

Cayley–Hamilton type theorems of higher order and second fundamental theorems of invariant theory

伊藤稔 (鹿児島大学理学部)

Minoru ITOH (Faculty of Science, Kagoshima University)

序文

不変式論の第二基本定理が Cayley–Hamilton 定理やその高階の類似物で記述可能な不変式環について報告する.

通常の Cayley–Hamilton 定理は $A_1 = \mathcal{P}(V \otimes V^*) \otimes V \otimes V^*$ という代数の $GL(V)$ -不変元のなす不変式環に関する第二基本定理と見なせる (ここで V は n 次元複素ベクトル空間とする). つまり不変式環 $A_1^{GL(V)}$ は \mathbb{C} 代数としては $n+1$ 個の元から生成されて, トレース付き代数としてはひとつの元から生成されるが, いずれにしてもその関係式は実質的に通常の Cayley–Hamilton 定理で尽きるのである.

同様に, $A_q = \mathcal{P}(V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*)^{\otimes q}$ という代数の $GL(V)$ -不変元のなす不変式環も, その第二基本定理が Cayley–Hamilton 定理の類似で記述できる. この不変式環 $A_q^{GL(V)}$ も単一の元から生成されて, その関係式は実質的にこの Cayley–Hamilton 型定理で尽きるのである (ただしトレースに似た構造をもつ代数の枠組みで). この Cayley–Hamilton 型定理は阿賀岡芳夫 [A] によって与えられたもので, 本稿では「高階の Cayley–Hamilton 定理」と呼ぶ.

実際には A_q だけでなく, ある系列の代数において不変式論の第二基本定理がこの高階の Cayley–Hamilton 定理で記述できる. このうちもっとも本質的なのがこの A_q の不変式論ということになる.

1. 高階の Cayley–Hamilton 定理

本稿で中心的な役割をはたす高階の Cayley–Hamilton 定理を述べておく.

まず通常の Cayley–Hamilton 定理は次のような等式だった:

定理 1.1. 成分が互いに可換な n 次正方行列 Z に対して次がなりたつ:

$$\sum_{k+l=n} (-)^k \det_k(Z) Z^l = 0.$$

ただし $\det_k(Z)$ を次のように定める:

$$\det_k(Z) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \det(Z_{i_a i_b})_{1 \leq a, b \leq k}.$$

これを一般化した次の等式がなりたつ:

定理 1.2 ([A]). 非負整数 q を固定する. 成分が互いに可換な n 次正方行列 Z に対して次がなりたつ:

$$\sum_{k+l_1+\dots+l_q=n+1-q} (-)^k \det_k(Z) Z^{l_1} \otimes \dots \otimes Z^{l_q} \sum_{\sigma \in S_q} \operatorname{sgn}(\sigma) \gamma(\sigma) = 0.$$

ただし $\gamma(\sigma)$ を次のように定める (E_{ij} は行列単位):

$$\gamma(\sigma) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_q \leq n} E_{i_{\sigma(1)} i_1} \otimes \dots \otimes E_{i_{\sigma(q)} i_q}.$$

これを本稿では「高階の Cayley–Hamilton 定理」と呼ぼう. $q = 1$ のときが通常の Cayley–Hamilton 定理である.

2. A_0, A_1 の不変式論

代数 A_q について調べる前に, その特別な場合である A_0 や A_1 の不変式論を整理しておこう.

V を n 次元複素ベクトル空間とする. 非負整数 q に対して, 代数 A_q を

$$A_q = \mathcal{P}(V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*)^{\otimes q}$$

と定める. A_0, A_1, \dots のあいだには次のような自然な包含関係がある:

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots.$$

この包含関係は $GL(V)$ の作用と両立するから, さらに次のような不変式環の包含関係を得る:

$$A_0^{GL(V)} \subset A_1^{GL(V)} \subset A_2^{GL(V)} \subset \dots.$$

以下 e_1, \dots, e_n を V の基底, e_1^*, \dots, e_n^* をその双対基底とする. また z_{ij} をこれから自然に決まる $V \otimes V^*$ の座標とする.

まず $A_0 = \mathcal{P}(V \otimes V^*)$ について見よう. A_0 の $GL(V)$ -不変元は要するに「正方行列の行列成分の多項式で conjugation で不変なもの」であり, これらは固有多項式の係数 $\omega_1, \dots, \omega_n$ から生成され, この n 個の生成元は代数的に独立である. これで生成元とその関係式が決定できたことになる. 具体的には生成元は $\omega_k = \det_k(Z)$ と表される. ただし Z を

$Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ という A_0 の元を成分とする n 次正方行列とする. この $Z \in \text{Mat}_n(A_0)$ は $A_1 = A_0 \otimes V \otimes V^*$ の元と見なすこともできる:

$$Z = \sum_{i, j=1}^n z_{ij} \otimes e_i \otimes e_j^*.$$

次に A_1 の $GL(V)$ -不変元について考えよう. $A_0^{GL(V)} \subset A_1^{GL(V)}$ だから $\omega_1, \dots, \omega_n \in A_0^{GL(V)}$ は $A_1^{GL(V)}$ の元であり, これ以外に $Z \in A_1$ も $GL(V)$ -不変元である. 実はこれで $GL(V)$ -不変元は実質的に尽きる:

定理 2.1. $A_1^{GL(V)}$ は \mathbb{C} 代数として $\omega_1, \dots, \omega_n, Z$ で生成される:

これら生成元の関係式としては Cayley–Hamilton 定理があるが, 実はこれからすべての関係式が生成される:

定理 2.2. $\omega_1, \dots, \omega_n, Z$ の関係式は Cayley–Hamilton 定理で尽きる.

$A_1^{GL(V)}$ に関するこれらの結果は, あとで述べるようにトレース付き代数の枠組みでもっと簡潔に書くことができる.

3. Diagram

トレース付き代数の説明の前に Diagram を導入しておく.

3.1. 行列を「矢尻」と「矢羽」をもつ図形として表す (矢尻と矢羽はそれぞれ V と V^* の元に当たる). また行列成分は矢尻と矢羽に添字をつけて表す. たとえば行列 Z とその (i, j) 成分 z_{ij} は次のように表そう:

$$Z = \leftarrow \bullet \rightarrow, \quad z_{ij} = \leftarrow \bullet \rightarrow_j.$$

次に「矢尻と矢羽の融合」という記法を導入する. 「 \leftarrow 」という矢尻と矢羽の融合した状態を次のように定めるのである:

$$\leftarrow \leftarrow = \sum_{i=1}^n \leftarrow_i \leftarrow_i.$$

つまり, 一般に「矢尻と矢羽の融合」は「矢尻と矢羽に同じ添字をつけて, その添字を 1 から n まで動かして和をとる」という意味とする. 本質的にはこれは V と V^* のカップリングと見なせる. またこの矢尻と矢羽の融合した状態「 \leftarrow 」を単に「 --- 」と略記する.

この記法を用いると, 行列 A, B の積は A の矢羽と B の矢尻の融合で表される. たとえば Z^2 は次のように表せる:

$$Z^2 = \leftarrow \bullet \leftarrow \bullet \rightarrow = \leftarrow \bullet \text{---} \bullet \rightarrow.$$

$n + 1$ 本の交代和を次のように書き直せばよい:

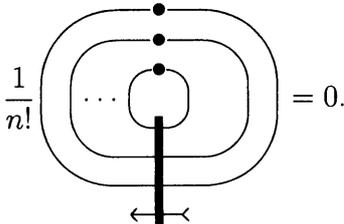
$$\underbrace{\begin{array}{c} \dots \\ \text{---} \\ \dots \end{array}}_{n+1 \text{ 本}} = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \text{sgn}(\sigma) \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{n+1} \leq n} \begin{array}{c} \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ i_1 \quad \dots \quad i_{n+1} \\ \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ i_{\sigma(1)} \quad \dots \quad i_{\sigma(n+1)} \\ \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

$$= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{n+1} \leq n} \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \text{sgn}(\sigma) \begin{array}{c} \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ i_1 \quad \dots \quad i_{n+1} \\ \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ i_{\sigma(1)} \quad \dots \quad i_{\sigma(n+1)} \\ \downarrow \quad \dots \quad \downarrow \\ \dots \quad \dots \quad \dots \end{array}$$

i_1, \dots, i_{n+1} には重複が生じるから、内側の交代和は 0 になる.

3.3. 交代和の記法を用いて Cayley–Hamilton 定理やその類似も簡潔に表せる.

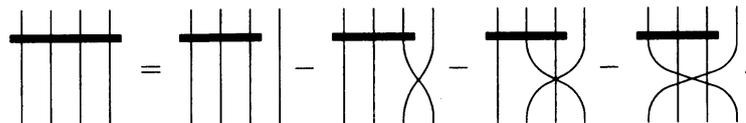
まず通常の Cayley–Hamilton 定理 (定理 1.1) は次のような diagram の等式として表される (ただしここに \bullet は n 個あるとする):

(3.1) 

左辺の diagram が 0 に等しいのは、これが $n + 1$ 本の交代和だからである. また左辺の交代和は次のように変形できる (これでこの等式が Cayley–Hamilton 定理と同値とわかる):

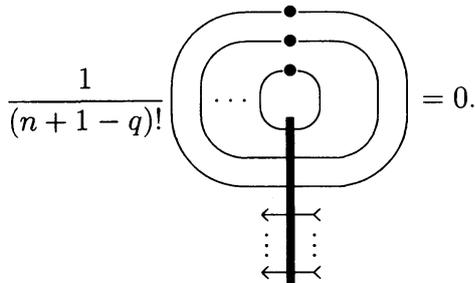
(3.2)
$$\sum_{p+q=n} (-)^q \det_p(Z) Z^q.$$

この変形の鍵になるのが交代和の記法に関する「余因子展開」である. 「 n 本の交代和」は「 $n - 1$ 本の交代和」の n 個の和で表せるが、これは一種の余因子展開と見なせる. たとえば $n = 4$ の場合は次のようになる:



この「余因子展開」をくりかえし適用すれば (3.1) の左辺が (3.2) に等しいことがわかる.

高階の Cayley–Hamilton 定理 (定理 1.2) も同様に次の diagram の等式で表せる (証明は省略):

(3.3) 

ただしこの図には $n+1-q$ 個の \bullet と q 個の \leftarrow があるとする¹.

3.4. この種の diagram の歴史については [C] の 4.9 節にくわしい. この種の diagram は tensor diagrams, birdtracks, arrow diagrams などの名前では呼ばれている. 矢尻や矢羽の記法は 19 世紀から使われていたようだが, 太い線による交代和の記法は物理学者の Penrose によって導入されたものらしい.

4. トレース付き代数

A_1 の不変式論はトレース付き代数の枠組みでまとめるとわかりやすい.

定義 4.1. \mathbb{C} 代数 A と線型写像 $\text{tr}: A \rightarrow A$ が, 任意の $a, b \in A$ に対して次の条件をみたすとき (A, tr) はトレース付き代数であるという:

- (i) $\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba)$.
- (ii) $\text{tr}(\text{tr}(a)b) = \text{tr}(a) \text{tr}(b)$.
- (iii) $\text{tr}(a)b = b \text{tr}(a)$.

トレース付き代数の元 a に対しては, トレースの他に $\det_k(a)$ も自然に定義できる ($\det_k(Z)$ を $\text{tr}(Z^1), \dots, \text{tr}(Z^k)$ で表したのと同じ式で, $\det_k(a)$ を $\text{tr}(a^1), \dots, \text{tr}(a^k)$ で定義する).

ただ一つの元 \bar{Z} から生成されるトレース付き代数としての自由代数 \bar{A}_1 を考えよう. $\bar{\varphi}_k = \text{tr}(\bar{Z}^k)$ とおくと, \bar{A}_1 は次のように表せる:

$$\bar{A}_1 = \mathbb{C}[\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1, \dots] \otimes \mathbb{C}[\bar{Z}].$$

この \bar{A}_1 を使うと A_1 の不変式論は次のようにまとめられる:

定理 4.2. トレース付き代数として次の等式がなりたつ:

$$A_1^{GL(V)} \simeq \bar{A}_1 / (\overline{\text{CH}}_n, \bar{\varphi}_0 - n).$$

ただし $\overline{\text{CH}}_n$ は Cayley–Hamilton 定理の左辺を表す. つまり次のように定める:

$$\overline{\text{CH}}_n = \sum_{k+l=n} (-)^k \det_k(\bar{Z}) \otimes \bar{Z}^l.$$

またイデアルはトレース付き代数としてのイデアルである:

定義 4.3. トレース付き代数 $A = (A, \text{tr})$ に対して, I が次の条件をみたすとき, I はトレース付き代数としての A のイデアルであるという:

- (i) I は A の \mathbb{C} 代数としてのイデアル.
- (ii) $\text{tr}(A) \subset A$.

¹このままではこの diagram はすこし説明不足である. 矢尻と矢羽が複数個あるため, これらを区別するラベルづけが本当は必要である.

5. A_q の不変式論

ここまでの議論を踏まえて $A_q = \mathcal{P}(V \otimes V^*) \otimes (V \otimes V^*)^{\otimes q}$ の不変式論を考えよう。

まず \mathbb{C} 代数の枠組みで考えると、不変式論の第一・第二基本定理として次がなりたつ：

定理 5.1. 次がなりたつ：

$$A_q^{GL(V)} = \langle \varphi_1^{k_1} \cdots \varphi_n^{k_n} Z^{l_1} \otimes \cdots \otimes Z^{l_q} \gamma(\sigma) \mid k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \sigma \in S_q \rangle.$$

ただし $\varphi_k = \text{tr}(Z^k)$ とする。つまり \mathbb{C} 代数として、 $A_q^{GL(V)}$ は $\varphi_1, \dots, \varphi_n, Z$, さらに $\sigma \in S_q$ に対する $\gamma(\sigma)$ から生成される。

定理 5.2. \mathbb{C} 代数として、関係式は $\text{CH}_n^1, \dots, \text{CH}_n^q$ で尽きる。

ただし CH_n^q は高階の Cayley–Hamilton 定理の左辺である。つまり非負整数 q に対して CH_n^q を次のように定める：

$$\text{CH}_n^q = \sum_{k+l_1+\cdots+l_q=n+1-q} (-)^k \det_k(Z) Z^{l_1} \otimes \cdots \otimes Z^{l_q} \sum_{\sigma \in S_q} \text{sgn}(\sigma) \gamma(\sigma).$$

この不変式論の第二基本定理をトレース付き代数に似た代数の枠組みで書き直そう。

まず線型写像 $\text{tr}' : A_q \rightarrow A_{q-1}$ を $a \otimes v \otimes v^* \mapsto \langle v^*, v \rangle a$ と定める（ここで a は A_{q-1} の元）。これは diagram で表したときに「 q 本の矢尻と矢羽のうち最後のもの同士を融合させる」という操作に当たる。高階の Cayley–Hamilton 定理は (3.3) と表されるから、 CH_n^{q-1} はこの写像による CH_n^q の像に等しい（スカラー倍を無視すれば）。

次にこの写像 tr' を備えた代数の枠組みで自由代数に当たるものを考える。まず wreath 積を用いて次のような代数 F_q を定義する：

$$F_q = \mathbb{C}[\bar{Z}] \wr S_q = \mathbb{C}[\bar{Z}]^{\otimes q} \otimes \mathbb{C}S_q.$$

積は次のように定める：

$$\bar{Z}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \bar{Z}^{k_q} \otimes \sigma \cdot \bar{Z}^{l_1} \otimes \cdots \otimes \bar{Z}^{l_q} \otimes \tau = \bar{Z}^{k_{\tau(1)}+l_1} \otimes \cdots \otimes \bar{Z}^{k_{\tau(q)}+l_q} \otimes \sigma\tau.$$

さらに次のような代数 \bar{A}_q を考える：

$$\bar{A}_q = \mathbb{C}[\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1, \dots] \otimes F_q.$$

F_q や \bar{A}_q の元は diagram で自然に表せる。たとえば $\bar{\varphi}_1 \otimes \bar{Z} \otimes \bar{Z}^2 \otimes (1\ 2) \in \bar{A}_2$ は



と表すことができる。すると写像 $\text{tr}' : \bar{A}_q \rightarrow \bar{A}_{q-1}$ が自然に考えられる。これは「 \bar{A}_q の元の q 本の矢尻と矢羽のうち最後のもの同士を融合させる」という写像である。たとえば

$$\text{tr}'(\bar{\varphi}_1 \otimes \bar{Z} \otimes \bar{Z}^2 \otimes (1\ 2)) = \bar{\varphi}_1 \otimes \bar{Z}^3 \otimes e$$

となるが、これは diagram で次のように計算することができる:

$$\begin{aligned}
 \text{tr}'(\bar{\varphi}_1 \otimes \bar{Z} \otimes \bar{Z}^2 \otimes (1\ 2)) &= \text{tr}'(\text{diagram 1}) \\
 &= \text{diagram 2} \text{ tr}'(\text{diagram 3}) \\
 &= \text{diagram 4} \\
 &= \text{diagram 5} \\
 &= \bar{\varphi}_1 \otimes \bar{Z}^3 \otimes e.
 \end{aligned}$$

ただし e は恒等置換とする.

これらの概念を利用して、不変式論の第二基本定理は次のように整理できる:

定理 5.3. tr' 付き代数として,

$$A_q^{GL(V)} \simeq \bar{A}_q / (\overline{\text{CH}}_n^q, \bar{\varphi}_0 - n).$$

ただしイデアルは tr' 付き代数として生成されるイデアルを考えている. また $\overline{\text{CH}}_n^q$ は高階の Cayley–Hamilton 定理の左辺である. つまり非負整数 q に対して $\overline{\text{CH}}_n^q$ を次のように定める:

$$\overline{\text{CH}}_n^q = \sum_{k+l_1+\dots+l_q=n+1-q} (-)^k \det_k(\bar{Z}) \otimes \bar{Z}^{l_1} \otimes \dots \otimes \bar{Z}^{l_q} \otimes \sum_{\sigma \in S_q} \text{sgn}(\sigma) \sigma.$$

以上の第一・第二基本定理は、ベクトル不変式に関する不変式論の第一・第二基本定理 ([GW], [P]) から導くことができる. 本稿では、その詳細は省略する.

6. 背景

実際には A_q だけでなく、ある系列の代数において不変式論の第二基本定理が高階の Cayley–Hamilton 定理で記述できる. このうちもっとも本質的なのがこの A_q の不変式論ということになる.

6.1. 次の不変環の第二基本定理はやはり高階の Cayley–Hamilton 定理を用いて表すことができる:

$$\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}.$$

ただし kU は U の k 個のコピーの直和である.

$m = m^* = 0$ のときは、簡単である. これは $A_0 = \mathcal{P}(V \otimes V^*)$ の $GL(V)$ -不変元だから 1 節で述べたように n 個の元から生成されて、この n 個の元は代数的に独立となる. しかし m, m^* が一般のときは、もうすこし複雑である.

z_{ij} をこれまでと同様に $V \otimes V^*$ の標準的な座標とする. さらに $x_i^{(a)}$ と $x_i^{*(a^*)}$ をそれぞれ a 番目の V と a^* 番目の V^* の座標とする. これらを用いて次の形式的な行列を作る:

$$Z = (z_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad x^{(a)} = {}^t(x_1^{(a)}, \dots, x_n^{(a)}), \quad x^{*(a^*)} = {}^t(x_1^{*(a^*)}, \dots, x_n^{*(a^*)}).$$

すると $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)$ の次の元は $GL(V)$ -不変である:

$$\omega_k = \det_k(Z), \quad \varphi_k = \text{tr}(Z^k), \quad \psi_i^{a^*a} = {}^t x^{*(a^*)} Z^l x^{(a)}.$$

$\omega_1, \dots, \omega_n$ と $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ はどちらも $\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ の生成系となる.

不変式論の第一基本定理は次のように表される:

定理 6.1. $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}$ は ω_k および $\psi_i^{a^*a}$ で生成される. ただし k, l, a, a^* は次の範囲を動く:

$$k = 1, \dots, n, \quad l = 0, \dots, n-1, \quad a^* = 1, \dots, m^*, \quad a = 1, \dots, m.$$

このうち $\omega_1, \dots, \omega_n$ は $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ に置き換えてもよい.

そして第二基本定理は高階の Cayley–Hamilton 定理 (定理 1.2) を用いて書くことができる. 定理 1.2 に左と右からそれぞれ

$${}^t x^{*(a_1^*)} Z^{\eta_1^*} \otimes \dots \otimes {}^t x^{*(a_q^*)} Z^{\eta_q^*}, \quad Z^{\eta_1} x^{(a_1)} \otimes \dots \otimes Z^{\eta_q} x^{(a_q)}$$

という元を掛けると次のような $\omega_k, \psi_i^{a_i^* a_j}$ たちの関係式を得る:

$$(6.1) \quad \sum_{k+l_1+\dots+l_q=n+1-q} (-)^k \omega_k \sum_{\sigma \in S_q} \text{sgn}(\sigma) \psi_{\eta_1^*+l_1+\eta_{\sigma(1)}}^{a_1^* a_{\sigma(1)}} \dots \psi_{\eta_q^*+l_q+\eta_{\sigma(q)}}^{a_q^* a_{\sigma(q)}} = 0.$$

本質的に $\omega_k, \psi_i^{a_i^* a_j}$ たちの関係式はこれらで尽きるのである.

このしくみをより直接的に再現したのが, 本稿で扱った A_q の不変式論ということになる.

この不変式環以外にも, 次の2つの不変式環はやはり定理 1.2 を用いて第二基本定理が記述できる:

$$\mathcal{P}(S_2(V) \oplus S_2(V^*) \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}, \quad \mathcal{P}(S_2(V) \oplus mV)^{O(V)}.$$

6.2. 定理 1.2 以外の Cayley–Hamilton 型定理を用いて, 第二基本定理が記述できる不変式環もある.

たとえば次の2つの不変式環は Pfaffian 版の Cayley–Hamilton 型定理の高階版 ([D], [I1] で与えられた Cayley–Hamilton 型定理の一般化) を用いて第二基本定理が記述できる:

$$\mathcal{P}(S_2(V) \oplus mV)^{Sp(V)}, \quad \mathcal{P}(\Lambda_2(V) \oplus mV)^{Sp(V)}.$$

これを A_q のような形でまとめようとする, 「トレース付きの加群」のようなものを考えることになる.

さらに次の3つの不変式環もやはり一種の Cayley–Hamilton 型定理を用いて第二基本定理が記述できる:

$$\mathcal{P}(\Lambda_2(V) \oplus \Lambda_2(V^*) \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)},$$

$$\mathcal{P}(S_2(V) \oplus \Lambda_2(V^*) \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}, \quad \mathcal{P}(\Lambda_2(V) \oplus mV)^{O(V)}.$$

6.1 節と 6.2 節であげた 8 系列の不変式環はいずれも diagram で表したときに、「(長さだけで決まる) cycle と (長さ と 端点のデータだけで決まる) path で不変式が生成される」という共通点を持つ. 最初に述べた $\mathcal{P}(V \otimes V^* \oplus mV \oplus m^*V^*)^{GL(V)}$ の生成元も, φ_k は長さ k の cycle として表され, $\psi_l^{a^*a}$ は両端に a^* , a というラベルのついた長さ l の path として表される.

6.3. 外積代数の枠組みでも似た議論ができる.

[I2] では, $V \otimes V^*$ 上の外積代数 $\Lambda(V \otimes V^*)$ や $\Lambda(V \otimes V^*) \otimes V \otimes V^*$ における $GL(V)$ -不変元を調べている. 言わば A_0, A_1 の反可換版である. A_0, A_1 の $GL(V)$ -不変元は $\text{tr}(Z^k)$ や Z で生成されたが, $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$, $(\Lambda(V \otimes V^*) \otimes V \otimes V^*)^{GL(V)}$ も同様である. そして生成元のあいだの関係式 (実際には, ある次数以上のものが不要になるという情報) はやはり Cayley–Hamilton 型の定理で与えられる (言わば反可換版の Cayley–Hamilton 定理).

[I2] では高階のものは扱ってないが, この反可換版の Cayley–Hamilton 型の定理の高階版を考えることも意味があるだろう.

REFERENCES

- [A] Y. Agaoka, *On Cayley–Hamilton’s theorem and Amitsur–Levitzki’s identity*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **63**, (1987), no. 3, 82–85.
- [C] P. Cvitanović, *Group theory: Birdtracks, Lie’s, and exceptional groups*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.
- [D] D. Ž. Đoković, *On the product of two alternating matrices*, Amer. Math. Monthly **98** (1991), no. 10, 935–936.
- [GW] R. Goodman and N. R. Wallach, *Symmetry, representations, and invariants*, Springer, 2009.
- [I1] M. Itoh, *A Cayley–Hamilton theorem for the skew Capelli elements*, J. Algebra **242** (2001), no. 2, 740–761.
- [I2] ———, *Invariant theory in exterior algebras and Amitsur–Levitzki type theorems*, preprint 2014, arXiv:1404.1980.
- [P] C. Procesi, *Lie groups. An approach through invariants and representations*, Universitext. Springer, New York, 2007.