数理解析研究所講究録
第1926巻 2014年 66-71

Modular irreducible representations of coherent configurations

信州大学・理学部 花木 章秀
Akihide Hanaki
Faculty of Science, Shinshu University

よく知られているように、可移置換群から坂内-伊藤 [1] の意味で association scheme が定義される。この "可移" という条件を外して同様に定義されるものが coherent configuration であり、主に Higman [2], [3] などで、研究されている。Higman は、結果の一つとして、coherent configuration の複素既約表現が、fiber の既約表現を通して得られることを示している。ここで fiber とは、置換群の場合で言えば、一つの軌道から得られる可移な置換群によって定義される association scheme のことと思ってよい。Higman は複素表現のみを考えたが、ここではそれを正標数の代数閉体上の表現へ一般化する。

また、一つの応用として、ある特殊な coherent configuration のクラスに対して、その既約表現と Lowey 列を決定する (前川悠 (信州大学) との共同研究)。

一般に、association scheme などについて、それが与える代数構造は同型であっても、組合せ論的には異なるものが多数ある。これらを区別するために、正標数の体上での行列のランクなどを調べることが有効である場合があるが、そのためには、まずその代数構造を知ることが重要になると思われる。まだ、有効な応用は得ていないが、今後、組合せ論への応用が得られることを期待する。

1 Coherent configurations

X を有限集合とする。R を単位元をもつ環とする。$M_X(R)$ で、R の元を要素にもち、行、列ともに X で添字付けられた行列のなす環を表す。$s \subset X \times X$ に対して、その**隣接行列** $\sigma_s \in M_X(\mathbb{Z})$ を、$(x, y) \in s$ のとき $(\sigma_s)_{xy} = 1$、そう

でないとき $(\sigma_s)_{xy}=0$ で定める。S を $X\times X$ の分割とする。$X\times X=\bigcup_{s\in S}s$ である。(X,S) が **coherent configuration** であるとは、以下の条件を満たすこととする。

(1) ある $\Delta=\{1_1,\cdots,1_r\}\subset S$ があって、$\bigcup_{i=1}^r 1_i=\{(x,x)\mid x\in X\}$ である。

(2) $s\in S$ ならば $s^*=\{(y,x)\mid(x,y)\in s\}\in S$ である。

(3) $s,t,u\in S$ に対して、ある非負整数 p_{st}^u があって $\sigma_s\sigma_t=\sum_{u\in S}p_{st}^u\sigma_u$ となる。

Coherent configuration が **homogeneous** であるとは、$r=1$ のときを言う。Homogeneous coherent configuration は坂内-伊藤 [1] の意味で association scheme と同じものである。以下、(X,S) を coherent configuration とする。条件 (3) より $\mathbb{Z}S=\bigoplus_{s\in S}\mathbb{Z}\sigma_s$ は環となる。係数環を変更して $RS=R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}S$ は R-代数となる。これを (X,S) の R 上の**隣接代数**とよぶ。$s\in S$ に対して $\sigma_{1_i}\sigma_s\sigma_{1_j}=\sigma_s$ となる (i,j) が一意的に定まる。$S^{ij}=\{s\in S\mid\sigma_{1_i}\sigma_s\sigma_{1_j}=\sigma_s\}$ とおくと

$$S=\bigcup_i\bigcup_j S^{ij}$$

は S の分割となる。このとき RS^{ii} は RS の (単位元を共有しない) 部分代数であり、RS^{ij} は (RS^{ii},RS^{jj})-両側加群となる。また $RS^{ij}RS^{jk}\subset RS^{ik}$, $j\neq k$ のとき $RS^{ij}RS^{k\ell}=0$ が成り立つ。$X_i=\{x\in\mid(x,x)\in 1_i\}$ と定めれば $X=\bigcup_{i=1}^r X_i$ は X の分割である。X_i を (X,S) の **fiber** という。(X_i,S^{ii}) は homogeneous coherent configuration である。

Coherent configuration の典型的な例は置換群によって得られる。X を有限集合、G を X 上の置換群とする。このとき G は直積集合 $X\times X$ にも (成分毎に) 自然に作用する。この作用の軌道分解によって $X\times X$ の分割 S を定めれば (X,S) は coherent configuration となる。このとき X の G による軌道が fiber になる。置換群が可移であれば、coherent configuration は homogeneous となる。より具体的な例は次節で紹介する。

2 Higman の結果

Coherent configuration (X,S) の複素数体上の隣接代数 $\mathbb{C}S$ は半単純である。従って、この場合には有限群の場合と同じように指標理論が有効である。

Higman による結果を正確に述べるには、やや準備が必要になるので、ここでは簡単な例を示すだけにする。

$G = \langle (1,2),(3,4) \rangle$, $H = \langle (1,2)(3,4) \rangle$ とする。G と H を自然に $X = \{1,2,3,4\}$ 上の置換群と見て、その $X \times X$ 上の軌道分解を行列で表わせば

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 4 \\ \hline 5 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 3 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \\ \hline 6 & 7 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

である。この分解から coherent configuration が得られる。G, H による X の軌道分解は、いずれも $X = \{1,2\} \cup \{3,4\}$ であるが、$X \times X$ の軌道分解は異なる。

X の軌道 $\{1,2\}$, $\{3,4\}$ の定める homgeneous coherent configuration の指標表は、それぞれ

	0	1
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

,

	2	3
φ_1	1	1
φ_2	1	-1

である。これを用いて、もとの coherent configuration の指標表が求められるというのが、Higman の結果である。まず、ここに現れないもの $(4,5,6,7)$ については、固有値が 0 しかないので、その指標の値は 0 となるから、それを省略する。すると指標表は

	0	1	2	3
$\chi_1 + \varphi_1$	1	1	1	1
χ_2	1	-1	0	0
φ_2	0	0	1	-1

,

	0	1	2	3
$\chi_1 + \varphi_1$	1	1	1	1
$\chi_2 + \varphi_2$	1	-1	1	-1

となる。すなわち、既約指標は fiber の既約指標の和で表される。和がどのようになっているかは、対角部分以外の様子で決定される。

3 主結果

主結果は前節で見た Higman の結果が、正標数の代数閉体上での既約表現についても成り立つというものである。

A を有限次元代数とする。$\mathrm{pi}(A)$ で A の原始べき等元全ての集合を表す。$e, f \in \mathrm{pi}(A)$ に対して、右 A-加群として $eA \cong fA$ であるときに $e \sim f$ と定

めると、これは同値関係となる。e を含む同値類を $[e]$ で表し、同値類の集合を $\widetilde{\mathrm{pi}}(A)$ で表す。このとき $\widetilde{\mathrm{pi}}(A)$ と 既約 A-加群の同型類の完全代表系からなる集合 $\mathrm{IRR}(A)$ の間には $[e] \mapsto eA/eJ(A)$ によって全単射が存在する。ここで $J(A)$ は A の Jacobson 根基である。

p を素数、F を標数 p の代数閉体、(X,S) を coherent configuration、$X_1,\cdots,X_r$ を (X,S) の fiber とする。$r \geq 2$ と仮定しておく。(X_i, S^{ii}) の隣接代数 FS^{ii} は FS の (単位元を共有しない) 部分代数である。

FS^{ii} の原始べき等元は FS の原始べき等元でもあり、$e,f \in \mathrm{pi}(FS^{ii})$ に対して $eFS^{ii} \cong fFS^{ii}$ と $eFS \cong fFS$ は同値である。従って、単射 $\widetilde{\mathrm{pi}}(FS^{ii}) \to \widetilde{\mathrm{pi}}(FS)$ が得られる。これを自然に拡張して、写像 $\Phi : \bigcup_{i=1}^{r} \widetilde{\mathrm{pi}}(FS^{ii}) \to \widetilde{\mathrm{pi}}(FS)$ が得られ、これは全射となる。

$\mathcal{A} = \bigoplus_{i=1}^{r} FS^{ii}$ とおく。$\mathcal{A}$ は FS の部分代数である。また、自然な対応によって $\widetilde{\mathrm{pi}}(\mathcal{A})$ と $\bigcup_{i=1}^{r} \widetilde{\mathrm{pi}}(FS^{ii})$ を同一視できる。

$[e] \in \widetilde{\mathrm{pi}}(FS)$ に対して $e_i \in \mathrm{pi}(FS^{ii})$ $(i = 1,\cdots,r)$ を、$\Phi^{-1}([e]) \cap \widetilde{\mathrm{pi}}(FS^{ii}) \neq \emptyset$ ならば $[e_i] \in \Phi^{-1}([e]) \cap \widetilde{\mathrm{pi}}(FS^{ii})$ とし、そうでないならば $e_i = 0$ とする。

上記の設定の下で、以下の命題が成り立つ。

命題 1. $eFS/eJ(FS){\downarrow_{\mathcal{A}}} \cong \bigoplus_{i=1}^{r} e_iFS^{ii}/e_iJ(FS^{ii})$.

この結果を用いるためには、いつ $\Phi([e]) = \Phi([f])$ となるかを考える必要がある。これについては次の結果がある。

命題 2. $[e],[f] \in \widetilde{\mathrm{pi}}(\mathcal{A})$ に対して、$\Phi([e]) = \Phi([f])$ となるための必要十分条件は $eFSf \not\subset F(FS)$ となることである。

$V \in \mathrm{IRR}(FS)$ に対して、その射影被覆を $P(V)$ で表す。また FX で標準 FS-加群を表す。すなわち、FX は $FS \subset M_F(X)$ とみて、FX を自然に FS-加群と見たものである。このとき $m_V = \mathrm{Hom}_{FS}(P(V), FX)$ とおいて、これを V の**重複度**という。これは FX の組成列に既約因子として V が現れる個数を現している。

次が主定理である。

定理 3. (X,S) を coherent confuguration とし $X_1, X_2, \cdots, X_r$ をその fiber とする。F は代数閉体とする。

(1) 写像 $\Phi' : \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{IRR}(FS^{ii}) \to \mathrm{IRR}(FS)$,

$$\Phi'(W) = (W \otimes_{FS^{ii}} FS)/J(FS)(W \otimes_{FS^{ii}} FS)$$

が定義され、これは全射である。また、Φ' の $\mathrm{IRR}(FS^{ii})$ への制限は単射である。

(2) $V \in \mathrm{IRR}(FS)$ に対して $V\downarrow_{\mathcal{A}} \cong \bigoplus_{W\in\Phi'^{-1}(V)} W$ が成り立つ。特に $\dim_F V = \sum_{W\in\Phi'^{-1}(V)} \dim_F W$ である。

(3) 写像 Φ' は重複度を保つ。すなわち $m_W = m_{\Phi'(W)}$ が成り立つ。

4 具体例

最後に簡単な具体例を考える。この節の結果は前川悠 (信州大学) との共同研究による。

次のように coherent configuration を定義する。まず fiber となる homogeneous coherent configuration を次のように定める。

1. $|X_i| = k_i = 1$ $(1 \leq i \leq \alpha)$ とする。$|S^{ii}| = 1$ である。
2. $|X_i| = k_i$, $|S^{ii}| = 2$ $(\alpha+1 \leq i \leq r)$ とする。更に
   - $p \nmid k_i$ $(\alpha+1 \leq i \leq \beta)$
   - $p \mid k_i$ $(\beta+1 \leq i \leq r)$

   とする。

(X, S) は $X_1, \cdots, X_r$ の直和、すなわち $|S^{ij}| = 1$ $(i \neq j)$ で定まるものとする。

前節までの結果を用いれば、(X, S) の既約加群とその射影被覆の Loewy 台の構造が決定できる。

命題 4. 既約 FS-加群は

$$U,\ V_i\ (\alpha+1 \leq i \leq \beta),\ W_j\ (\beta+1 \leq j \leq r)$$

である。

命題 5. (1) $1 \leq \beta < r$ ならば、既約加群の Loewy 台は以下の通りである。

$$\left(\frac{U}{W_{\beta+1}\quad\cdots\quad W_r}\right), \qquad (V_i), \qquad \left(\begin{array}{c} W_j \\ \hline U \\ \hline W_{\beta+1}\quad\cdots\quad W_r \end{array}\right)$$

$(\alpha+1 \leq i \leq \beta,\ \beta+1 \leq j \leq r)$.

(2) $0 = \beta < r$, ならば、既約加群の Loewy 台は以下の通りである。

$$\left(\frac{W_j}{W_1 \quad \cdots \quad W_r}\right)$$

$(1 \leq j \leq r)$.

(3) $\beta = r$ ならば FS は半単純である。

References

[1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic combinatorics. I*, The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., Menlo Park, CA, 1984.

[2] D. G. Higman, *Coherent configurations. I. Ordinary representation theory*, Geometriae Dedicata **4** (1975), no. 1, 1–32.

[3] ———, *Coherent configurations. II. Weights*, Geometriae Dedicata **5** (1976), no. 4, 413–424.