

ニュートン非退化孤立特異点と局所コホモロジー類

田島慎一

SHINICHI TAJIMA

筑波大学数理物質系数学域

SCHOOL OF SCIENCE AND ENGINEERING, TSUKUBA UNIV.

梅田陽子

YOKO UMETA

理科大理工学部数学

FACULTY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, TOKYO UNIV. OF SCIENCE

1 Introduction

X を \mathbb{C}^n の原点 O の開近傍, f を X 上定義された正則関数とする. f が定める複素解析的超曲面 $S = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ は, 原点を孤立特異点として持つとする. 冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ における f のヤコビイデアル J_f やその剰余 $\mathcal{O}_{X,O}/J_f$ には, 超曲面 S の特異点に関する様々な情報が含まれており, 特異点の複素解析的諸性質を考える際に最も基本的な対象であると言える. さて, 冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ の局所凸位相ベクトル空間としての双対ベクトル空間は, 原点に台を持つ局所コホモロジー群として実現できることが知られている. この双対性に注目すると, 「局所コホモロジーを積極的に使うことで, ヤコビイデアル J_f を具体的に扱い, 特異点の複素解析的な諸性質を調べる」という発想は自然である. 剰余 $\mathcal{O}_{X,O}/J_f$ の双対ベクトル空間となる有限次元ベクトル空間を, 局所コホモロジー類のなす集合 (以下, H_{J_f} で表す) として求めるアルゴリズムを構成した. このベクトル空間 H_{J_f} を用いると, Grothendieck local duality により, 冪級数環におけるヤコビイデアル J_f に対するイデアルメンバーシップが容易に判定可能となる. また, Tjurina 数の計算, 対数的ベクトル場の構造の決定や具体的な構成等への応用がある.

さて, 特異点が擬斉次あるいは半擬斉次である場合は, 特異点の多くの性質がその weight vector と密接に関係することが知られている. 一般に, 局所コホモロジー群の部分ベクトル空間であるベクトル空間 H_{J_f} は J_f のみにより定められるものであり, 冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ にいれる項順序には依らない intrinsic な意味のあるベクトル空間である. しかし, 実際に特異点に関する様々な計算を行う際には, weight vector と整合するような基底ベクトルを用いることが望ましい. その為, ベクトル空間 H_{J_f} の基底を構成する際も, 予め局所コホモロジー群に weight vector と両立する項順序を入れ, その項順序を用いて H_{J_f} の基底となる局所コホモロジー類を求めることが重要となる. 論文 [7], [8] 等において, 半擬斉次孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーの計算法を与えた. これらの論文では, Poincaré 多項式の利用することで効率の良い計算法アルゴリズムを構成している.

本稿では, Newton 非退化な孤立特異点に付随する局所コホモロジーの計算法について考察する. Newton filtration と両立するような基底局所コホモロジーを求める計算法を確立することが目的である. ここでは, 2次元の場合に話を限って基底局所コホモロジーの計算の仕方について述べる. 研究の背景や動機について詳しいことは [13] を参照されたい.

この稿で与える計算法は、福井敏純氏と討議を重ねた結果により得たアイデアに基づいて導出したものである。福井敏純氏に感謝の意を表したい。

2 ニュートン非退化孤立特異点と代数的局所コホモロジー類

以下では \mathbb{C}^2 の座標を (x, y) で表し、特異点がニュートン非退化な場合を考える。

$H_{J_f} := \{\omega \in \mathcal{H}_{[0]}^2(\mathcal{O}_X) \mid \frac{\partial f}{\partial x}\omega = \frac{\partial f}{\partial y}\omega = 0\}$ の基底を構成する要素を基底代数的局所コホモロジー類 (以下では略して基底コホモロジー類) と呼ぶ。本稿の目的は、基底コホモロジー類を効率良く求める計算法を確立することである。最初に、Kouchnirenko[3] が導入したイデアル $I_f := \langle x \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \rangle$ を考え、 $H_{I_f} := \{\omega \in \mathcal{H}_{[0]}^2(\mathcal{O}_X) \mid x \frac{\partial f}{\partial x}\omega = y \frac{\partial f}{\partial y}\omega = 0\}$ の基底コホモロジー類を求める。次に xyH_{I_f} を計算すると、求めたかった H_{J_f} の基底コホモロジー類を得ることが出来る。以下では具体例を使って H_{I_f} の計算法を紹介する。

$f(x, y) := x^6 + x^2y^2 + y^9$ について考える。 H_{I_f} の基底コホモロジー類の個数は mixed volume により計算できる。

$$\text{mixed volume} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 30.$$

単項の形の局所コホモロジー類を求める。

$$I_f = \langle x \frac{\partial f}{\partial x}, y \frac{\partial f}{\partial y} \rangle = \langle 6x^5 + 2xy^2, 2x^2y + 9y^8 \rangle$$

に注意し、 $x^6\psi = 0$, $x^2y^2\psi = 0$, $y^9\psi = 0$ を満たす $\psi = \begin{bmatrix} 1 \\ x^{i+1}y^{j+1} \end{bmatrix}$ を求める。 $x^p y^q$ と代数的局所コホモロジー類の積は次で与えられる。

$$x^p y^q \begin{bmatrix} 1 \\ x^i y^j \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ x^{i-p} y^{j-q} \end{bmatrix} & (i > p, j > q) \\ 0 & (i \leq p \text{ or } j \leq q) \end{cases}$$

次の記号を用いることにする。

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x^{i+1} y^{j+1} \end{bmatrix} = \xi^i \eta^j.$$

上記の記号を用いると、例えば次が成立する。

$$x^6(\xi^6) = x^6 \begin{bmatrix} 1 \\ x^7 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ xy \end{bmatrix} = \xi^0 \eta^0 \neq 0, \quad x^2 y^2(\xi^2) = x^2 y^2 \begin{bmatrix} 1 \\ x^3 y \end{bmatrix} = 0.$$

図 1 において、 $D_{B(0,9)}$, $D_{A(2,2)}$, $D_{B(6,0)}$ はそれぞれ $(0, 9)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ を頂点とする領域を表す。また $D_{B(0,9)}$, $D_{A(2,2)}$, $D_{B(6,0)}$ はそれぞれ $y^9(\xi^i \eta^j) \neq 0$, $x^2 y^2(\xi^i \eta^j) \neq 0$, $x^6(\xi^i \eta^j) \neq 0$ なる領域である。

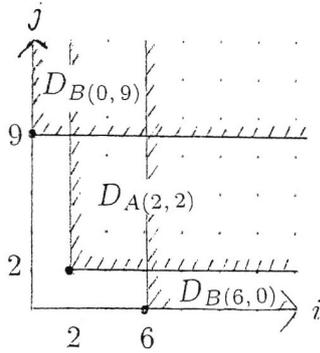


図 1

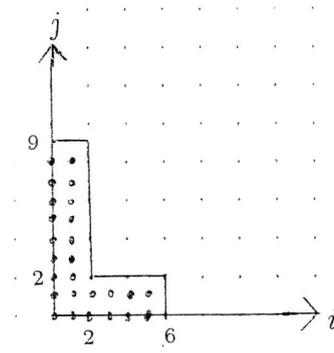


図 2

図 1 において, $D_{B(0,9)} \cup D_{A(2,2)} \cup D_{B(6,0)}$ の補集合を考えると, $x^6(\xi^i \eta^j) = 0$, $x^2 y^2(\xi^i \eta^j) = 0$, $y^9(\xi^i \eta^j) = 0$ を満たす (i, j) を特定することが出来る (図 2). 従って 26 次元分の単項の形の基底コホモロジー類を得る;

$$\eta^i \ (0 \leq i \leq 8), \quad \xi^i \ (1 \leq i \leq 5), \quad \xi \eta^j \ (1 \leq j \leq 8), \quad \xi^j \eta \ (1 \leq j \leq 5). \quad (1)$$

次に線形結合の形の基底コホモロジー類を 4 次元分求める. 各領域の頂点にあたる格子点を exponent としてもつ代数的局所コホモロジー類 $\eta^9, \xi^2 \eta^2, \xi^6$ は次のように特徴的である;

$$\begin{cases} x^6(\eta^9) = 0 \\ x^2 y^2(\eta^9) = 0 \\ y^9(\eta^9) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^6(\xi^2 \eta^2) = 0 \\ x^2 y^2(\xi^2 \eta^2) = 1 \\ y^9(\xi^2 \eta^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^6(\xi^6) = 1 \\ x^2 y^2(\xi^6) = 0 \\ y^9(\xi^6) = 0. \end{cases}$$

このことに注意し, $\psi = c_{0,9}\eta^9 + c_{2,2}\xi^2\eta^2 + c_{6,0}\xi^6$ とおき, 条件 $x \frac{\partial f}{\partial x} \psi = 0, y \frac{\partial f}{\partial y} \psi = 0$ すなわち $6c_{0,9} + 2c_{2,2} = 0, 2c_{2,2} + 9c_{6,0} = 0$ より $\psi = -\frac{2}{9}\eta^9 + \xi^2\eta^2 - \frac{1}{3}\xi^6$ を得る. 残り 3 つの基底コホモロジー類は ψ を利用して構成する. 具体的なアイデアは次の通りである. 領域 $D_{B(0,9)}, D_{A(2,2)}, D_{B(6,0)}$ と格子点に着目し,

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x} (c_{0,9}\eta^9 + c_{2,2}\xi^2\eta^2 + c_{6,0}\xi^6) \xi^\alpha \eta^\beta &= (6c_{0,9} + 2c_{2,2}) \xi^\alpha \eta^\beta \\ y \frac{\partial f}{\partial y} (c_{0,9}\eta^9 + c_{2,2}\xi^2\eta^2 + c_{6,0}\xi^6) \xi^\alpha \eta^\beta &= (2c_{2,2} + 9c_{6,0}) \xi^\alpha \eta^\beta \end{aligned}$$

の関係式が成立する α, β の範囲を考えると $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$ である. 従って線形結合の形の基底コホモロジー類は,

$$\psi, \quad \xi\psi, \quad \eta\psi, \quad \xi\eta\psi. \quad (2)$$

上の過程において線型計算は 1 回のみであることに注意する.

求めた H_I の基底コホモロジー類 (1), (2) を xy 倍すると, H_J の基底コホモロジー類を得る. 単項の形のもの 13 個;

$$\eta^i \ (0 \leq i \leq 7), \quad \xi^i \ (1 \leq i \leq 4), \quad \xi\eta, \quad (3)$$

線形結合の形のもの 3 個;

$$-\frac{2}{9}\eta^8 + \xi^2\eta, \quad \xi\eta^2 - \frac{1}{3}\xi^5, \quad -\frac{2}{9}\eta^9 + \xi^2\eta^2 - \frac{1}{3}\xi^6 \quad (4)$$

得る.

また、求めた基底コホモロジー類から位相的不変量であるミルナー数と解析的不変量であるチュリナー数の差 $\mu - \tau$ が計算できる (詳細は [13] で述べられている). μ と τ は次で定義される.

$$\mu := \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{O}_{X,0} / \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right), \quad \tau := \dim_{\mathbb{C}} \left(\mathcal{O}_{X,0} / \left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \right).$$

H_{J_f} を直接計算して基底コホモロジー類を得た場合, τ を求めるために (4) を f 倍したものを一つずつ計算する必要がある. 一方, [13] によると, $\mu - \tau = \dim_{\mathbb{C}} (xyf(H_{I_f}))$ である. $f(H_{I_f})$ については, $f\psi = \frac{4}{9}$ を計算すれば, $f(H_{I_f})$ を構成する要素で零でないものは

$$\frac{4}{9}, \quad \frac{4}{9}\xi, \quad \frac{4}{9}\eta, \quad \frac{4}{9}\xi\eta$$

であることがわかる. 従って, $\mu - \tau = 1$ が直ちにわかり, $\mu = 16$ より $\tau = 15$ も得る. このように, H_{J_f} を計算するより, H_{I_f} を計算した方が数学的構造が簡明で, 見通し良く計算できる.

さて, 上で述べた (2) を得る過程は, 以下に述べる操作を行っていると見做せる. 領域 $D_{B(0,9)}, D_{A(2,2)}, D_{B(6,0)}$ の各々の頂点にあたる格子点 $(0, 9), (2, 2), (6, 0)$ を基準点と呼ぶことにする. 以下, weighted degree を d_N と略記する. 各基準点が同じ d_N となるように weight vector を定める; $\omega_I = (14, 4), \omega_{II} = (6, 12)$.

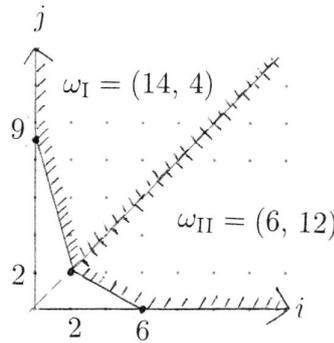


図 3

(2) で得られた 4 つの基底コホモロジー類の各項の d_N を計算する. 各項の中で d_N が一番高い項 $\xi^i \eta^j$ に対

ψ	$(0, 9), (2, 2), (6, 0)$
$\xi\psi$	$(1, 9)$
$\eta\psi$	$(6, 1)$
$\xi\eta\psi$	$(1, 10), (3, 3), (7, 1)$

応する (i, j) を記したものが右表である.

以下, 代数的局所コホモロジー $\xi^i \eta^j$ と格子点 (i, j) を同一視して考える. 基底コホモロジー類の各項の中で一番 d_N が高い項を主項と呼ぶことにする. さて, 格子点 $(0, 0)$ と $(2, 2)$, $(0, 0)$ と $(0, 9)$ を各々結ぶ辺を持つ平行四辺形を描く. また格子点 $(0, 0)$ と $(2, 2)$, $(0, 0)$ と $(6, 0)$ を各々結ぶ辺を持つ平行四辺形を描く. 最後に, 格子点 $(0, 0)$ と $(2, 2)$ を結ぶ直線とその長さだけ伸ばす (図 4).

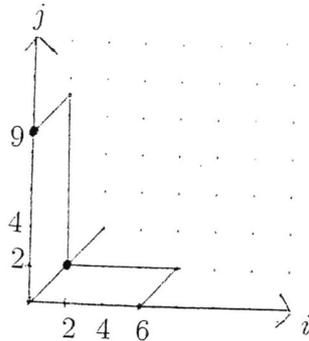


図4

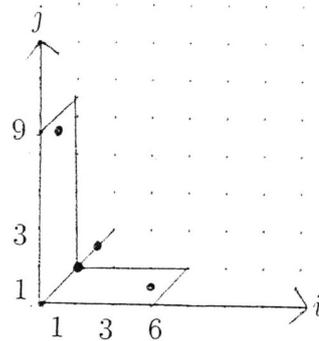


図5

境界点でなく平行四辺形の内部にある格子点に着目する。線分 $(0, 0)$ と $(4, 4)$ を結ぶ線分については、 $(2, 2)$ と $(4, 4)$ を結ぶ直線上にある格子点を内点と呼ぶことにする。但し、 $(2, 2)$ は内点とみなし、 $(4, 4)$ は内点と見做さないことを決まりとする。単項の形の基底コホモロジー類に対応する格子点を除外すると、この場合内点は4つあることが確認できる(図5)。これから、これら4つの内点をそれぞれ主項とする基底コホモロジー類を構成する方法について説明する。

図5より、内点は $(2, 2)$, $(1, 9)$, $(6, 1)$, $(3, 3)$ である。一番近い基準点(内点が属する領域の頂点)からの変位はそれぞれ、 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ である。

(i) 初めに、変位 $(0, 0)$ の主項 $(2, 2)$ をもつ基底コホモロジー類から計算する。 d_N を考えると他項の候補は $(0, 9)$ と $(6, 0)$ のみである。従って先と同様に、この基底コホモロジー類は $\psi = c_{0,9}\eta^9 + \xi^2\eta^2 + c_{6,0}\xi^6$ と置き、 $x\frac{\partial f}{\partial x}\psi = 0$, $y\frac{\partial f}{\partial y}\psi = 0$ より係数が確定する; $\psi_{(2,2)} = -\frac{2}{9}\eta^9 + \xi^2\eta^2 - \frac{1}{3}\xi^6$ 。

(ii) 残りの基底コホモロジー類は常に変位 $(0, 0)$ の主項を持つ基底コホモロジー類を利用して構成する。例えば、変位 $(0, 1)$ の主項 $(6, 1)$ をもつ基底コホモロジー類は以下のように得られる;

まづ、主項 $(6, 1) \in D_{B(6,0)}$ の基準点 $(6, 0)$ からの変位 $(0, 1)$ に注目する。基準点から $(0, 1)$ 変動した各点の d_N の変動を計算する。この場合、基準点 $(0, 9)$, $(2, 2)$, $(6, 0)$ からの d_N の増分は $\Delta_N(0, 1) = [4, 4, 12]$ である。従って $(0, 10)$, $(2, 3)$ は低階項である。また $(0, 10)$, $(2, 3)$ は各々の基準点と同じ領域 $D_{B(0,9)}$, $D_{A(2,2)}$ にのみそれぞれ属す。ゆえに $\eta\psi_{(2,2)}$ は求めたい基底コホモロジー類である。同様に他の基底コホモロジー類を求めることが出来、 (2) を得る。

今迄の考察から、線形結合の形の基底コホモロジー類を求める手順を以下のように纏めることができる。

線形結合の形の基底コホモロジー類を求めるアルゴリズム

- (I) 平行四辺形の内部から線形結合の形の基底コホモロジー類の主項を見つける。
- (II) 主項の基準点からの変位に注目する。
- (III) 変位 $(0, 0)$ の基底コホモロジー類を計算(線形計算で済む)。
- (IV) (III) 以外の基底コホモロジー類は、(III) で構成した基底コホモロジー類を用いて、 d_N と属す領域の変動を見ることによりアルゴリズム的に計算可能。

次の章では、具体例を用いて上で述べたアルゴリズムによる計算法を説明する。

2.1 例 1. $f(x, y) := y^{12} + x^2y^3 + x^3y + ax^4$ ($a \neq 0$ はパラメータ)

最初に, Newton 図形を描く (図 6). 基準点は $(0, 12), (2, 3), (3, 1), (4, 0)$ で, facet が 3 つある. 各基準点と同じ d_N となるように weighted vector を定義する; $\omega_I = (63, 14), \omega_{II} = (48, 24), \omega_{III} = (42, 42)$.

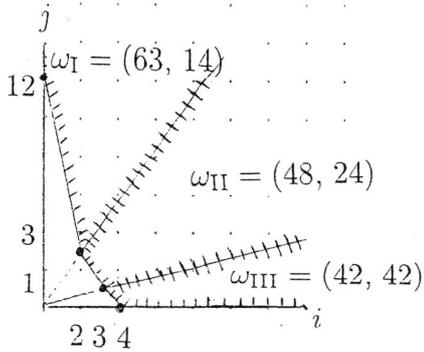


図 6

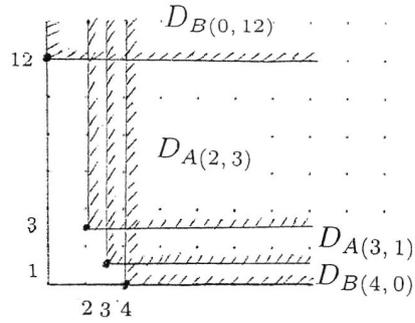


図 7

H_{I_f} の基底コホモロジー類の個数は mixed volume $= \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ より 35 個ある. また, 単項の形の基底コホモロジー類は図 7 より 28 次元分あることがわかるので, 線形結合の形の基底コホモロジー類は 7 次元分ある. これから, 7 次元分の基底コホモロジー類をアルゴリズム的に求める方法を説明する.

(I) 基底コホモロジー類の主項を平行四辺形の内部から見つける.

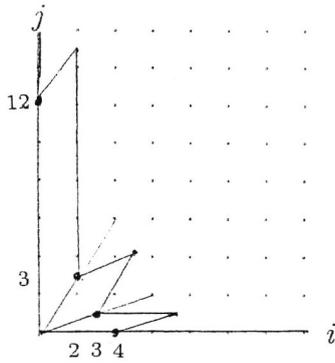


図 8

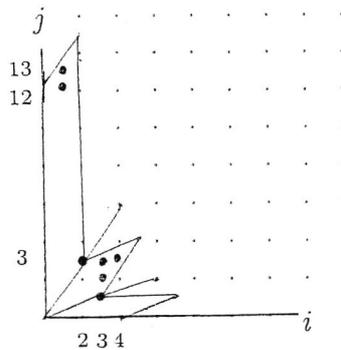


図 9

(II) 主項の基準点からの変位は以下の通りである.

主項	主項が属する領域	基準点からの変位	δ_N
(2, 3)	$D_{A(2,3)}$	(0, 0)	0
(3, 1)	$D_{A(3,1)}$	(0, 0)	0
(3, 2)	$D_{A(3,1)}$	(0, 1)	24
(3, 3)	$D_{A(2,3)} \cap D_{A(3,1)}$	(1, 0), (0, 2)	48
(1, 12)	$D_{B(0,12)}$	(1, 0)	63
(1, 13)	$D_{B(0,12)}$	(1, 1)	77
(4, 3)	$D_{A(2,3)} \cap D_{A(3,1)} \cap D_{B(4,0)}$	(2, 0), (1, 2), (0, 3)	96

ここで, $D_{B(0,12)}$, $D_{A(2,3)}$, $D_{A(3,1)}$, $D_{B(4,0)}$ は基準点 (0, 12), (2, 3), (3, 1), (4, 0) をそれぞれ頂点とする領域を表す. また, δ_N は主項が属する領域の頂点 (基準点) からの d_N の増分を意味する.

(III) 基準点からの変位が (0, 0) の主項 (2, 3), (3, 1) をもつ基底コホモロジー類 $\psi_{(2,3)}$, $\psi_{(3,1)}$ を求める.

- $\psi_{(2,3)}$ の低階項の候補は (0, 12), (4, 0) なので, $\psi_{(2,3)} = c_{0,12}\eta^{12} + \xi^2\eta^3 + c_{4,0}\xi^4$ と置き, $y \frac{\partial f}{\partial y} \psi_{(2,3)} = x \frac{\partial f}{\partial x} \psi_{(2,3)} = 0$ から係数を決定する. $\psi_{(3,1)}$ について計算すると以下を得る.

$$\psi_{(2,3)} = -\frac{1}{4}\eta^{12} + \xi^2\eta^3 - \frac{1}{2a}\xi^4, \quad \psi_{(3,1)} = -\frac{1}{12}\eta^{12} + \xi^3\eta - \frac{3}{4a}\xi^4.$$

(IV) 基準点からの変位が (0, 1) と (1, 0) の主項 (3, 2), (1, 12) をもつ基底コホモロジー類 $\psi_{(3,2)}$, $\psi_{(1,12)}$ を求める. 以下, $\phi_{(i,j)}$ で $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{\psi_{(2,3)}, \psi_{(3,1)}\}$ に属するものであり, 項 (i, j) を含まないものを表すとす. 具体的には,

$$\phi_{(0,12)} = \psi_{(2,3)} - 3\psi_{(3,1)},$$

$$\phi_{(2,3)} = \psi_{(3,1)},$$

$$\phi_{(3,1)} = \psi_{(2,3)},$$

$$\phi_{(4,0)} = \psi_{(2,3)} - \frac{2}{3}\psi_{(3,1)}.$$

- 変位 (0, 1) の主項 (3, 2) をもつ基底コホモロジー類 $\psi_{(3,2)}$ を求める.

基準点 (0, 12), (2, 3), (3, 1), (4, 0) から (0, 1) 変動した各点の基準点からの d_N の増分は $\Delta_N(0, 1) = [14, 14, 24, 42]$ である. 従って (0, 13), (2, 4) は低階項である. (4, 1) の $d_N = 42$ は主項 (3, 2) の $d_N = 24$ より高いので, (4, 1) は $\psi_{(3,2)}$ の低階項となりえない. $\psi_{(2,3)}$ と $\psi_{(3,1)}$ から ξ^4 を消去すると $\phi_{(4,0)}$ を得る.

$$\phi_{(4,0)} = \psi_{(2,3)} - \frac{2}{3}\psi_{(3,1)} = -\frac{7}{36}\eta^{12} + \xi^2\eta^3 - \frac{2}{3}\xi^3\eta.$$

また (0, 13), (2, 4) は各々の基準点と同じ領域 $D_{B(0,12)}$, $D_{A(2,3)}$ にのみそれぞれ属す. 従って $\eta\phi_{(4,0)}$ は求めたい基底コホモロジーである;

$$\psi_{(3,2)} = \eta\phi_{(4,0)} = \eta \left(\psi_{(2,3)} - \frac{2}{3}\psi_{(3,1)} \right) = -\frac{7}{36}\eta^{13} + \xi^2\eta^4 - \frac{2}{3}\xi^3\eta^2.$$

- 変位 (1, 0) の主項 (1, 12) をもつ基底コホモロジー類 $\psi_{(1,12)}$ を求める.

基準点 (0, 12), (2, 3), (3, 1), (4, 0) から (1, 0) 変動した各点の基準点からの d_N の増分は $\Delta_N(1, 0) =$

[63, 48, 42, 42]である。(3, 3)は他の主項なので低階項となりえないが, (4, 1), (5, 0)は低階項となりうる。従って(2, 3)を含まない $\psi_{(3,1)}$ を用いて

$$\xi\psi_{(3,1)} = -\frac{1}{12}\xi\eta^{12} + \xi^4\eta - \frac{3}{4a}\xi^5 \quad (5)$$

を考える。ここで, (1, 12), (5, 0)は各々の基準点と同じ領域 $D_{B(0,12)}$, $D_{B(4,0)}$ にのみそれぞれ属すが, (4, 1)については, もともと $D_{A(3,1)}$ に属していた点を(1, 0)変動することによって領域 $D_{B(4,0)}$ にも属してしまうという状況が起きた。このため, $\xi\psi_{(3,1)}$ はまだ基底解でない。そこで, (4, 1) = (4, 0) + (0, 1)に注意して基準点から(0, 1)変動した各々の基準点からの d_N の増分を計算すると, $\Delta_N(0, 1) = [14, 14, 24, 42]$ である。(3, 1)を含まない $\psi_{(2,3)}$ を用いて

$$\eta\psi_{(2,3)} = -\frac{1}{4}\eta^{13} + \xi^2\eta^4 - \frac{1}{2a}\xi^4\eta \quad (6)$$

を考える。(0, 13), (2, 4)は各々の基準点と同じ領域 $D_{B(0,12)}$, $D_{A(2,3)}$ にのみそれぞれ属す。そこで(5)と(6)の $\xi^4\eta$ の係数を比較し, (5)に(6)から $\xi^4\eta$ を除いた項を追加すると $\psi_{(1,12)}$ を得る;

$$\psi_{(1,12)} = \xi\psi_{(3,1)} - 2a\eta(\sigma_{(4,0)}(\psi_{(2,3)})) = \frac{1}{2}a\eta^{14} - \frac{1}{12}\xi\eta^{12} - 2a\xi^2\eta^5 + \xi^4\eta - \frac{3}{4a}\xi^5.$$

ここで $\sigma_{(4,0)}(\psi_{(2,3)})$ は $\psi_{(2,3)}$ から $c\xi^4$ (c は定数)の形の項を除いたものを表す。

残りの $\psi_{(1,13)}$, $\psi_{(3,3)}$, $\psi_{(4,3)}$ についても同様の議論を繰り返し, 得ることができる;

$$\begin{aligned} \psi_{(1,13)} &= \xi\eta\phi_{(4,0)} - \frac{3}{2}\eta^3(\sigma_{(3,1)}(\phi_{(4,0)})) + \frac{4}{3}a\eta^2(\sigma_{(4,0)}(\psi_{(2,3)})), \\ \psi_{(3,3)} &= \eta^2\phi_{(4,0)} - \frac{2}{3}\xi(\sigma_{(2,3)}(\phi_{(0,12)})) - 4a\eta(\sigma_{(4,0)}(\psi_{(2,3)})), \\ \psi_{(4,3)} &= \xi\eta^2\phi_{(4,0)} - \frac{3}{2}\eta^4(\sigma_{(3,1)}(\phi_{(4,0)})) + \frac{4}{3}a\eta^3(\sigma_{(4,0)}(\psi_{(2,3)})) \\ &\quad - \frac{2}{3}\xi^2(\sigma_{(2,3)}(\phi_{(0,12)})) + \frac{8}{7}a\xi\eta(\sigma_{(4,0)}(\phi_{(0,12)})) \\ &\quad - \frac{12}{7}a\eta^{13}(\sigma_{(3,1)}(\phi_{(4,0)})) + \frac{48}{7}a^2\eta^2(\sigma_{(4,0)}(\psi_{(2,3)})). \end{aligned} \quad (7)$$

ここで, $\sigma_{(i,j)}(\psi)$ は ψ から $c\xi^i\eta^j$ (c は定数)の形の項を除いた残りの項を意味する。以上により H_{I_f} の基底コホモロジー類を得た。ここで求めた H_{I_f} の基底コホモロジー類をすべて xy 倍することで H_{J_f} の基底を構成できる。

2.2 例2. $g(x, y) = y^{13} + y^{12} + x^2y^3 + x^3y + ax^4$ ($a \neq 0$ はパラメータ)

例1の f を用いると, $g(x, y) = f(x, y) + y^{13}$ の形で, f にupper monomialが追加された例である。初めに前例の通り $f(x, y)$ に対する H_{I_f} の基底コホモロジー類を構成する。構成した基底コホモロジー類 ψ に対して $y\frac{\partial(g-f)}{\partial y}\psi = x\frac{\partial(g-f)}{\partial x}\psi = 0$ を満たしているかどうか確認する。満たしている時, ψ は H_{I_g} の基底コホモロジー類である。満たしていない場合について説明する。例えば例1で構成した基底コホモロジー類 $\psi_{(3,2)}$ について考えると, $x\frac{\partial g}{\partial x}\psi_{(3,2)} = 0$ であるが, $y\frac{\partial g}{\partial y}\psi_{(3,2)} \neq 0$ である。

$$\psi_{(3,2)} = -\frac{7}{36}\eta^{13} + \xi^2\eta^4 - \frac{2}{3}\xi^3\eta^2$$

の主項 (3, 2) の d_N は 24 なので, d_N が 24 以下で $\psi_{(3,2)}$ に含まれない項で低階項となりうる候補を探すと (0, 12) と (4, 0) であることがわかる. よって

$$\varphi_{(3,2)} = \psi_{(3,2)} + c_{0,12}\eta^{12} + c_{4,0}\xi^4$$

と置き, $x\frac{\partial f}{\partial x}\varphi_{(3,2)} = y\frac{\partial f}{\partial y}\varphi_{(3,2)} = 0$ に代入し係数 $c_{0,12}$ と $c_{4,0}$ を求める;

$$\varphi_{(3,2)} = \psi_{(3,2)} + \frac{91}{432}\eta^{12}.$$

この方法で, H_{I_g} の基底コホモロジー類をすべて求めることができる.

3 Commode でない場合

3.1 例 3. $g(x, y) := x^3y + x^2y^3 + (a_0 + a_1y)y^{12}$ (a_0, a_1 はパラメータ, $a_0 \neq 0$)

この例は, [1] で与えられた $Z_{1,p}$ の $p = 5$ の場合である. 初めに $f_{NP}(x, y) := a_0y^{12} + x^2y^3 + x^3y$ と置き, f_{NP} に対する $H_{I_{f_{NP}}}$ の基底コホモロジー類を求める. 例 1, 例 2 と本例の違いは, f_{NP} が commode でない点である. この章では, f_{NP} のように commode でない場合に対する計算方法を考察する. 方程式を commode にするために f_{NP} に bx^m を付け加えた $f(x, y) := f_{NP}(x, y) + bx^m$ を考える. m は十分大きい数にとる. (m をどれくらいの値にとることが効率のよい計算であるかについては現在研究中であるが) 以下では $m = 6$ の場合について述べる. 例 1 の方法で H_{I_f} の基底コホモロジー類を求めることができる.

- 単項の形の H_{I_f} の基底コホモロジー類;

$$\eta^i \ (0 \leq i \leq 11), \quad \xi^i \ (1 \leq i \leq 5), \quad \xi\eta^j \ (1 \leq j \leq 11), \quad \xi^2\eta^j \ (1 \leq j \leq 2). \quad (8)$$

- 線形結合の形の H_{I_f} の基底コホモロジー類;

$$\begin{aligned} \psi_{(2,3)} &= -\frac{1}{4a_0}\eta^{12} + \xi^2\eta^3 - \frac{1}{3b}\xi^6, \\ \psi_{(3,1)} &= -\frac{1}{12a_0}\eta^{12} + \xi^3\eta - \frac{1}{2b}\xi^6, \\ \psi_{(3,2)} &= -\frac{7}{36a_0}\eta^{13} + \xi^2\eta^4 - \frac{2}{3}\xi^3\eta^2, \\ \psi_{(1,12)} &= -\frac{1}{12a_0}\xi\eta^{12} + \xi^4\eta - \frac{1}{2b}\xi^7, \\ \psi_{(1,13)} &= \frac{7}{24a_0}\eta^{15} - \frac{7}{36a_0}\xi\eta^{13} - \frac{3}{2}\xi^2\eta^6 + \xi^3\eta^4 - \frac{2}{3}\xi^4\eta^2, \\ \psi_{(3,3)} &= \frac{7}{36a_0}\eta^{14} + \xi^2\eta^5 - \frac{2}{3}\xi^3\eta^3 + 2\xi^4\eta - \frac{7}{9b}\xi^7, \\ \psi_{(4,3)} &= -\frac{7}{16a_0}\eta^{16} + \frac{7}{24a_0}\xi\eta^{14} + \frac{9}{4}\xi^2\eta^7 - \frac{3}{2}\xi^3\eta^5 + \xi^4\eta^3 - 3\xi^5\eta + \frac{7}{6b}\xi^8. \end{aligned} \quad (9)$$

上記の基底コホモロジー類で b を含む項は bx^m に依存して現れる項であるが, いずれも xy 倍すると消えることに注意する.

次に $h(x, y) := f(x, y) + a_1y^{13}$ と置き ($h(x, y)$, $b = 0$ の時が g の定義である), 例 2 の方法で H_{I_h} の基底コホモロジー類を求める.

- 単項の形の H_{I_h} の基底コホモロジー類; (8) と同じ形である.
- 線形結合の形の H_{I_h} の基底コホモロジー類;

$$\begin{aligned}
\varphi_{(2,3)} &= \psi_{(2,3)}, \\
\varphi_{(3,1)} &= \psi_{(3,1)}, \\
\varphi_{(3,2)} &= \psi_{(3,2)} + \frac{7}{36}c\eta^{12}, \\
\varphi_{(1,12)} &= \psi_{(1,12)}, \\
\varphi_{(1,13)} &= \psi_{(1,13)} - \frac{7}{24a_0}c\eta^{14} + \frac{7}{24a_0}c^2\eta^{13} - \frac{7}{24a_0}c^3\eta^{12} + \frac{7}{3}c\xi^4\eta - \frac{7}{6}bc\xi^7, \\
\varphi_{(3,3)} &= \psi_{(3,3)} + \frac{7}{36}c\eta^{13} - \frac{7}{36}c^2\eta^{12}, \\
\varphi_{(4,3)} &= \psi_{(4,3)} + \frac{9}{4}c\xi^2\eta^6 - \frac{3}{2}c\xi^3\eta^4 + c\xi^4\eta^2.
\end{aligned} \tag{10}$$

但し, $c := \frac{13a_1}{12a_0}$ である.

上記においても xy 倍すると b を含む項は消えることに注意する. 求めた H_{I_h} の基底コホモロジー類をすべて xy 倍すると求めたい H_{I_p} の基底 20 次元分を得ることができる. ミルナー数とチュリナー数の不変量の差 $\mu - \tau = 2$ も計算できる. このように, commode でない方程式に対しては, commode に変形してアルゴリズムに計算できる.

特異点がニュートン非退化な場合に特異点におけるヤコビイデアルが定める代数的局所コホモロジーを, 本論文で述べた例 1 から例 3 を組み合わせて計算可能であるように思われる. Arnold の分類表 [1] で与えられたニュートン非退化孤立特異点の代表的例 $J_{3,p}(p > 0)$, $Z_{1,p}(p > 0)$, $W_{1,p}(p > 0)$ に対しては本論文の方法で計算可能であることは確認済みである.

参 考 文 献

- [1] V. I. Arnold, Normal forms of functions in neighborhoods of degenerate critical points, *Russian Math. Survey* **29** (1974), 10–50.
- [2] J. Damon and T. Gaffney, Topological triviality of deformations of functions and Newton filtrations, *Invent. Math.* **72** (1983), 335–358.
- [3] A. G. Kouchnirenko, Polyèdre de Newton et nombres de Milnor, *Invent. Math.* **32** (1976), 1–31.
- [4] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーの計算法とそれを用いたスタンダード基底・グレブナー基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1764** 「実閉体上の幾何と特異点論への応用」 (2011), 102–125.
- [5] 鍋島克輔, 田島慎一, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について — 半擬斉次孤立特異点の場合 —, 京都大学数理解析研究所講究録 **1785** 「Computer Algebra — The Algorithms, Implementations and the Next Generation —」 (2012), 111–122.
- [6] K. Nabeshima, On an implementation of standard bases, Gröbner bases and normal-form using algebraic local cohomology, *Communications of JSSAC*, **1** (2012), 1–25.

- [7] K. Nabeshima and S. Tajima, On efficient algorithms for computing parametric local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities and standard bases, *ISSAC 2014, ACM*, 351–358.
- [8] K. Nabeshima and S. Tajima, On the computation of algebraic local cohomology classes associated with semi quasihomogeneous singularities, to appear in *Adv. Studies in Pure Math.*
- [9] M. Oka, On the bifurcation of the multiplicity and topology of the Newton boundary, *J. Math. Soc. Japan* **31** (1979), 435–450.
- [10] J. H. M. Steenbrink, Mixed Hodge structures associated with isolated singularities, in *Real and Complex Singularities, Oslo 1976*, (1976), 525–563.
- [11] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について 京都大学数理解析研究所講究録 **1456** 「Computer Algebra—Design of Algorithms, Implementations and Applications」(2005), 126–132.
- [12] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II, 京都大学数理解析研究所講究録 **1568** 「Computer Algebra」(2007), 74–80.
- [13] 田島慎一, Algebraic local cohomology classes and Kouchnirenko's formulae, 京都大学数理解析研究所講究録 **1861** 「超局所解析と漸近解析の最近の進展」(2013), 183–193.
- [14] E. Yoshinaga, Topologically principal part of analytic functions, *Trans. AMS.* **314** (1989), 803–814.