 以下が成り立つ

$$\mathcal{P}_W = \{\mathbf{IC}(\mathcal{M}_0^{\bullet \text{reg}}(V, W)) \mid (V, W) \text{ is } \ell\text{-dominant}\}$$

以下では,  $\ell$ -dominant な  $(V, W)$  に対して,  $\mathbf{IC}(\mathcal{M}^{\bullet \text{reg}}(V, W))$  を  $\mathbf{IC}_W(V)$  と書くことにする.

[Nak11, 3.5] や [VV03, 4] と同様に, “テンソル積多様体”  $\mathcal{T}_0(W^1; W^2)$  を用いて, 関式

$$\mathcal{M}_0^\bullet(W^1) \times \mathcal{M}_0^\bullet(W^1) \longleftarrow \mathcal{T}_0^\bullet(W^1; W^2) \longrightarrow \mathcal{M}_0^\bullet(W)$$

を介して, 制限関手

$$\widetilde{\text{Res}}_{W^1, W^2} := \kappa_{!}^* : \mathcal{Q}_W \rightarrow \mathcal{Q}_{W^1} \boxtimes \mathcal{Q}_{W^2}$$

が (純性を介した議論で) 定義でき,  $\mathcal{K} := \bigoplus_W K_0(\mathcal{Q}_W)$  は  $\mathbb{Z}[t^\pm]$  余代数をなす. 分解定理より, その  $\{\mathbf{IC}_W(V)\}$  に関する構造定数は全て正である. 双対基底を  $\{L_W(V)\}$  で表す. 以下では, その双対  $\mathcal{K}^*$  に  $\mathbb{Z}[t^\pm]$  代数の構造を入れる. また, 横断片から定まる対応  $\mathbf{IC}_W(V) \rightarrow \mathbf{IC}_{W^\perp}(V^\perp)$  に関して,  $\widetilde{\text{Res}}$  (の cocycle twist) が整合的であるから, 以下を定義することができる. 以下を **量子表現環 (quantum Grothendieck ring)** という.

$$\mathcal{R}_t := \left\{ (f_W)_W \in \prod_W \text{Hom}_{\mathbb{Z}[t^\pm]}(K_0(\mathcal{Q}_W), \mathbb{Z}[t^\pm]) \left| \begin{array}{l} \langle f_W, \mathbf{IC}_W(V) \rangle = \\ \langle f_{W^\perp}, \mathbf{IC}_{W^\perp}(V^\perp) \rangle \\ \text{for any } W \end{array} \right. \right\}$$

任意の  $\ell$ -dominant な対  $(V, W)$  は  $(0, C^\bullet(V, W))$  に帰着されるゆえ,  $\mathcal{R}_t$  は  $\{L_W(0)\}$  を基底としてもつ. これを **量子表現環  $\mathcal{R}_t$  の双対標準基底** という.

## 2.5 Fourier-Deligne-Sato 変換

[Nak11] において, クラスター代数と表現環との同一視において, クラスター単項式が双対標準基底に含まれることの証明において, 本質的な役割を果たしたのは, クラスター指標を偏屈層の理論を介して構成することであった.  $\mathcal{F} : D_c^b(\mathbf{E}_W) \simeq D_c^b(\mathbf{E}_W^*)$  を Fourier-Deligne-Sato 変換とする.

$$\mathcal{L}_W := \{\mathbf{IC}_W(V) \mid \text{codim supp } \mathcal{F}(\mathbf{IC}_W(V)) = 0\}$$

と定める. 構成から,  $\mathbf{IC}_W(0) \in \mathcal{L}_W$  が成り立つ. 一般には,  $\mathcal{L}_W = \{\mathbf{IC}_W(0)\}$  とは限らないため, 以下の元を考える.  $\mathbf{IC}_W(V) \in \mathcal{L}_W$  に対して,  $\mathcal{F}(\mathbf{IC}_W(V))$  の generic rank を  $r_W(V)$  とし,

$$\mathbb{L}_W := \sum (-1)^{\dim \mathcal{M}(V, W)} r_W(V) \mathbf{IC}_W(V)$$

と定める.  $\mathbb{L}_W$  は双対標準基底と upper unitriangular matrix で移り合うことがわかる. また,  $A_W = \text{Aut}(\nabla^W)$  の  $\mathbf{E}_W^*$  への作用が開軌道を持つことと presentation が rigid であること, また minimal injective resolution に対して, kernel が rigid であることと presentation が rigid であることが知られており, そのような場合がクラスター単項式に対応することが知られている. ゆえに, 量子クラスター単項式が双対標準基底に含まれることがわかる.

## 参考文献

- [BFZ05] A. Berenstein, S. Fomin, and A. Zelevinsky. Cluster algebras. III. Upper bounds and double Bruhat cells. *Duke Math. J.*, 126(1):1–52, 2005.
- [BZ05] Arkady Berenstein and Andrei Zelevinsky. Quantum cluster algebras. *Advances in Mathematics*, 195(2):405–455, 2005.
- [CC04] P. Caldero and F. Chapoton. Cluster algebras as hall algebras of quiver representations. *arXiv preprint math/0410187*, 2004.
- [CIKLFP13] Giovanni Cerulli Irelli, Bernhard Keller, Daniel Labardini-Fragoso, and Pierre-Guy Plamondon. Linear independence of cluster monomials for skew-symmetric cluster algebras. *Compositio Mathematica*, 149(10):1753–1764, 2013.
- [CK06] P. Caldero and B. Keller. From triangulated categories to cluster algebras. II. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 39(6):983–1009, 2006.
- [CK08] P. Caldero and B. Keller. From triangulated categories to cluster algebras. *Invent. Math.*, 172(1):169–211, 2008.
- [Fom10] S. Fomin. Total positivity and cluster algebras. *arXiv preprint arXiv:1005.1086*, 2010.
- [FP12] S. Fomin and P. Pylyavskyy. Tensor diagrams and cluster algebras. *arXiv preprint arXiv:1210.1888*, 2012.
- [FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. I. Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(2):497–529 (electronic), 2002.
- [FZ03a] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. II. Finite type classification. *Invent. Math.*, 154(1):63–121, 2003.
- [FZ03b] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras: Noted for the cdm-03 conference. *Current developments in mathematics*, 2003:1–34, 2003.
- [FZ07] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster algebras. IV. Coefficients. *Compos. Math.*, 143(1):112–164, 2007.
- [GLS11] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer. Kac–moody groups and cluster algebras. *Advances in Mathematics*, 228(1):329–433, 2011.
- [GLS12] C. Geiß, B. Leclerc, and J. Schröer. Cluster algebras in algebraic lie theory. *arXiv preprint arXiv:1208.5749*, 2012.
- [GY12] KR Goodearl and MT Yakimov. From quantum ore extensions to quantum tori via non-commutative ufd. *arXiv preprint arXiv:1208.6267*, 2012.
- [GY13] KR Goodearl and MT Yakimov. Quantum cluster algebra structures on quantum nilpotent algebras. *arXiv preprint arXiv:1309.7869*, 2013.
- [Her10] D. Hernandez. Simple tensor products. *Inventiones Mathematicae*, 181:649–675, 2010. 10.1007/s00222-010-0256-9.
- [HL10] D. Hernandez and B. Leclerc. Cluster algebras and quantum affine algebras. *Duke Math. J.*, 154:265–341, 2010.
- [HL11] D. Hernandez and B. Leclerc. Quantum grothendieck rings and derived hall algebras. *Arxiv preprint arXiv:1109.0862*, Jan 2011.
- [HL12] D. Hernandez and B. Leclerc. Monoidal categorifications of cluster algebras of type a and

- d. e-print arxiv <http://arxiv.org/abs/1207.3401>, 2012.
- [KKK12] S.J. Kang, M. Kashiwara, and M. Kim. R-matrices for quantum affine algebras and khovanov-lauda-rouquier algebras, i. e-print arxiv <http://arxiv.org/abs/1209.3536>, 2012.
- [KQ12] Yoshiyuki Kimura and Fan Qin. Graded quiver varieties, quantum cluster algebras and dual canonical basis. <http://arxiv.org/abs/1205.2066>, 05 2012.
- [KS13] Bernhard Keller and Sarah Scherotzke. Graded quiver varieties and derived categories. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2013.
- [Lec10] B. Leclerc. Cluster algebras and representation theory. *arXiv preprint arXiv:1009.4552*, 2010.
- [LP12] B. Leclerc and P.G. Plamondon. Nakajima varieties and repetitive algebras. *arXiv preprint arXiv:1208.3910*, 2012.
- [LS12] Kyungyong Lee and Ralf Schiffler. Positivity for cluster algebras of rank 3. *arXiv preprint arXiv:1205.5466*, 2012.
- [LS13] Kyungyong Lee and Ralf Schiffler. Positivity for cluster algebras. *arXiv preprint arXiv:1306.2415*, 2013.
- [MO12] Davesh Maulik and Andrei Okounkov. Quantum groups and quantum cohomology. *arXiv preprint arXiv:1211.1287*, 2012.
- [Nak11] H. Nakajima. Quiver varieties and cluster algebras. *Kyoto Journal of Mathematics*, 51(1):71–126, 2011.
- [Nak13] Hiraku Nakajima. Quiver varieties and tensor products, ii. In *Symmetries, Integrable Systems and Representations*, pages 403–428. Springer, 2013.
- [Qin12a] Fan Qin. Quantum cluster variables via Serre polynomials. *J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal)*, 2012(668):149–190, 2012. with an appendix by Bernhard Keller.
- [Qin12b] Fan Qin. t-analogue of q-characters and bases of quantum cluster algebras. e-print arxiv <http://arxiv.org/abs/1207.6604v1>, 07 2012.
- [Rei08] Markus Reineke. Framed quiver moduli, cohomology, and quantum groups. *J. Algebra*, 320(1):94–115, 2008.
- [VV03] M. Varagnolo and E. Vasserot. Perverse sheaves and quantum Grothendieck rings. In *Studies in memory of Issai Schur (Chevaleret/Rehovot, 2000)*, volume 210 of *Progr. Math.*, pages 345–365. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2003.