

# On Cartan matrices with two parameters

東京医科歯科大学教養部 清田正夫

Tokyo Medical and Dental University, College of Liberal Arts and Sciences

Masao KIYOTA

## 1 序文

本文の内容は千葉大学の越谷重夫氏との共同研究の結果である。また、2001 年の数理解析研講演 [K] の続編でもある。

$G$  を有限群、 $F$  を標数  $p > 0$  の代数閉体とする。群環  $FG$  は直既約な両側イデアル  $B_i$  達の直和に分解され、各  $B_i$  は  $FG$  のブロックと呼ばれている。 $B$  を  $FG$  のブロックとする。 $S_1, \dots, S_l$  ( $l = l(B)$ ) を  $B$  に属す単純  $FG$  加群とし、 $P_i$  を  $S_i$  の射影被覆とする。整数  $c_{ij} = \dim_F \text{Hom}_{FG}(P_i, P_j)$  をカルタン不変数と呼び、 $l \times l$  行列  $C = (c_{ij})$  をブロック  $B$  のカルタン行列という。

以下、カルタン行列  $C = (c_{ij})$  を特別な形に決めたとき、群  $G$  やブロック  $B$  の構造についてどんなことがいえるかを調べる。ブロック  $B$  の構造として、ここでは次の不変量を考える。

- $l(B)$  :  $B$  に属す単純  $FG$  加群の個数。
- $k(B)$  :  $B$  に属す通常既約指標の個数。
- $|D|$  :  $B$  の不足群  $D$  の位数。
- カルタン行列  $C$  の単因子。
- カルタン行列  $C$  の固有値。

カルタン行列  $C$  の単因子や固有値については次の事実が知られている。

事実 1  $C$  の行列式  $\det C$  は  $p$  べきである。

事実 2  $C$  の最大の単因子は  $|D|$  と一致していて、他の単因子はすべて  $|D|$  より小さい。

事実 3  $G$  の  $p'$  共役類の代表元の内から  $l(B)$  個の元  $x_i$  をうまく選ぶと

$\{|C_G(x_i)|_p \mid i = 1, \dots, l(B)\}$  が  $C$  の単因子全体と一致する。

事実 4  $C$  の固有値はいずれも正の実数で、その最大固有値は単根である。これを  $C$  の Frobenius 固有値と呼び、 $\rho(C)$  で表す。

ここだけの記号であるが、 $n(B) = |\{c_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq l(B)\}|$  とおく。つまり、 $n(B)$  は異なるカルタン不変数の個数を表す。カルタン行列は正則なので、 $n(B) = 1$  と  $l(B) = 1$  は同値となる。以下、 $n(B) = 2$  となるブロック  $B$  の構造を考察する。§2 では、 $n(B) = 2$  となるブロック  $B$  のカルタン行列  $C$  が 2 とおりに決まること、および、 $C$  が一意的に決まるのではないかという予想とその証拠を述べる。§3 では、 $p$  可解群  $G$  の主ブロック  $B_0$  が  $n(B_0) = 2$  を満たすための条件を群構造の言葉で記述する。

## 2 補題

以下、序文の記号をそのまま用いる。すなわち、 $B$  を有限群  $G$  の  $p$  ブロックとし、 $D, C$  をそれぞれ  $B$  の不足群、カルタン行列とする。また、 $n(B)$  で  $B$  の異なるカルタン不変数の個数を表す。カルタン行列を記述するため、2つの  $l$  次正方行列  $C(a, b), C'(a, b)$  を定義する。正整数  $a, b$  について、対角成分がすべて  $a$  でそれ以外の成分が  $b$  となる  $l$  次正方行列を  $C(a, b)$  とし、 $C(a, b)$  の  $(l, l)$  成分  $a$  を  $b$  に置き換えた行列を  $C'(a, b)$  とする。例えば、 $l = 4$  のとき、

$$C(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad C'(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

となる。これらの記号のもとで、

**補題 1**  $n(B) = 2$  で  $\{c_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq l\} = \{a, b\}$ ,  $a > b$  のとき、 $C = C(a, b)$  または  $C = C'(a, b)$  となる。

補題 1 の証明には不等式  $c_{ij}^2 < c_{ii}c_{jj}$ , ( $i \neq j$ ) を用いる。

$p$  可解群  $G$  の巡回ブロック  $B$  (不足群  $D$  が巡回群となるブロック) は  $C(a, b)$  の形のカルタン行列を持つブロックの典型例のひとつである。実際このとき  $C = C(m+1, m)$  となることが知られている。ここで  $m$  は等式

$$ml = |D| - 1$$

を満たす整数で、巡回ブロック  $B$  の重複度と呼ばれている。

一方、 $C = C'(a, b)$  となるブロック  $B$  の例は（少なくとも私には）見当たらない。実際、 $p$  可解群  $G$  の場合や、 $D$  が正規部分群の場合には、 $C = C'(a, b)$  は起こらない。

**補題 2**  $G$  が  $p$  可解群であるか、または、 $D$  が  $G$  の正規部分群であるとする。このとき、 $n(B) = 2$  ならば、 $C = C(a, b)$  となる。

上でみたように、巡回ブロックでは、 $C = C(a, b)$  で  $a = m + 1, b = m$  となっている。とくに  $a, b$  は互いに素である。実は、 $a, b$  が互いに素である場合も  $C = C(a, b)$  となる。

**補題 3** 補題 1 の仮定と記号のもとで、 $(a, b) = 1$  ならば、 $C = C(a, b)$  となる。

補題 2, 3 から次が予想される。

**予想 4**  $n(B) = 2$  のとき、 $C = C(a, b)$  となるか？

$C = C(a, b)$  となるブロック  $B$  の構造については [K] に詳しく述べてある。

### 3 主定理

以上の準備のもとで、 $p$  可解群  $G$  の主ブロック  $B_0$  が条件  $n(B_0) = 2$  を満たすとき、 $G$  の構造を決定する。

**主定理**  $G$  を  $p$  可解群、 $B_0$  を  $G$  の主ブロックとする。 $C$  を  $B_0$  のカルタン行列とする。このとき、次は同値である。

- (1)  $n(B_0) = 2$
- (2)  $l(B_0) \geq 2$  かつ正整数  $a, b$  がとれて  $C = C(a, b)$  となる。
- (3) 次の (i) および (ii) が成り立つ。
  - (i)  $G/O_{p', p}(G)$  は位数が 2 以上の可換群。
  - (ii)  $\bar{G} = G/O_{p'}(G)$  とおく。 $x, y$  が  $\bar{G}$  の非自明な  $p'$  元ならば、 $|C_{\bar{G}}(x)| = |C_{\bar{G}}(y)|$  となる。

**略証** 補題 2 から (1) と (2) の同値性はすぐわかる。

(2) を仮定する。[K] 命題 4 より、 $\rho(C) = |D|$  となる。一方、 $C$  の形から  ${}^t(1, \dots, 1)$  が

$\rho(C) = |D|$  の固有ベクトルとなる。[K-M-W] Theorem 1 より、 $B_0$  の単純  $FG$  加群  $S_i$  はすべて次元 1 となる。ゆえに  $G' \leq \text{Ker} S_i$ 。Brauer の定理より  $\bigcap \text{Ker} S_i = O_{p',p}(G)$ 。これから (3, i) が出る。  $C$  の単因子は  $\{a-b, \dots, a-b, |D|\}$  なので序文の事実 3 から (3, ii) が導ける。これで (2) から (3) が証明された。

(3) から (2) を導くには、公式  $c_{ij} = (\Phi_i, \Phi_j)$  を用いて指標の計算を実行する。ここで  $\Phi_i$  は射影被覆  $P_i$  の指標を表す。計算の詳細は省略する。

最後に定理の条件 (3 i) だけでは  $C = C(a, b)$  が導けないことを例示する。  $p = 3$ ,  $G = S_3 \times S_3$  は (3, i) を満たすが、  $B_0(FG) = FG$  のカルタン行列  $C$  は

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

となり、定理の条件 (2) が成り立たない。

## 参考文献

- [K] 清田正夫、2つのパラメーターを持つカルタン行列について、数理解析研究所講究録 1251, 42-45, 有限群のコホモロジー論の研究 (2002)
- [K-M-W] M. Kiyota, M. Murai and T. Wada, Rationality of eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, J. of Algebra 249, 110-119 (2002)