数理解析研究所講究録
第1927巻 2014年 77-88

Formula Simplification for Real Quantifier Elimination

岩根秀直
国立情報学研究所/(株)富士通研究所*
HIDENAO IWANE
NATIONAL INSTITUTE OF INFORMATICS/FUJITSU LABORATORIES LTD

1 はじめに

限量記号消去法（Quantifier Elimination: QE）[4, 19] は限量記号がついた一階述語論理式を入力として，それと等価で限量記号のない論理式を出力するアルゴリズムである．例えば，$\exists x(x^2+bx+c=0)$ に対して QE を適用すると，それと等価で限量記号がついた変数 x のない論理式 $b^2-4c\geq 0$ を得る．一階述語論理式は，限量記号である $\forall$ （全称記号），$\exists$ （存在記号），多項式の等式・不等式からなる原子論理式，$\wedge$ （かつ）・$\vee$ （または）・$\neg$ （否定）などの論理演算子から成る．

QE はさまざまな応用があり，アルゴリズムの効率化に関する多くの研究が行われている．しかし，任意の入力に適用可能な汎用 QE アルゴリズムは，現在知られている最も効率のいい手法である Cylindrical Algebraic Decomposition [5] でも，その計算量の下限は変数の数に対して 2 重指数 [2] で，多くとも 5 変数程度までの問題しか解けない．そのため，実際に問題を解く場合には，線形の場合など入力を特別な場合に制限した専用 QE [16, 17, 8, 10] が適用しやすいように工夫する，冗長な条件を取り除くなどの入力の簡単化，適用する QE アルゴリズムの選択，消去する変数順序の選択，各工程で得られた論理式の簡単化などの試行錯誤が必要となる．特に，入力の簡単化は計算時間に大きく影響するため非常に重要である．しかし，Tarski formula （限量記号のない論理式）の簡単化に対する研究 [6, 3, 1, 10] はあるが，限量記号がついた一階述語論理式に対する簡単化についてはあまり研究されていない．本稿では，限量された一階述語論理式を等価で扱いやすい問題に帰着させる手法について述べる．

著者は，国立情報学研究所が発足した人工知能プロジェクト「ロボットは東大に入れるか」[15] に参加し，数学入試問題のテキストを入力として，自然言語処理により機械的に構築された一階述語論理式に対して，QE により解答を求めるソルバーの開発に取り組んでいる [21, 13, 11]．数学入試問題に対応する一階述語論理式を人が構築し，試行錯誤すれば QE により多くの場合解けることはこれまでの研究で確認されている．しかし，機械的に構築された一階述語論理式は非常に冗長で，現在公開されている QE ツールを単に適用するだけでは解けないことが多い．本稿で紹介する手法はこのような機械的に生成された冗長な論理式に対して，特に有効であると考えている．

本稿の構成は以下の通りである．まず，第 2 節において，一階述語論理式の簡単化について具体例を用いて紹介する．第 3 節で，次数の小さい一階述語論理式に帰着する方法について，偶数次のみ現れる場合とその拡張について述べる．第 4 節と第 5 節で，一変数少ない一階述語論理式に帰着する方法について，拡大縮小と平行移動に対応する方法について述べる．最後に第 6 節で本稿のまとめと今後の課題を述べる．

*iwane@jp.fujitsu.com

2 QE のための一階述語論理式の簡単化

本節では，QE の計算量削減のための入力の特徴を利用した一階述語論理式の簡単化について具体的な例を用いて紹介する．

問題 1

(北海道大学 2011 年前期理系 [3] (2)) t が実数全体を動くとき，xyz 空間内の点 $(t+2, t+2, t)$ が作る直線を ℓ とするとき，3 点 $O(0,0,0)$, $A'(2,1,0)$, $B'(1,2,0)$ を通り，中心を $C(a,b,c)$ とする球面 S が直線 ℓ と共有点をもつとき，a, b, c の満たす条件を求めよ．

球面 S を $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ とすると，この問題は以下の一階述語論理式に帰着できる．

$$\exists r \exists t \quad ((0-a)^2+(0-b)^2+(0-c)^2=r^2 \quad \wedge \tag{1a}$$
$$(2-a)^2+(1-b)^2+(0-c)^2=r^2 \quad \wedge \tag{1b}$$
$$(1-a)^2+(2-b)^2+(0-c)^2=r^2 \quad \wedge \tag{1c}$$
$$((t+2)-a)^2+((t+2)-b)^2+(t-c)^2=r^2) \tag{1d}$$

ここで，(1a), (1b), (1c) はそれぞれ，球面 S が O, A', B' を通ることを表し，(1d) は球面 S と直線 ℓ が共有点を持つことを表す．本稿では，限量記号がついた変数 r, t を**束縛変数**，限量記号がついていない変数 a, b, c を**自由変数**と呼ぶ．この一階述語論理式に QE を適用すると，a, b, c が満たすべき条件を表す等価な論理式 $6a=5 \wedge 6b=5 \wedge (3c \leq 1 \vee 13 \leq 3c)$ が得られる．

簡単化としてよく使用される手法の一つが，変数が偶数次のみ現れる場合に変数を置き換えて，問題の次数を下げる方法である．この問題では半径 r の値そのものを直接扱っていないので，$R := r^2$ とおくことで等価で，簡単な一階述語論理式に帰着できる．

$$\begin{aligned}\exists R \exists t\ &((0-a)^2+(0-b)^2+(0-c)^2=R \wedge\\ &(2-a)^2+(1-b)^2+(0-c)^2=R \wedge\\ &(1-a)^2+(2-b)^2+(0-c)^2=R \wedge\\ &((t+2)-a)^2+((t+2)-b)^2+(t-c)^2=R)\end{aligned}$$

一方で，人工知能プロジェクト「ロボットは東大に入れる」で開発している数学入試問題ソルバーにおいて自然言語処理により機械的に構築された論理式 [20] は以下のようなものであった．

$$\begin{aligned}&\exists u_x \exists u_y \exists u_z(((\neg(u_x=0)) \vee (\neg(u_y=0)) \vee (\neg(u_z=0))) \wedge (\exists v_x \exists v_y \exists v_z((\exists R(\\ &\exists t((tu_x+v_x-a)^2+(tu_y+v_y-b)^2+(tu_z+v_z-c)^2=R^2) \qquad (2a)\\ &\wedge (0<R) \wedge (a^2+b^2+c^2=R^2)\\ &\wedge ((1-a)^2+(2-b)^2+c^2=R^2) \wedge ((2-a)^2+(1-b)^2+c^2=R^2))) \wedge\\ &(\exists v_{lx} \exists v_{ly}((\exists v_{lz}((0=u_y(v_z-v_{lz})-u_z(v_y-v_{ly})) \wedge\\ &(0=u_z(v_x-v_{lx})-u_x(v_z-v_{lz})))) \wedge (0=u_x(v_y-v_{ly})-u_y(v_x-v_{lx}))))\\ &\wedge (\forall p_x \forall p_y \forall p_z(((p_x=p_z+2) \wedge (p_y=p_z+2)) \vee\\ &(\forall t_2((\neg(p_x=t_2u_x+v_x)) \vee (\neg(p_y=t_2u_y+v_y)) \vee (\neg(p_z=t_2u_z+v_z))))))\\ &\wedge (\forall p_t(\exists t_3((p_t=t_3u_z+v_z) \wedge (p_t+2=t_3u_x+v_x) \wedge (p_t+2=t_3u_y+v_y))))\\ &)) \wedge (\exists u_{lx} \exists u_{ly}((\exists u_{lz}(((\neg(u_{lx}=0)) \vee (\neg(u_{ly}=0)) \vee (\neg(u_{lz}=0)))\\ &\wedge (0=u_yu_{lz}-u_zu_{ly}) \wedge (0=u_zu_{lx}-u_xu_{lz}))) \wedge (0=u_xu_{ly}-u_yu_{lx}))))\end{aligned}$$

この一階述語論理式を Mathematica などの QE ツールにそのまま適用しても計算が停止しなかった.

例えば，部分式 (2a) は，式 (1) の場合と同様に R^2 は新しい変数に置き換えることが出来る．他にも，$v_x - a$, $v_y - b$, $v_z - c$ はこの形でのみ現れているので，それぞれ $V_x = v_x - a$, $V_y = v_y - b$, $V_z = v_z - c$ と新しい変数に置き換えることで，以下のように 3 変数少ない問題に帰着できる.

$$\exists t((tu_x + V_x)^2 + (tu_y + V_y)^2 + (tu_z + V_z)^2 = R^2)$$

このように機械的に構築された一階述語論理式は非常に冗長なので、入力の一階述語論理式の簡単化を行うことが非常に重要である.

他に，良く行う簡単化としてはいくつかの変数を固定する方法がある．例として，次の問題を考える.

問題 2
正三角形 ABC の一つの角 A について $\cos A$ を求めよ

各点を $A(a_x, a_y)$, $B(b_x, b_y)$, $C(c_x, c_y)$ と置き，$\cos A$ を表す変数を用いることにより，根号展開すれば 7 変数の一階述語論理式に帰着することが出来るが，この問題の場合には，$A(0,0)$, $B(1,0)$ とおいても一般性を失わないので，3 変数の問題を解けば十分である（A, B が決定すれば C の座標も決定できるがそれはここでは無視する）．ここで，$A(0,0)$ に固定できることは，平行移動しても一般性を失わないこと，さらに $B(1,0)$ に固定できることは，拡大縮小により一辺の長さを 1 と固定しても一般性を失わないこと、および、回転操作を行なっても一般性を失わないことに対応している.

このような QE の前処理における簡単化は計算量の大きな QE 計算において非常に重要である．ただし，本稿で紹介する簡単化は，前述のように入力の特徴を利用しているもので，適用できないことが多い．したがって，その適用可否の判定が高速であることも重要である.

3 偶論理式

本節では，一階述語論理式に現れる変数の次数を下げることで簡単な問題に帰着する手法について述べる.

3.1 偶論理式とその簡単化

最初に偶論理式を定義する.

定義 1
$\varphi(x, \boldsymbol{y})$ を一階述語論理式とする．ここで，$x \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ である．φ に現れる多項式がすべて x について偶関数であるとき，φ を x に関する**偶論理式** *(even formula)* と呼ぶ.

注意 1
x に関する偶論理式 $\varphi(x)$ は，任意の x について $\varphi(-x) \equiv \varphi(x)$ を満たすが，$\varphi(-x) \equiv \varphi(x)$ を満たす論理式が，偶論理式とは限らない．例えば，奇関数 $h(x)$ に対して，$\varphi(x)$ を $-1 \leq h(x) \wedge h(x) \leq 1$ とすると $\varphi(-x) \equiv \varphi(x)$ を満たすが，φ は偶論理式ではない.

偶論理式の特徴を利用した簡単化ができる例として，次のような問題を考える.

例 1

$$\exists y(x^2 + (y-1)^2 = 4) \tag{3}$$

このとき, x^2 を x' と置くと,

$$\begin{aligned} &\exists y(x' + (y-1)^2 = 4) \\ \equiv\ & 0 \le x' \le 4 \end{aligned}$$

が得られる. したがって,

$$0 \le x^2 \le 4$$

が, 式 (3) と等価で限量記号のない論理式となる.

定理 2
$\varphi(x, \boldsymbol{y})$ が x に関する偶論理式であるとき, すべての非負の実数 x に対して, 以下の条件をみたす $\psi(x, \boldsymbol{y})$ が存在する.

$$\varphi(x, \boldsymbol{y}) \equiv \psi(x^2, \boldsymbol{y})$$

また, x が自由変数のとき, φ は以下の論理式と等価である.

$$\exists x'(x' = x^2 \wedge \psi(x', \boldsymbol{y}))$$

φ が x に関する偶論理式の場合, x' は代入操作により形式的に消去できるため, その計算量は無視できるほど小さく, x^2 を別の変数に置き換えることにより, 次数の小さい、つまり解きやすい問題 ψ に帰着できる.

x が束縛されている場合にも, この簡単化は適用可能である.

系 3
$\varphi(x, \boldsymbol{y})$ が x に関する偶論理式であるとき, すべての非負の実数 x に対して, 以下の条件をみたす $\psi(x, \boldsymbol{y})$ が存在する.

$$\varphi(x, \boldsymbol{y}) \equiv \psi(x^2, \boldsymbol{y})$$

また, φ において x が自由変数のとき, $\exists x(\varphi)$ は以下の論理式と等価である.

$$\exists x'(x' \ge 0 \wedge \psi(x', \boldsymbol{y}))$$

証明 定理 2 から,

$$\begin{aligned} &\exists x(\varphi(x, \boldsymbol{y})) \\ \equiv\ & \exists x \exists x'(x' = x^2 \wedge \psi(x', \boldsymbol{y})) \\ \equiv\ & \exists x'(\exists x(x' = x^2) \wedge \psi(x', \boldsymbol{y})) \\ \equiv\ & \exists x'(x' \ge 0 \wedge \psi(x', \boldsymbol{y})) \end{aligned}$$

∎

3.2 線形式を含む場合

例えば, 式 (1) において $r > 0$ の条件があったとしても, $R := r^2$ の変数の置き換えと共に, $R > 0$ の条件を追加することで次数の低い問題に帰着できる. このように, 偶論理式でない場合にも, 同様の簡単化が適用できると期待される. ここでは, 線形式を含む偶論理式に対する簡単化について述べる.

偶論理式は x について偶数次の項しか現れておらず，定理 2 における ψ は $\varphi(\sqrt{x},\boldsymbol{y})$ を形式的に展開することで得ることができる．しかし，線形式を含む場合には，根号が残ってしまうため単純に展開するだけでは，ψ を得られない．根号を除去するため，2 次専用 Virtual Substitution [17] において使用されている手法を利用する．

$$
\begin{aligned}
a+b\sqrt{x}=0 &\equiv x\geq 0\wedge ab\leq 0\wedge a^2=b^2x\\
a+b\sqrt{x}\leq 0 &\equiv x\geq 0\wedge (a\leq 0\wedge a^2\geq b^2x\vee b\leq 0\wedge a^2\leq b^2x)\\
a+b\sqrt{x}<0 &\equiv x\geq 0\wedge (a<0\wedge a^2>b^2x\vee b\leq 0\wedge (a<0\vee a^2<b^2x))\\
a+b\sqrt{x}\neq 0 &\equiv x\geq 0\wedge (ab>0\vee a^2\neq b^2x)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

この手法により，$\varphi(\sqrt{x},\boldsymbol{y})$ および $\varphi(-\sqrt{x},\boldsymbol{y})$ は，それぞれ，根号を取り除いて，等価な一階述語論理式に帰着できる．したがって，定理 2 は線形式を含む場合に拡張できる．

定義 4
一階述語論理式 $\varphi(x,\boldsymbol{y})$ に現れる多項式が，x について偶関数または線形の場合，φ を x に関して**線形式を含む偶論理式**と呼ぶ．

定理 5
一階述語論理式 $\varphi(x,\boldsymbol{y})$ が x に関して線形式を含む偶論理式の場合，すべての非負の実数 x に対して，

$$\psi_+(x,\boldsymbol{y})\equiv\varphi(\sqrt{x},\boldsymbol{y}),\quad \psi_-(x,\boldsymbol{y})\equiv\varphi(-\sqrt{x},\boldsymbol{y})$$

を満たす一階述語論理式 ψ_+ と ψ_- が存在し，x が自由変数の場合，φ は以下と等価である．

$$\exists x'(x'=x^2\wedge(\psi_+(x',\boldsymbol{y})\wedge x\geq 0\vee\psi_-(x',\boldsymbol{y})\wedge x\leq 0))$$

注意 2
$\varphi(x,\boldsymbol{y})$ が x に関する偶論理式の場合，$\varphi(\sqrt{x},\boldsymbol{y})$ と $\varphi(-\sqrt{x},\boldsymbol{y})$ は等価である．

系 6
一階述語論理式 $\varphi(x,\boldsymbol{y})$ が x について線形式を含む偶論理式の場合，すべての非負の実数 x に対して，

$$\psi_+(x,\boldsymbol{y})\equiv\varphi(\sqrt{x},\boldsymbol{y}),\quad \psi_-(x,\boldsymbol{y})\equiv\varphi(-\sqrt{x},\boldsymbol{y})$$

を満たす一階述語論理式 ψ_+ と ψ_- が存在し，φ において x が自由変数のとき，$\exists x(\varphi)$ は以下の論理式と等価である．

$$\exists x'(x'\geq 0\wedge(\psi_+(x',\boldsymbol{y})\vee\psi_-(x',\boldsymbol{y})))$$

証明 定理 5 から，

$$
\begin{aligned}
&\exists x(\varphi(x,\boldsymbol{y}))\\
\equiv\ &\exists x\exists x'(x'=x^2\wedge(\psi_+(x',\boldsymbol{y})\wedge x\geq 0\vee\psi_-(x',\boldsymbol{y})\wedge x\leq 0))\\
\equiv\ &\exists x'(\exists x(x'=x^2\wedge x\geq 0)\wedge\psi_+(x',\boldsymbol{y})\vee\exists x(x'=x^2\wedge x\leq 0)\wedge\psi_-(x',\boldsymbol{y})\\
\equiv\ &\exists x'(x'\geq 0\wedge\psi_+(x',\boldsymbol{y})\vee x'\geq 0\wedge\psi_-(x',\boldsymbol{y})\\
\equiv\ &\exists x'(x'\geq 0\wedge(\psi_+(x',\boldsymbol{y})\vee\psi_-(x',\boldsymbol{y})))
\end{aligned}
$$

∎

3.3 まとめ

本節では偶論理式に対する一階述語論理式の簡単化について述べた．本節で紹介した簡単化は，入力の多項式の次数を下げるので，汎用 QE における効率化はもちろんだが，低次元専用 QE [16, 17] の適用の可能性を広げるという意味でも重要である．本手法における課題としては，以下のようなものがある．

- 根号を除去する場合には，その係数の次数が増加する．そのため，線形式に x 以外の変数が含まれる場合には，本節の手法の適用により，他の束縛変数の消去など全体の計算量が増加してしまうことがある．したがって，本手法を適用すべきか判定する必要がある．
- 例 1 において, $y' = (y-1)^2$ と置き換えるような簡単化も考えられるがその効率的な検出方法が必要である．
- 線形式を含む場合の簡単化では不等式制約が増加する．適用するアルゴリズムによっては，不等式制約が少ない方が有利な場合があるので，本手法を適用すべきかの判定する必要がある．
- 現状では, 3 以上の奇数 n に対して, ここで紹介した（$\varphi(x^n)$ を $\varphi(X)$ に帰着させる）ような簡単化が適用可能か判定できない.

4 斉次論理式／拡大縮小

本節では，拡大縮小をしても条件が変化しないような論理式に対する簡単化について紹介する．問題 2 において,「一辺の長さを 1 にする」などの簡単化が本節での対象である．

4.1 斉次論理式とその簡単化

最初に斉次論理式を定義する．

定義 7
単項式 $x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$ に対して, $\sum_{i=0}^{m} a_i$ $(m=1,\ldots,n)$ をその単項式の $x_1,\ldots,x_m$ に対する**総次数**と言い，多項式 $f(x_1,\ldots,x_n)$ に現れる単項式の $x_1,\ldots,x_m$ に対する総次数の最大を多項式 f の $x_1,\ldots,x_m$ に対する総次数と言う．

定義 8
$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ を一階述語論理式とする．ここで，$\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_m)\in\mathbb{R}^m$ である．任意の正の実数 k について，以下が成立するとき, φ は $\boldsymbol{x}$ に関する**斉次論理式** *(homogeneous formula)* と呼ぶ.

$$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \varphi(k\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

ここで，$k\boldsymbol{x}$ は $(kx_1,\ldots,kx_n)$ を表す．

$\varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{x}$ について斉次なとき，$\boldsymbol{x}$ を拡大／縮小する変換を行なっても φ が表す条件が変化しないと幾何的解釈ができる．$\varphi(a,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が $a,\boldsymbol{x}$ に関する斉次論理式であるとき, φ に現れる任意の多項式 $f(a,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は $a,\boldsymbol{x}$ について斉次である．f の $a,\boldsymbol{x}$ に関する総次数を n とすると，$a\neq 0$ のとき，$f(a,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})/a^n = f(1,\boldsymbol{x}/a,\boldsymbol{y})$ が成立する（$\boldsymbol{x}/a$ は $(x_1/a,\ldots,x_n/a)$ を表す）．従って，a の符号に関して場合分けすることで以下の定理が得られる．

定理 9
$\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が $a, \boldsymbol{x}$ に関する斉次論理式で，a が自由変数のとき，φ は以下と等価である．

$$\begin{aligned}
&\exists \boldsymbol{x}'(a > 0 \land \varphi(1, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) \land a\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}) \lor \\
&\quad (a = 0 \land \varphi(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \lor \\
&\exists \boldsymbol{x}'(a < 0 \land \varphi(-1, -\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) \land a\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

定理 9 を利用すれば元の問題 φ から a を消去した一変数少ない問題を解くことで， QE を実現できる．$\boldsymbol{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ の消去は，x'_i に x_i/a を代入し，a の符号に注意して形式的に分母を払うことで実現できる．

注意 3
$\boldsymbol{x}$ に関する斉次論理式 $\varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に含まれる原子論理式 $f \rho 0$ ($\rho \in \{=, \neq, <, \leq\}$) を考える．今，$f$ は $\boldsymbol{x}$ に関して斉次なので，f の $\boldsymbol{x}$ に対する総次数を n とすると $f(-\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-1)^n f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ となる．

したがって，$a, \boldsymbol{x}$ に関する斉次論理式 $\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ に含まれるすべての原子論理式 $f \rho 0$ が等式か非等式 ($\rho \in \{=, \neq\}$) または $a, \boldsymbol{x}$ に対する f の総次数が偶数の場合 $\varphi(1, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}) \equiv \varphi(-1, -\boldsymbol{x}', \boldsymbol{y})$ である．

例 2
例として，$\varphi(a, b, c, x) \equiv \exists x(ax^2 + bx + c < 0)$ を斉次論理式に対する簡単化を利用して解く．φ は a, b, c に対して斉次なので，定理 9 を利用して以下のように解くことができる．

$$\begin{aligned}
\varphi(a, b, c, x) \equiv\ & \exists b' \exists c' & & (a > 0 \land \varphi(1, b', c', x) \land ab' = b \land ac' = c) \lor \\
& & & (a = 0 \land \varphi(0, b', c', x)) \lor \\
& \exists b' \exists c' & & (a < 0 \land \varphi(-1, -b', -c', x) \land ab' = b \land ac' = c) \\
\equiv\ & \exists b' \exists c' & & (a > 0 \land \exists x(x^2 + b'x + c' < 0) \land ab' = b \land ac' = c) \lor \\
& & & (a = 0 \land \exists x(bx + c < 0)) \lor \\
& \exists b' \exists c' & & (a < 0 \land \exists x(-x^2 - b'x - c' < 0) \land ab' = b \land ac' = c) \\
\equiv\ & \exists b' \exists c' & & (a > 0 \land b'^2 - 4c > 0 \land ab' = b \land ac' = c) \lor \\
& & & (a = 0 \land (b \neq 0 \lor c < 0)) \lor \\
& \exists b' \exists c' & & (a < 0 \land \top \land ab' = b \land ac' = c) \\
\equiv\ & & & (a > 0 \land (b/a)^2 - 4(c/a) > 0) \lor \\
& & & (a = 0 \land (b \neq 0 \lor c < 0)) \lor \\
& & & (a < 0) \\
\equiv\ & & & (a > 0 \land b^2 - 4ac > 0) \lor \\
& & & (a = 0 \land (b \neq 0 \lor c < 0)) \lor \\
& & & (a < 0)
\end{aligned}$$

a が束縛されている場合には以下の系が適用可能である．

系 10
$\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が $a, \boldsymbol{x}$ に関する斉次論理式で，a が自由変数，$\boldsymbol{x}$ が束縛変数のとき，以下が成立する．

$$\exists a(\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \equiv \varphi(1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \lor \varphi(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \lor \varphi(-1, -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

4.2 まとめ

本節では，斉次論理式に対する簡単化について述べた．この手法による簡単化は，幾何的な解釈では，拡大縮小しても条件の変化しない問題を，特別なケースで解くことに対応する．また，2 次元の直線を機械的

に $ax+by+c=0$ と定義したものを，自動的に $y=a'x+b' \vee x=c'$ というような問題の分割を実現する．分割された部分問題は一変数少なくなっており，QE 計算の前処理として非常に重要である．本手法における課題としては，以下のようなものがある．

- $\exists x(ax^2+bx+c=0)$ を考える．これは (a,b,c) について斉次である．a を本節での簡単化により消去すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&\exists b'\exists c'(a>0 \wedge \exists x(x^2+b'x+c'=0) \wedge ab'=b \wedge ac'=c) \vee \\
&\qquad (a=0 \wedge \exists x(bx+c=0)) \vee \\
&\exists b'\exists c'(a<0 \wedge \exists x(x^2+b'x+c'=0) \wedge ab'=b \wedge ac'=c)
\end{aligned}$$

一方，b を消去すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&\exists a'\exists c'(b>0 \wedge \exists x(a'x^2+x+c'=0) \wedge ba'=a \wedge bc'=c) \vee \\
&\qquad (b=0 \wedge \exists x(ax^2+c=0)) \vee \\
&\exists a'\exists c'(b<0 \wedge \exists x(a'x^2+x+c'=0) \wedge ba'=a \wedge bc'=c)
\end{aligned}$$

この問題の場合，部分問題の x の 2 次の係数が定数となるので b よりも a を消去したほうが効率的であると予想される．このように，消去する変数の選択が計算効率に影響するため，その判定法が必要となる．

- 上記の例に $b>0$ の条件が付いた $\exists x(ax^2+bx+c=0 \wedge b>0)$ を考える．の場合， a を消去すると，

$$\begin{aligned}
&\exists b'\exists c'(a>0 \wedge \exists x(x^2+b'x+c'=0 \wedge b'>0) \wedge ab'=b \wedge ac'=c) \vee \\
&\qquad (a=0 \wedge \exists x(bx+c=0 \wedge b>0)) \vee \\
&\exists b'\exists c'(a<0 \wedge \exists x(x^2+b'x+c'=0 \wedge b'>0) \wedge ab'=b \wedge ac'=c)
\end{aligned}$$

一方，b を消去すると

$$\begin{aligned}
&\exists a'\exists c'(b>0 \wedge \exists x(a'x^2+x+c'=0 \wedge 1>0) \wedge ba'=a \wedge bc'=c) \vee \\
&\qquad (b=0 \wedge \exists x(ax^2+c=0 \wedge 0>0)) \vee \\
&\exists a'\exists c'(b<0 \wedge \exists x(a'x^2+x+c'=0 \wedge 1<0) \wedge ba'=a \wedge bc'=c) \\
\equiv\ &\exists a'\exists c'(b>0 \wedge \exists x(a'x^2+x+c'=0) \wedge ba'=a \wedge bc'=c)
\end{aligned}$$

となり，x の 2 次の係数が定数ではないが，部分問題の数が少なくなる．このように消去する変数の判定には次数の情報だけでは不十分であると考えられる．

- 問題 2 は X を $\cos A$, ℓ を一辺の長さとすると余弦定理を利用して次の一階述語論理式が構築できる．

$$\begin{aligned}
&\forall A_x \forall A_y \forall B_x \forall B_y \forall C_x \forall C_y \forall \ell \\
&\quad (\ell>0 \wedge \\
&\quad (A_x-B_x)^2+(A_y-B_y)^2=\ell^2 \wedge \\
&\quad (C_x-B_x)^2+(C_y-B_y)^2=\ell^2 \wedge \\
&\quad (A_x-C_x)^2+(A_y-C_y)^2=\ell^2) \to \ell^2=\ell^2+\ell^2-2\ell^2X))
\end{aligned}$$

これは, $(A_x, B_x, C_x, A_y, B_y, C_y, \ell)$ について斉次である．上記の式は変数 ℓ に対して偶論理式であるが，以下のように偶論理式の性質を利用した簡単化を行うと斉次ではなくなってしまう．

$$\begin{aligned}
&\forall A_x \forall A_y \forall B_x \forall B_y \forall C_x \forall C_y \forall L\\
&\quad (L > 0 \wedge\\
&\quad (A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2 = L \wedge\\
&\quad (C_x - B_x)^2 + (C_y - B_y)^2 = L \wedge\\
&\quad (A_x - C_x)^2 + (A_y - C_y)^2 = L) \to L = L + L - 2LX))
\end{aligned}$$

このように，他の簡単化手法との組み合わせにより，本手法が適用できなる可能性がある．もちろん，$L := \ell^2$ の置き換えにより次数を上げることで一変数減らすことも可能になるが，その場合はどちらが効率的に計算できるかの判定が必要となる．

5 シフト不変論理式／平行移動

本節では，平行移動をしても条件が変化しないような論理式に対する簡単化について紹介する．問題 2 において,「点 A を (0,0) とする」ような簡単化や式 (2a) における，$V_x := v_x - a$ のような置き換えによる簡単化が本節の対象である．

5.1 シフト不変論理式とその簡単化

最初にシフト不変論理式を定義する．

定義 11

$\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を一階述語論理式とする．ここで，$a \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$ である．ある実数 $h \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^n$ が存在し，以下の条件を満たすとき，φ は $\boldsymbol{x}$ について，a-**シフト不変論理式** *(shift-invariant formula)* と呼ぶ．

$$\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \varphi(h, \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{k}, \boldsymbol{y})$$

ここで，$\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{k}$ は $(x_1 - k_1 a, \ldots, x_n - k_n a)$ を表す．

幾何的な解釈で説明すると，$a, \boldsymbol{x}$ がある座標の値を表しているときに並行移動しても，φ が表す条件が変化しないことを表し，$h = 0$, $\boldsymbol{k} = (1, \ldots, 1)$ のとき，ある座標を原点に並行移動する操作に対応する．

$\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{x}$ について a-シフト不変なとき，変数 $a, \boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} - a\boldsymbol{k}$ の形でのみ現れるので，$\boldsymbol{x}' := \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{k}$ と置き換えることにより一変数少ない問題に帰着できる．

定理 12

$\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{x}$ について，a-シフト不変論理式で，a は自由変数とする．このとき，ある実数 $h, \boldsymbol{k}$ が存在し，

$$\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \varphi(h, \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{k}, \boldsymbol{y})$$

を満たす．このとき，φ は以下と等価である．

$$\exists \boldsymbol{x}' (\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{k} \wedge \varphi(h, \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}))$$

ここで，$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{k}$ は $\wedge_i \{x'_i = x_i - k_i a \mid x_i$は自由変数$\}$ を表す．

定理 12 を利用すれば元の問題 φ から a を消去した一変数少ない問題を解くことで，QE を実現できる．$\boldsymbol{x}'$ の消去は，x'_i に $x_i - k_i a$ を代入することで実現できる．

a が束縛されている場合には以下の系が適用可能である．

系 13

$\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{x}$ について，a-シフト不変論理式で，a は自由変数，$\boldsymbol{x}$ は束縛変数とする．このとき，ある実数 h, $\boldsymbol{k}$ が存在し，

$$\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \varphi(h, \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{k}, \boldsymbol{y})$$

を満たす．このとき，以下が成立する．

$$\exists a(\varphi(a, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})) \equiv \varphi(h, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

5.2 まとめ

本節では，シフト不変論理式に対する簡単化について述べた．この手法による簡単化は，幾何的な解釈では，平行移動しても条件の変化しない問題を，特別なケースで解くことに対応し，論理式中における，同じ形で現れる変数の組みを，新しい変数に置き換えることで，論理式に現れる変数の数を削減する．本手法における課題としては，以下のようなものがある．

- 現在は，a-シフト不変であることの検出に，一階述語論理式 $\varphi(a, \boldsymbol{x})$ に現れるすべての多項式 $f(a, \boldsymbol{x})$ に対して，$f(a, \boldsymbol{x}) - f(h - \boldsymbol{x} - a\boldsymbol{k})$ における a, $\boldsymbol{x}$ の係数がすべて零になる h, $\boldsymbol{k}$ の条件を求める方法をとっている．しかし，この方法は偶論理式や斉次論理式の検出にくらべコストが大きくなっていることが課題である．
- 本節での対象は置き換える形としては線形の場合に限定しており，$x_2^2 - x_1$ や $x_1 x_2$ などの非線形な形での置き換えには対応していない．

6 おわりに

本稿では，限量記号がついた一階述語論理式の特徴を利用した，QE 計算の効率化のための簡単化について述べた．紹介した手法は，機械的に構築された入力に対する効率化として非常に重要である．また数式処理や QE に詳しくないユーザが定式化した入力の場合にも冗長な条件が含まれていることがあり，本稿で紹介した簡単化手法は有効であると推測される．

実際に本手法を QE ツール SyNRAC [12, 14] に組み込んで動作させると，Virtual Substitution [16, 17] のような冗長な式を出力するアルゴリズムを再帰的に利用する場合などに動作していることが確認できており，QE ツールの効率化としても重要な手法であることがわかっている．

第 4 節と第 5 節で提案した手法は，変数の自由度を下げることに対応している．これは，等式制約が零次元となることを要求する包括的グレブナー基底や包括的グレブナー基底系を利用した QE [18, 7] の前処理としても有効である．

今後の課題としては，本稿では扱っていない人が定式化する場合には利用する問題の特徴をいかした簡単化手法の定式化がある．例えば，問題 2 で紹介した回転移動による同一視による簡単化でも一変数削減できる．しかし，これは検出に必要な変数の組み合わせが多いため，効率的な検出が実現できていない．

参 考 文 献

[1] Christopher W. Brown. Fast simplifications for tarski formulas based on monomial inequalities. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 47, No. 7, pp. 859–882, 2012.

[2] Christopher W. Brown and James H. Davenport. The complexity of quantifier elimination and cylindrical algebraic decomposition. In *Proceedings of the 2007 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, ISSAC '07, pp. 54–60, New York, NY, USA, 2007. ACM.

[3] Christopher W. Brown and Adam W. Strzebonski. Black-box/white-box simplification and applications to quantifier elimination. In Wolfram Koepf, editor, *Symbolic and Algebraic Computation, International Symposium, ISSAC 2010, Munich, Germany, July 25-28, 2010, Proceedings*, pp. 69–76. ACM, 2010.

[4] Bob F. Caviness and Jeremy R Johnson, editors. *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition (Texts and Monographs in Symbolic Computation)*. Springer Vienna, softcover reprint of the original 1st ed. 1998 edition, April 1998.

[5] George E. Collins. Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. In *Automata Theory and Formal Languages 2nd GI Conference Kaiserslautern, May 20-23, 1975*, Vol. 33 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 134–183. Springer-Verlag, 1975.

[6] Andreas Dolzmann and Thomas Sturm. Simplification of quantifier-free formulas over ordered fields. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 24, pp. 209–231, 1995.

[7] Ryoya Fukasaku. QE software based on comprehensive gröbner systems. In Hong and Yap [9], pp. 512–517.

[8] Laureano González-Vega, T Recio, H Lombardi, and M.-F Roy. *Sturm-Habicht sequences determinants and real roots of univariate polynomials*, pp. 300–316. In Caviness, Bob F. and Johnson, Jeremy R [4], softcover reprint of the original 1st ed. 1998 edition, April 1998.

[9] Hoon Hong and Chee Yap, editors. *Mathematical Software - ICMS 2014 - 4th International Congress, Seoul, South Korea, August 5-9, 2014. Proceedings*, Vol. 8592 of *Lecture Notes in Computer Science*. Springer, 2014.

[10] Hidenao Iwane, Hiroyuki Higuchi, and Hirokazu Anai. An effective implementation of a special quantifier elimination for a sign definite condition by logical formula simplification. In Vladimir P. Gerdt, Wolfram Koepf, Ernst W. Mayr, and Evgenii V. Vorozhtsov, editors, *CASC*, Vol. 8136 of *Lecture Notes in Computer Science*, pp. 194–208. Springer, 2013.

[11] Hidenao Iwane, Takuya Matsuzaki, Noriko H. Arai, and Hirokazu Anai. Automated natural language geometry math problem solving by real quantifier elimination. In *Proceedings of the 10th International Workshop on Automated Deduction in Geometry (ADG 2014)*, pp. 75–84, 2014.

[12] Hidenao Iwane, Hitoshi Yanami, and Hirokazu Anai. SyNRAC: A toolbox for solving real algebraic constraints. In Hong and Yap [9], pp. 518–522.

[13] Takuya Matsuzaki, Hidenao Iwane, Hirokazu Anai, and Noriko H. Arai. The most uncreative examinee: A first step toward wide coverage natural language math problem solving. In *Proceedings of the Twenty-Eighth AAAI Conference on Artificial Intelligence*, pp. 1098–1104, 2014.

[14] http://jp.fujitsu.com/group/labs/en/techinfo/freeware/synrac/.

[15] Todai robot project. http://21robot.org/?lang=english.

[16] Volker Weispfenning. The complexity of linear problems in fields. *Journal of Symbolic Computation*, Vol. 5, pp. 3–27, February 1988.

[17] Volker Weispfenning. Quantifier elimination for real algebra - the quadratic case and beyond. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, Vol. 8, pp. 85–101, 1993.

[18] Volker Weispfenning. *A New Approach to Quantifier Elimination for Real Algebra*, pp. 376–392. In Caviness and Johnson [4], softcover reprint of the original 1st ed. 1998 edition, April 1998.

[19] 穴井宏和, 横山和弘. QE の計算アルゴリズムとその応用 – 数式処理による最適化. 東京大学出版会, August 2011.

[20] 岩根秀直, 松崎拓也, 穴井宏和, 新井紀子. 数式処理による入試数学問題の解法と言語処理との接合における課題. 人工知能学会全国大会, 2013.

[21] 松崎拓也, 岩根秀直, 穴井宏和, 新井紀子. 大学入試過去問による数学問題解答システムの評価と課題分析. 人工知能学会全国大会, 2014.