

# $N$ 分木離散ウェーブレット変換について\*

## On an $N$ -tree discrete wavelet transform

守本 晃<sup>†</sup>, 芦野 隆一<sup>‡</sup>, 池邊 和馬<sup>§</sup>, 辰巳 基<sup>¶</sup>, 萬代 武史<sup>||</sup>

### 概要

実数値ウェーブレット関数の解析信号を用いた連続ウェーブレット変換は解析ウェーブレット変換とよばれる使い勝手がよい道具である。本論文では、離散ウェーブレット変換の範疇で解析ウェーブレット変換に相当する道具として、 $N$  分木離散ウェーブレット変換を提案する。まず、双直交ウェーブレット関数の分数べきヒルベルト変換を生成する性質の良い双直交スケーリング関数を求め、ローパスフィルタ係数の対応を求める。次に、これらのローパスフィルタを有限長で切り取ったフィルタを用いた通常の離散ウェーブレット変換・逆変換の精度を求める。最後に、 $N$  分木離散ウェーブレット変換の近似と詳細がシフト不変に近い性質を持つことを例示する。

キーワード：  $N$  分木離散ウェーブレット変換, 分数べきヒルベルト変換, 多重解像度解析

**Keywords:**  $N$ -tree discrete wavelet transform, fractional Hilbert transform, multiresolution analysis

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 42C40; Secondary: 65T60, 94A12

## 1 はじめに

連続ウェーブレット変換を用いて信号を解析する場合に、実数値ウェーブレット関数の解析信号を複素数値のウェーブレット関数として用いた解析ウェーブレット変換は有用な道具である [5, 2]. 解析信号を作るには、ヒルベルト変換を虚部にする必要がある。ウェーブレット関数  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  は、平均が 0 ( $\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0$ ) であるから、多くの場合  $\psi$  のヒルベルト変換の無限遠での減衰性は悪くならない。

\*この研究は部分的に科学研究費補助金 (C)23540135, (C)24540197, (C)25400202, (C)26400199 の補助を受けている。

<sup>†</sup>(Akira Morimoto) 大阪教育大学・情報科学 e-mail:morimoto@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

<sup>‡</sup>(Ryuichi Ashino) 大阪教育大学・数理科学 e-mail:ashino@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

<sup>§</sup>(Kazuma Ikebe) 大阪教育大学・情報科学 e-mail:j139607@ex.osaka-kyoiku.ac.jp

<sup>¶</sup>(Motoi Tatsumi) 大阪教育大学・情報科学 e-mail:j139611@ex.osaka-kyoiku.ac.jp

<sup>||</sup>(Takeshi Mandai) 大阪電気通信大学・工学部 e-mail:mandai@isc.osakac.ac.jp

よって、 $\psi$  の解析信号も無限遠での減衰性が悪くならないので、解析ウェーブレット変換を数値計算する場合に問題は生じない。

ところが、離散ウェーブレット変換を考える場合には、ウェーブレット関数  $\psi(x)$  以外にスケーリング関数  $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  も必要である。スケーリング関数は平均が 1 ( $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$ ) なので、 $\phi$  のヒルベルト変換のフーリエ変換が原点で不連続になる。したがって、 $\phi$  のヒルベルト変換の無限遠での減衰性が悪くなり、これを数値計算に用いるのは困難であった。

Selesnick-Baraniuk-Kingsbury [7] は数値計算に耐えうるフィルタ係数を求め、2 分木複素ウェーブレット変換 (dual-tree complex wavelet transform) を提案した。戸田・章 [9]、Toda-Zhang [8] は、Meyer のウェーブレットの場合に平行移動不変な 2 分木複素ウェーブレット変換を提案した。我々 [1] は、正規直交ウェーブレット関数の分数べきヒルベルト変換を生成する性質の良い正規直交スケーリング関数を作成した。

本論文では、双直交ウェーブレット関数に対して、その分数べきヒルベルト変換を生成する性質の良い双直交スケーリング関数を作成し、対応するフィルタ係数を元のフィルタ係数から計算する方法を提案する。またフィルタ係数を有限長でカットオフした場合の離散ウェーブレット変換・逆変換の誤差を様々なウェーブレットに対して求める。さらに、自然数  $N$  に対して、 $1/N$  間隔の分数べきヒルベルト変換と対応するスケーリング関数から得られるフィルタ係数を用いた  $N$  分木離散ウェーブレット変換を提案する。最後に、 $N$  分木離散ウェーブレット変換の近似と詳細がシフト不変に近い性質を持つことを数値計算で示す。

## 2 準備

$m, n \in \mathbb{Z}$  に対して、クロネッカーのデルタを

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

とする。  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  の内積とノルムを

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

で書き表す。ただし、 $\bar{z}$  は複素数  $z$  の複素共役を表す。  $f \in L^1(\mathbb{R})$  のフーリエ変換と  $g \in L^1(\mathbb{R})$  の逆フーリエ変換を

$$\begin{aligned} \mathcal{F}f(\xi) &= \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} dx, \\ \mathcal{F}^{-1}g(x) &= \check{g}(x) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{ix\xi} d\xi \end{aligned}$$

で定義する. フーリエ変換と逆フーリエ変換は  $L^2(\mathbb{R})$  上の有界作用素に拡張できる.

$L^2(\mathbb{R})$  上の平行移動作用素  $T_b$  と伸張作用素  $D_\rho$  と変調作用素  $M_\omega$  を

$$T_b f(x) = f(x - b), \quad D_\rho f(x) = \rho^{-1/2} f(x/\rho), \quad M_\omega f(x) = e^{i\omega x} f(x)$$

で定義する. ただし,  $b, \omega \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  である. これらは,  $L^2(\mathbb{R})$  上のユニタリ作用素である. これらのユニタリ作用素は, 次の関係を満たす.

補題 1.

$$\begin{aligned} T_b M_\omega &= e^{-i\omega b} M_\omega T_b, & M_\omega T_b &= e^{i\omega b} T_b M_\omega, \\ T_b D_\rho &= D_\rho T_{b/\rho}, & D_\rho T_b &= T_{b\rho} D_\rho, \\ M_\omega D_\rho &= D_\rho M_{\rho\omega}, & D_\rho M_\omega &= M_{\omega/\rho} D_\rho. \end{aligned}$$

フーリエ変換と平行移動作用素  $T_b$ , 伸張作用素  $D_\rho$ , 変調作用素  $M_\omega$  との関係は, 次の通りである.

補題 2.

$$\begin{aligned} \mathcal{F} T_b &= M_{-b} \mathcal{F}, & \mathcal{F}^{-1} T_b &= M_b \mathcal{F}^{-1}, \\ \mathcal{F} D_\rho &= D_{1/\rho} \mathcal{F}, & \mathcal{F}^{-1} D_\rho &= D_{1/\rho} \mathcal{F}^{-1}, \\ \mathcal{F} M_\omega &= T_\omega \mathcal{F}, & \mathcal{F}^{-1} M_\omega &= T_{-\omega} \mathcal{F}^{-1}. \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}$  に対して, 符号関数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

を定義する.

定義 3.  $f \in L^2(\mathbb{R})$  のヒルベルト変換を

$$\mathcal{H}f = \mathcal{F}^{-1} \left[ -i \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi) \right]$$

で定義する.

定義 4.  $c \in \mathbb{R}$  に対して, 分数べきヒルベルト変換  $\mathcal{H}_c$  を

$$\mathcal{H}_c = \cos(c\pi) I + \sin(c\pi) \mathcal{H}$$

で定義する. ただし,  $I$  は恒等作用素である.

$\mathcal{H}_c f$  をフーリエ変換すると,

$$\mathcal{F}[\mathcal{H}_c f] = \cos(c\pi) \widehat{f}(\xi) - i \sin(c\pi) \operatorname{sgn}(\xi) \widehat{f}(\xi) = e^{-ic\pi \operatorname{sgn}(\xi)} \widehat{f}(\xi)$$

を得る.

$x \in \mathbb{R}$ ,  $A > 0$  に対して,  $x$  を  $A$  で割ったときの余りを

$$\operatorname{mod}(x, A) := x - \left\lfloor \frac{x}{A} \right\rfloor A$$

と定義する. ただし,  $\lfloor x \rfloor$  は床関数とよばれ,  $x$  以下の最大の整数を表す. さらに, 図 1 で表される補助関数

$$\tau(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{mod}(|\xi|, 2\pi)$$

を定義する. 次に, 平行移動作用素を少し変更した作用素を定義する [1].

定義 5. ユニタリ作用素  $\mathcal{T}_c^\dagger$  を

$$\mathcal{T}_c^\dagger f = \mathcal{F}^{-1} \left[ e^{-ic\tau(\xi)} \widehat{f}(\xi) \right]$$

で定義する.

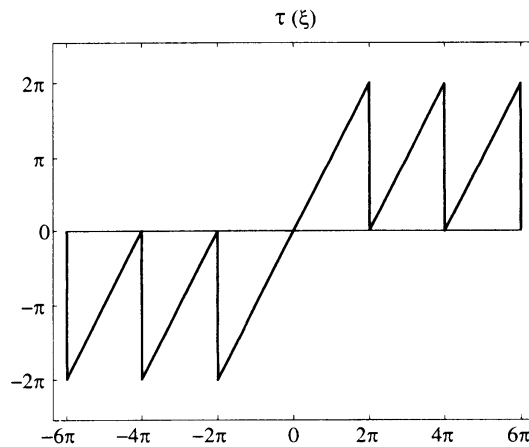


図 1: 補助関数  $\tau(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi) \operatorname{mod}(|\xi|, 2\pi)$ .

注意 6. 平行移動作用素  $\mathcal{T}_c$  は,  $\mathcal{T}_c f = \mathcal{F}^{-1} \left[ e^{-ic\xi} \widehat{f}(\xi) \right]$  であるから, 帯域制限関数  $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset [-2\pi, 2\pi]$  に対しては,  $\mathcal{T}_c^\dagger f = \mathcal{T}_c f$  である.

補題 7.  $L^2(\mathbb{R})$  上のユニタリ作用素  $\mathcal{H}_c$ ,  $\mathcal{T}_c^\dagger$  は次を満たす.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c \mathcal{H}_d &= \mathcal{H}_{c+d}, & \mathcal{H}_0 &= I, & \mathcal{H}_{1/2} &= \mathcal{H}, \\ \mathcal{T}_c^\dagger \mathcal{T}_d^\dagger &= \mathcal{T}_{c+d}^\dagger, & \mathcal{T}_0^\dagger &= I. \end{aligned}$$

補題 8.  $L^2(\mathbb{R})$  上のユニタリ作用素  $\mathcal{H}_c$  は平行移動作用素  $T_b$  と伸張作用素  $D_\rho$  の両方と可換である. 一方  $T_c^\dagger$  は, 平行移動作用素  $T_b$  と可換である.

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_c T_b &= T_b \mathcal{H}_c, & \mathcal{H}_c D_\rho &= D_\rho \mathcal{H}_c, \\ T_c^\dagger T_b &= T_b T_c^\dagger.\end{aligned}$$

$j, k \in \mathbb{Z}$  と  $f \in L^2(\mathbb{R})$  に対して,

$$f_{j,k}(x) := D_{2^{-j}} T_k f = 2^{j/2} f(2^j x - k)$$

と定義する.

定義 9. 可分ヒルベルト空間  $H$  の要素の集合  $\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  ( $\Lambda$  は可算の添字の集合) が次の 2 条件を満たすときリース基底とよぶ.

1.  $\overline{\text{span}}\{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} = H$ .
2. 定数  $0 < C_1 \leq C_2$  が取れて, 任意の数列  $\{a_\lambda\} \in \ell^2(\Lambda)$  に対して,

$$C_1 \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda|^2 \right) \leq \left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda e_\lambda \right\|_H^2 \leq C_2 \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda|^2 \right) \quad (1)$$

が成立する. ここで,  $\|f\|_H$  は  $f$  の  $H$  ノルムである.

### 3 正規直交ウェーブレット関数の分数べきヒルベルト変換

定義 10.  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間の列  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  が次の 5 条件を満たすとき, 多重解像度解析 (multiresolution analysis (MRA)) とよぶ.

1.  $V_j \subset V_{j+1}$ .
2.  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$ .
3.  $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x-k) \in V_0, k \in \mathbb{Z}$ .
4.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ .
5. スケーリング関数とよぶ  $\phi(x) \in V_0$  が存在して,  $\{\phi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$  が  $V_0$  のリース基底を構成する.

定義 10 の条件 5 で,  $\{\phi(x-k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$  が  $V_0$  の正規直交基底になるとき,  $\phi$  を正規直交スケーリング関数とよぶ. この節と次節では,  $\phi$  が正規直交スケーリング関数である場合を考察する.

$\phi \in V_0 \subset V_1$  より,  $\phi$  は  $V_1$  の正規直交基底  $\{2^{1/2}\phi(2x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  で展開できる. このときの次の展開式をツースケール方程式または伸張方程式とよぶ.

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n 2^{1/2} \phi(2x-n). \quad (2)$$

ただし, 展開係数は,

$$h_n = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \overline{2^{1/2}\phi(2x-n)} dx$$

である. 数列  $\{h_n\}$  をローパスフィルタ係数とよぶ. 伸張方程式 (2) をフーリエ変換すると,

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2)$$

を得る. ここで,  $2\pi$  周期関数

$$m_0(\xi) = 2^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\xi} \quad (3)$$

は, ローパスフィルタとよばれる. このとき, ハイパスフィルタを

$$\begin{aligned} m_1(\xi) &= e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi+\pi)} \\ &= 2^{-1/2} e^{-i\xi} \overline{\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in(\xi+\pi)}} \\ &= 2^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \overline{h_n} e^{i(n-1)\xi} \\ &= 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{1-k} \overline{h_{1-k}} e^{-ik\xi} \end{aligned} \quad (4)$$

と選び,

$$\widehat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2) \quad (5)$$

で関数  $\psi$  を定義すると,  $\psi$  は正規直交ウェーブレット関数になる. つまり,

$$\{\psi_{j,k}(x) \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$$

が  $L^2(\mathbb{R})$  の正規直交基底を構成する. 式 (4) のハイパスフィルタで作成した正規直交ウェーブレット関数 (5) を,  $\phi$  から自然に生成される正規直交ウェーブレット関数とよぶ. 式 (5) の両辺を逆フーリエ変換すると,

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n 2^{1/2} \phi(2x-n), \\ g_n &= (-1)^{1-n} \overline{h_{1-n}} \end{aligned} \quad (6)$$

を得る. 式 (6) をウェーブレット方程式とよび, 係数列  $\{g_n\}$  をハイパスフィルタ係数とよぶ.

Ashino-Mandai-Morimoto [1] より, 次の定理が成立する.

**定理 11.**  $\phi$  を正規直交スケーリング関数,  $\psi$  を  $\phi$  から自然に生成される正規直交ウェーブレット関数とする. このとき以下の (1), (2) が成立する.

- (1)  $\mathcal{H}_c\phi$  は正規直交スケーリング関数になる.  $\mathcal{H}_c\psi$  は,  $\mathcal{H}_c\phi$  から自然に生成される正規直交ウェーブレット関数である.
- (2)  $\mathcal{T}_c^\dagger\phi$  は正規直交スケーリング関数になる.  $\mathcal{H}_c\psi$  は,  $\mathcal{T}_c^\dagger\phi$  から自然に生成される正規直交ウェーブレット関数である.

**注意 12.** 伸張方程式 (2) やウェーブレット方程式 (6) に, 平行移動作用素と伸張作用素の両方と可換なユニタリ作用素  $\mathcal{P}$  ( $\mathcal{H}_c$  など) を作用させると,  $\phi$  を  $\mathcal{P}\phi$  に  $\psi$  を  $\mathcal{P}\psi$  におき換えた同じローパス・ハイパスフィルター係数を持つ伸張方程式とウェーブレット方程式が得られる. したがって,  $V_j$  を  $\mathcal{P}V_j$  にすれば正規直交スケーリング関数  $\mathcal{P}\phi$  を持つ MRA ができる.  $\mathcal{P}\phi$  から自然に生成される正規直交ウェーブレット関数は,  $\mathcal{P}\psi$  である. このことから, 定理 11 の (1) は成立する.

定理 11 の (2) の証明.  $j \in \mathbb{Z}$  に対して,  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間

$$V_j^\dagger = \overline{\text{span}} \{ \mathcal{D}_{2^{-j}} \mathcal{T}_k \mathcal{T}_c^\dagger \phi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

を定義する.  $\{V_j^\dagger\}_{j \in \mathbb{Z}}$  が MRA を構成することを以下で示す.

まず,  $\mathcal{T}_c^\dagger$  は, 平行移動作用素と可換なユニタリ作用素であるから,

$$\langle \mathcal{T}_k \mathcal{T}_c^\dagger \phi, \mathcal{T}_m \mathcal{T}_c^\dagger \phi \rangle = \langle \mathcal{T}_c^\dagger \mathcal{T}_k \phi, \mathcal{T}_c^\dagger \mathcal{T}_m \phi \rangle = \langle \mathcal{T}_k \phi, \mathcal{T}_m \phi \rangle = \delta_{k,m}$$

が成立する. したがって,  $\{\mathcal{T}_k \mathcal{T}_c^\dagger \phi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  は  $V_0^\dagger$  の正規直交基底である. このことから, MRA の条件 5 と 3 が成立する.

次に,  $\mathcal{T}_c^\dagger\phi$  をフーリエ変換すると,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{T}_c^\dagger\phi](\xi) &= e^{-ic\tau(\xi)} \widehat{\phi}(\xi) \\ &= e^{-ic\tau(\xi)} m_0(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2) \\ &= [e^{-ic(\tau(\xi) - \tau(\xi/2))} m_0(\xi/2)] [e^{-ic\tau(\xi/2)} \widehat{\phi}(\xi/2)] \\ &= [e^{-ic(\tau(\xi) - \tau(\xi/2))} m_0(\xi/2)] \mathcal{F}[\mathcal{T}_c^\dagger\phi](\xi/2) \end{aligned} \quad (7)$$

を得る. ここで,  $2\pi$  周期関数

$$\eta(\xi) := \tau(2\xi) - \tau(\xi) = \text{mod}(\xi + \pi, 2\pi) - \pi$$

を定義する.  $\eta(\xi)$  の概形は図 2 左図である. 式 (7) をよく見ると,

$$m_{0,c}^\dagger(\xi) := e^{-ic\eta(\xi)} m_0(\xi)$$

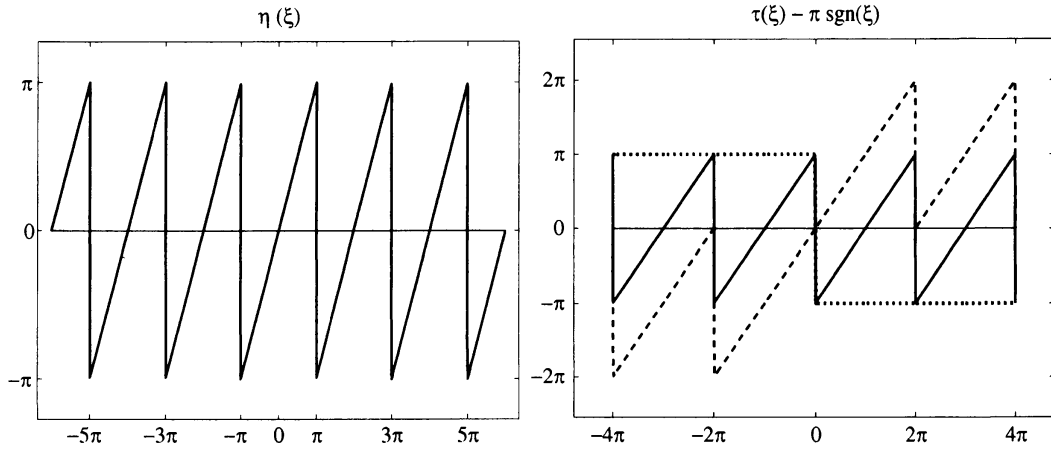


図 2: 左:  $2\pi$  周期関数  $\eta(\xi) := \tau(2\xi) - \tau(\xi)$ . 右: 破線  $\tau(\xi)$ , 点線  $\pi \operatorname{sgn}(\xi)$ , 実線:  $\tau(\xi) - \pi \operatorname{sgn}(\xi) = \eta(\xi + \pi)$ .

が新しいローパスフィルタになって,  $T_c^\dagger \phi$  の伸張方程式のフーリエ変換版

$$\mathcal{F}[T_c^\dagger \phi](\xi) = m_{0,c}^\dagger(\xi/2) \mathcal{F}[T_c^\dagger \phi](\xi/2)$$

が成立するので,  $V_0^\dagger \subset V_1^\dagger$  が示される. したがって, MRA の条件 1 ( $V_j^\dagger \subset V_{j+1}^\dagger$ ) と条件 2 が成り立つ.

次に,  $V_0^\dagger = \mathcal{H}_c V_0$  であることを示す.  $T_c^\dagger \phi$  と  $\mathcal{H}_c \phi$  のフーリエ変換の関係は,

$$\mathcal{F}[T_c^\dagger \phi](\xi) = e^{-ic\tau(\xi)} \widehat{\phi}(\xi) = e^{-ic\tau(\xi)} e^{ic\pi \operatorname{sgn}(\xi)} \mathcal{F}[\mathcal{H}_c \phi](\xi)$$

である. ここで,

$$e^{-ic\tau(\xi)} e^{ic\pi \operatorname{sgn}(\xi)} = e^{-ic(\tau(\xi) - \pi \operatorname{sgn}(\xi))} = e^{-ic(-\pi + \operatorname{mod}(\xi, 2\pi))}$$

に注目しよう. 図 2 右図の実線が

$$\tau(\xi) - \pi \operatorname{sgn}(\xi) = -\pi + \operatorname{mod}(\xi, 2\pi) = \eta(\xi + \pi)$$

であるから,  $e^{-ic(-\pi + \operatorname{mod}(\xi, 2\pi))}$  は, 絶対値 1 の  $2\pi$  周期関数になるので,

$$e^{-ic(-\pi + \operatorname{mod}(\xi, 2\pi))} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{-ik\xi},$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ic(-\pi + \operatorname{mod}(\xi, 2\pi))} e^{ik\xi} d\xi$$

と展開できる.  $e^{-ic(-\pi + \operatorname{mod}(\xi, 2\pi))}$  の逆数は, 絶対値 1 だから複素共役を取って,

$$e^{ic(-\pi + \operatorname{mod}(\xi, 2\pi))} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{a_k} e^{ik\xi}$$



である。したがって、

$$T_c^\dagger \phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k T_k \mathcal{H}_c \phi, \quad \mathcal{H}_c \phi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{a}_k T_{-k} T_c^\dagger \phi$$

である。  $T_c^\dagger \phi \in \mathcal{H}_c V_0$  かつ  $\mathcal{H}_c \phi \in V_0^\dagger$  が成立する。このことから、  $V_0^\dagger = \mathcal{H}_c V_0$  である。  $\mathcal{H}_c$  は伸張作用素  $\mathcal{D}_{2^{-j}}$  と可換であるから、

$$V_j^\dagger = \mathcal{D}_{2^{-j}} V_0^\dagger = \mathcal{D}_{2^{-j}} \mathcal{H}_c V_0 = \mathcal{H}_c \mathcal{D}_{2^{-j}} V_0 = \mathcal{H}_c V_j.$$

$\mathcal{H}_c$  はユニタリ作用素なので、MRA の条件 4 も成立し、  $\{V_j^\dagger\}_{j \in \mathbb{Z}}$  は MRA を構成する。

最後に、  $T_c^\dagger \phi$  から自然に生成されるウェーブレット関数  $\psi^\dagger$  を考えよう。ハイパスフィルタは、

$$m_{1,c}^\dagger(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_{0,c}^\dagger(\xi + \pi)} = e^{-i\xi} e^{ic\eta(\xi + \pi)} \overline{m_0(\xi + \pi)}$$

である。図 2 右図において、実線 - 破線 = 点線 より、

$$\begin{aligned} \eta(\xi + \pi) - \tau(\xi) &= \begin{cases} -\pi, & (\xi > 0), \\ \pi, & (\xi < 0) \end{cases} \\ &= -\pi \operatorname{sgn}(\xi) \end{aligned}$$

が成立する。したがって、

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}^\dagger(\xi) &= m_{1,c}^\dagger(\xi/2) \mathcal{F}[T_c^\dagger \phi](\xi/2) \\ &= e^{-i\xi/2} e^{ic\eta(\xi/2 + \pi)} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} e^{-ic\tau(\xi/2)} \widehat{\phi}(\xi/2) \\ &= e^{ic(\eta(\xi/2 + \pi) - \tau(\xi/2))} e^{-i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \widehat{\phi}(\xi/2) \\ &= e^{ic(\eta(\xi/2 + \pi) - \tau(\xi/2))} \widehat{\psi}(\xi) \\ &= e^{-ic\pi \operatorname{sgn}(\xi)} \widehat{\psi}(\xi) = \mathcal{F}[\mathcal{H}_c \psi] \end{aligned}$$

が得られる。このことから、  $T_c^\dagger \phi$  から自然に生成されるウェーブレット関数  $\psi^\dagger$  は、  $\mathcal{H}_c \psi$  である。  $\square$

## 4 ローパスフィルタ係数の対応

$2\pi$  周期ローパスフィルタ  $m_0(\xi)$  を式 (3) の形でフーリエ級数展開したときの  $2^{-1/2}e^{-in\xi}$  の展開係数  $\{h_n\}$  をローパスフィルタ係数とよんだ。同様に、ハイパスフィルタ  $m_1(\xi)$  をフーリエ級数展開したときの  $2^{-1/2}e^{-in\xi}$  の展開係数がハイパスフィルタ係数  $\{g_n\}$  であった。これらのフィルタ係数は、離散ウェーブレット変換における離散フィルタに対応するので、その係数値を求めることは重要である。正規直交スケーリング関数  $\phi$  のローパスフィルタ係数から、正規直交スケーリング関数  $T_c^\dagger \phi$  のローパスフィルタ係数を求めるには次の定理 13 を使う。

定理 13. 伸張方程式 (2) で定義される正規直交スケーリング関数  $\phi$  のローパスフィルタ係数を  $\{h_k\}$  とすると,  $\mathcal{T}_c^\dagger \phi$  のローパスフィルタ係数  $\{h_{c,k}^\dagger\}$  とハイパスフィルタ係数  $\{g_{c,k}^\dagger\}$  は, それぞれ

$$h_{c,k}^\dagger = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{k-m} \operatorname{sinc}(m-c), \quad g_{c,k}^\dagger = (-1)^{1-k} \overline{h_{c,1-k}^\dagger}$$

で与えられる. ただし,  $\operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$  である.

定理 13 の証明. 最初に,  $2\pi$  周期関数  $e^{-ic\eta(\xi)}$  の式 (8) の形のフーリエ級数展開を考えよう.  $\xi \in [-\pi, \pi)$  に制限すると,  $\eta(\xi) = \xi$  であるから (図 2 左図参照),

$$e^{-ic\eta(\xi)} = e^{-ic\xi} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{-im\xi}, \quad \xi \in [-\pi, \pi) \quad (8)$$

における展開係数は,

$$a_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ic\xi} e^{im\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-c)\xi} d\xi = \operatorname{sinc}(m-c)$$

である.  $\mathcal{T}_c^\dagger \phi$  のローパスフィルタ  $m_{0,c}^\dagger(\xi)$  は,  $m_0(\xi)$  の展開式 (3) を使うと,

$$\begin{aligned} m_{0,c}^\dagger(\xi) &= e^{-ic\eta(\xi)} m_0(\xi) \\ &= \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{-im\xi} \right] \cdot \left[ 2^{-1/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\xi} \right] \\ &= 2^{-1/2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_m h_n e^{-i(n+m)\xi} \\ &= 2^{-1/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[ \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m h_{k-m} \right] e^{-ik\xi} \end{aligned}$$

である.  $m_{0,c}^\dagger(\xi)$  の  $2^{-1/2} e^{-ik\xi}$  の展開係数であるローパスフィルタ係数  $\{h_{c,k}^\dagger\}$  は,

$$h_{c,k}^\dagger = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m h_{k-m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{k-m} \operatorname{sinc}(m-c)$$

である. 一方, ハイパスフィルタは,  $m_{1,c}^\dagger(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_{0,c}^\dagger(\xi + \pi)}$  であるから, ハイパスフィルタ係数  $\{g_{c,k}^\dagger\}$  は,

$$g_{c,k}^\dagger = (-1)^{1-k} \overline{h_{c,1-k}^\dagger}$$

で与えられる.  $\square$

注意 14. 定理 11 より,  $\phi$  が正規直交スケーリング関数であれば,  $T_c^\dagger \phi$  も正規直交スケーリング関数なので, ローパスフィルタ係数  $\{h_{c,k}^\dagger\}$  およびハイパスフィルタ係数  $\{g_{c,k}^\dagger\}$  は, 内積

$$h_{c,k}^\dagger = \int_{\mathbb{R}} (T_c^\dagger \phi)(x) \overline{2^{1/2}(T_c^\dagger \phi)(2x-k)} dx,$$

$$g_{c,k}^\dagger = \int_{\mathbb{R}} (\mathcal{H}_c \psi)(x) \overline{2^{1/2}(T_c^\dagger \phi)(2x-k)} dx$$

を使って計算できる.

## 5 双直交ウェーブレットの場合

定義 15.  $\psi, \tilde{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$  が次の 2 条件を満たすとき, 双直交ウェーブレット関数とよぶ.

1.  $\{\psi_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$  と  $\{\tilde{\psi}_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$  がそれぞれ  $L^2(\mathbb{R})$  のリース基底を構成する.
2. 次の双直交条件を満たす.

$$\langle \psi_{j_1, k_1}, \tilde{\psi}_{j_2, k_2} \rangle = \delta_{j_1, j_2} \delta_{k_1, k_2}, \quad \forall j_1, j_2, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \quad (9)$$

このとき, 任意の  $f \in L^2(\mathbb{R})$  は,

$$f = \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j, k} \rangle \tilde{\psi}_{j, k} = \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \langle f, \tilde{\psi}_{j, k} \rangle \psi_{j, k} \quad (10)$$

で展開できる.

$\mathcal{H}_c$  は平行移動作用素と伸張作用素と可換なユニタリ作用素であったから,  $(\mathcal{H}_c \psi)_{j, k} = \mathcal{H}_c(\psi_{j, k})$  より, 次の命題 16 が成立する.

命題 16. 組  $\psi, \tilde{\psi}$  が双直交ウェーブレット関数ならば, 組  $\mathcal{H}_c \psi, \mathcal{H}_c \tilde{\psi}$  も双直交ウェーブレット関数である.

双直交多重解像度解析の定義は, 次の通りである.

定義 17.  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間の列  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  がそれぞれ MRA を構成し, それぞれのスケーリング関数  $\phi(x) \in V_0, \tilde{\phi}(x) \in \tilde{V}_0$  が次のスケーリング関数の双直交条件

$$\langle \phi(\cdot - k), \tilde{\phi}(\cdot - m) \rangle = \delta_{k, m} \quad (11)$$

を満たすとき,  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}, \{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  を双直交多重解像度解析 (biorthogonal multiresolution analysis) とよぶ.  $\phi, \tilde{\phi}$  の組を双直交スケーリング関数とよぶ.

$\phi \in V_0 \subset V_1$  より,  $\phi$  を  $V_1$  のリース基底  $\{2^{1/2}\phi(2x-n)\}$  で展開できる. 同様に  $\tilde{\phi}$  も  $\tilde{V}_1$  のリース基底  $\{2^{1/2}\tilde{\phi}(2x-n)\}$  で展開できる. つまり,

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n 2^{1/2} \phi(2x-n), \quad \tilde{\phi}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_n 2^{1/2} \tilde{\phi}(2x-n).$$

この展開式をツースケール方程式または伸張方程式とよぶ. ローパスフィルタ係数とよばれる展開係数  $\{h_n\}$  と  $\{\tilde{h}_n\}$  を双直交スケーリング関数から求めるには, 双直交条件式 (11) を使って,

$$h_n = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \overline{2^{1/2}\tilde{\phi}(2x-n)} dx, \quad \tilde{h}_n = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(x) \overline{2^{1/2}\phi(2x-n)} dx.$$

伸張方程式の両辺をフーリエ変換して,

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\xi) &= m_0(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2), & \hat{\tilde{\phi}}(\xi) &= \tilde{m}_0(\xi/2) \hat{\tilde{\phi}}(\xi/2), \\ m_0(\xi) &= 2^{-1/2} \sum_n h_n e^{-in\xi}, & \tilde{m}_0(\xi) &= 2^{-1/2} \sum_n \tilde{h}_n e^{-in\xi} \end{aligned}$$

を得る. ローパスフィルタ  $m_0(\xi)$ ,  $\tilde{m}_0(\xi)$  は  $2\pi$  周期の  $L^2([0, 2\pi))$  関数である. ここで, ハイパスフィルタを

$$m_1(\xi) = e^{-i\xi} \overline{\tilde{m}_0(\xi + \pi)}, \quad \tilde{m}_1(\xi) = e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi + \pi)}$$

で定義する. さらに関数  $\psi, \tilde{\psi}$  を

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2), \quad \hat{\tilde{\psi}}(\xi) = \tilde{m}_1(\xi/2) \hat{\tilde{\phi}}(\xi/2)$$

で定義する. このとき,  $\psi, \tilde{\psi}$  が次の条件 18 を満たせば, 双直交ウェーブレット関数になる.

条件 18. 正定数  $A, \tilde{A}$  が取れて, 全ての  $f \in L^2(\mathbb{R})$  に対して,

$$\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \leq A \|f\|^2, \quad \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle|^2 \leq \tilde{A} \|f\|^2$$

が成立する.

この  $\psi, \tilde{\psi}$  を, 双直交スケーリング関数  $\phi, \tilde{\phi}$  から自然に生成された双直交ウェーブレット関数とよぶ.

注意 19.  $j \in \mathbb{Z}$  を固定する毎に,  $\{\psi_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  は  $W_j = \overline{\text{span}}_k \psi_{j,k}$  のリース基底になり,  $\{\tilde{\psi}_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$  は  $\tilde{W}_j = \overline{\text{span}}_k \tilde{\psi}_{j,k}$  のリース基底になっている. さらに,  $\overline{\text{span}}\{\psi_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\} = \overline{\text{span}}\{\tilde{\psi}_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\} = L^2(\mathbb{R})$  が成立する. しかしながら,  $\{\psi_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}, \{\tilde{\psi}_{j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$  がリース基底の定義 9 の条件 2 を満たすとは

限らない。リース基底になるためには、条件 18 が必要である。この条件 18 は、リース基底の定義 9 の条件式 (1) の左側の不等号である。式 (1) の右側の不等号は、条件 18 と双直交条件 (9) から導ける。実際、

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \langle f, f \rangle = \left\langle \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \tilde{\psi}_{j,k}, \sum_{j',k'} \langle f, \tilde{\psi}_{j',k'} \rangle \psi_{j',k'} \right\rangle = \sum_{j,k} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \overline{\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle} \\ &\leq \sqrt{\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2} \sqrt{\sum_{j,k} |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle|^2} \leq \sqrt{\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2} \sqrt{\tilde{A} \|f\|^2}. \end{aligned}$$

ただし、最初の不等式はコーシーシュワルツ不等式である。したがって、

$$\|f\| \leq \tilde{A}^{1/2} \sqrt{\sum_{j,k} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2}$$

となり、リース基底の定義 9 の条件式 (1) の右側の不等式が  $e_\lambda = \psi_{j,k}$  で示された。

また、Daubechies [4, Theorem 8.3.1] によれば、双直交スケーリング関数  $\phi, \tilde{\phi}$  がコンパクトサポートを持ち、かつ  $\phi, \tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$  であれば、自然に生成された  $\psi, \tilde{\psi}$  は双直交ウェーブレット関数になる。

正規直交ウェーブレットの場合の定理 11 および定理 13 とほとんど同じ証明を用いると、双直交ウェーブレットに関する次の定理 20 と定理 21 が成立する。

**定理 20.** 組  $\phi, \tilde{\phi}$  を双直交スケーリング関数とし、 $\phi, \tilde{\phi}$  から自然に生成される双直交ウェーブレット関数を  $\psi, \tilde{\psi}$  とする。このとき以下が成立する。

- (1)  $\mathcal{H}_c \phi, \mathcal{H}_c \tilde{\phi}$  の組は双直交スケーリング関数になる。 $\mathcal{H}_c \psi, \mathcal{H}_c \tilde{\psi}$  は、 $\mathcal{H}_c \phi, \mathcal{H}_c \tilde{\phi}$  から自然に生成される双直交ウェーブレット関数である。
- (2)  $T_c^\dagger \phi, T_c^\dagger \tilde{\phi}$  の組は双直交スケーリング関数になる。 $\mathcal{H}_c \psi, \mathcal{H}_c \tilde{\psi}$  は、 $T_c^\dagger \phi, T_c^\dagger \tilde{\phi}$  から自然に生成される双直交ウェーブレット関数である。

**定理 21.** 双直交スケーリング関数  $\phi, \tilde{\phi}$  のローパスフィルタ係数を  $\{h_k\}, \{\tilde{h}_k\}$  とすると、 $T_c^\dagger \phi, T_c^\dagger \tilde{\phi}$  のローパスフィルタ係数  $\{h_{c,k}^\dagger\}, \{\tilde{h}_{c,k}^\dagger\}$  は、

$$h_{c,k}^\dagger = \sum_{m \in \mathbb{Z}} h_{k-m} \operatorname{sinc}(m-c), \quad \tilde{h}_{c,k}^\dagger = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{k-m} \operatorname{sinc}(m-c)$$

で与えられる。このとき、 $T_c^\dagger \phi, T_c^\dagger \tilde{\phi}$  から自然に生成される双直交ウェーブレット関数  $\mathcal{H}_c \psi, \mathcal{H}_c \tilde{\psi}$  のハイパスフィルタ係数  $\{g_{c,k}^\dagger\}, \{\tilde{g}_{c,k}^\dagger\}$  は、

$$g_{c,k}^\dagger = (-1)^{1-k} \overline{\tilde{h}_{c,1-k}^\dagger}, \quad \tilde{g}_{c,k}^\dagger = (-1)^{1-k} \overline{h_{c,1-k}^\dagger}$$

で与えられる。

## 6 スケーリング関数とウェーブレット関数のグラフ

図 3 に、ウェーブレット関数  $\psi$  を実線で、そのヒルベルト変換  $\mathcal{H}\psi$  を破線で描く。ウェーブレット関数としては、次の 4 種類を選んだ。

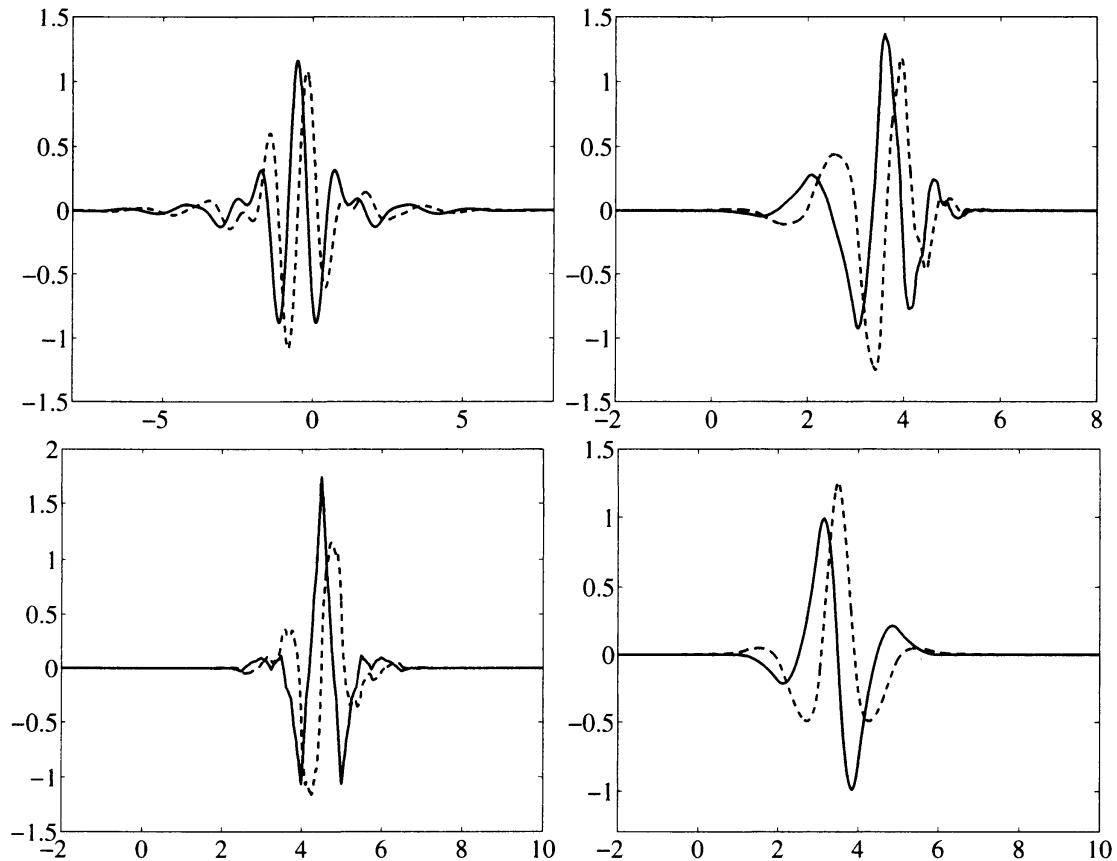


図 3: ウェーブレット関数  $\psi$  : 実線とそのヒルベルト変換  $\mathcal{H}\psi$  : 破線, 左上: メイエ, 右上: db4, 左下: bior4.4, 右下: rbio3.3.

図 3 左上図は、メイエの正規直交ウェーブレット関数 [4] を描いた。このウェーブレット関数は、周波数空間でコンパクトサポートを持ち、全ての次数のモーメントが 0 であり、無限遠点であらゆる多項式より速く減衰する。

図 3 右上図は、ドブシーのコンパクトサポートを持つ正規直交ウェーブレット関数 [4] の族の一つ db4 である。このウェーブレット関数は、パラメータ  $N \in \mathbb{N}$  に対して、サポートが  $[0, 2N - 1]$  であり、 $(N - 1)$  次までのモーメントが 0 であり、ローパスフィルタ長が  $2N$  である。このスケーリング関数やウェーブレット関数を、MATLAB の表記に準じて、db $N$  と記述する。

図 3 左下図は、Cohen-Daubechies-Feauveau's biorthogonal wavelets [3] とよばれているものであり、略して CDF 双直交ウェーブレットとよぶ。図は、MATLAB では bior4.4 とよばれているもので、分解・再構成用のローパスフィルタ長が 9、

7である。

図3右下図もCDF双直交ウェーブレットであり，MATLABでrbio3.3とよばれているものである。双直交スケール関数 $\phi$ が，2次Bスプライン関数(を右に2平行移動)であり，双直交ウェーブレット関数 $\psi$ も，2次スプラインである。

図3から，ウェーブレット関数のヒルベルト変換も無限遠点での減衰性が良いことがわかる。

一方，対応するスケール関数 $\phi$ を実線で，そのヒルベルト変換 $\mathcal{H}\phi$ を破線で， $\mathcal{T}_{1/2}^{\dagger}\phi$ を点線で描くと図4を得る。ヒルベルト変換像 $\mathcal{H}\phi$ の無限遠点での減衰性が悪いことがわかる。他方， $\mathcal{T}_{1/2}^{\dagger}\phi$ は減衰性が良いことがわかる。メイエのスケール関数の場合には， $\mathcal{T}_c^{\dagger}\phi = \mathcal{T}_c\phi$ が成立する。

スケール関数 $\mathcal{T}_c^{\dagger}\phi$ とウェーブレット関数 $\mathcal{H}_c\psi$ のより詳しい評価は，文献[1]を参照せよ。

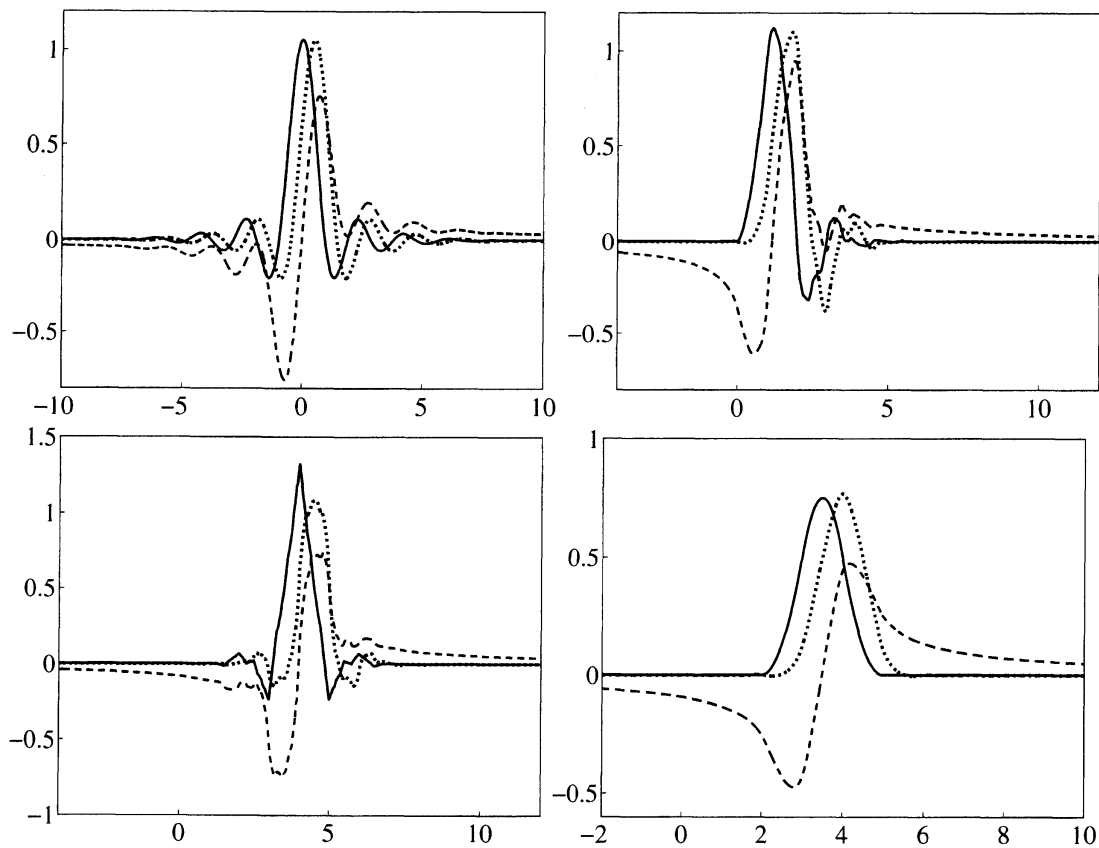


図4: スケール関数 $\phi$ : 実線とそのヒルベルト変換 $\mathcal{H}\phi$ : 破線と $\mathcal{T}_{1/2}^{\dagger}\phi$ : 点線。左上: メイエ, 右上: db4, 左下: bior4.4, 右下: rbio3.3。

## 7 ローパスフィルタ係数の近似誤差

コンパクトサポートを持つスケーリング関数  $\phi$ , ウェーブレット関数  $\psi$  に対して,  $\mathcal{H}_c\phi, \mathcal{H}_c\psi, T_c^\dagger\phi$  は, コンパクトサポートにならない. また, 有限長ローパスフィルタ係数  $\{h_k\}, \{\tilde{h}_k\}$  に対して, 定理 21 によって得られるローパスフィルタ係数  $\{h_{c,k}^\dagger\}, \{\tilde{h}_{c,k}^\dagger\}$  は無限長になる. そこで, ローパスフィルタ係数を有限長でカットオフしたときの離散ウェーブレット変換・逆変換による誤差を計算しよう.

元のローパスフィルタ係数のフィルタ長より, 両側に 4 個ずつフィルタ長を増やして, 有限長で切った  $\{h_{c,k}^\dagger\}, \{\tilde{h}_{c,k}^\dagger\}$  を用いて, レベル 8 まで, 離散ウェーブレット変換・逆変換を行って得られた再構成信号と元信号の誤差を測る. 各フィルタ係数のフィルタ長は, 表 1 にある. 長さ  $2^{16}$  の元信号  $\{a_n\}$  は,

$$a_n = 2\delta_{n,2^{15}} + v_n, \quad n = 1, 2, \dots, 2^{16}$$

である. ただし,  $v_n$  は  $[-1/2, 1/2]$  の一様乱数である. つまり, 数列の midpoint で値 2 を取り, 他は 0 の数列にランダムノイズを加えたものを元信号とする. 離散ウェーブレット変換・逆変換は周期境界条件で行った.

各  $c, 0.05 \leq c \leq 0.95$  に対して, 元信号を 10 回発生させて SNR の平均を計算し, 横軸  $c$  に対して SNR の平均を縦軸にプロットすると, 図 5 を得る. 図 5 の実線・破線・点線・一点鎖線とフィルタの対応は, 表 1 である.

**注意 22.** 元信号  $a = \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  と再構成信号  $s = \{s_n\}$  の間の SNR (信号雑音比) は,

$$\text{SNR} = 20 * \log_{10} \left( \frac{\|a\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}}{\|a - s\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}} \right) \quad [\text{dB}]$$

で与えられる. ただし,  $\|a\|_{\ell^2(\mathbb{Z})}$  は信号  $a$  の  $\ell^2$  ノルムである.

左上図は, ドブシーのコンパクトサポートを持つウェーブレットで db3, db4, db5, db6 を描いた.

右上図は, コアフマンのコンパクトサポートを持つ正規直交ウェーブレット (Coiflet) で, coif2, coif4, coif6, coif8 を描いた. パラメータ  $N \in \mathbb{N}$  に対して, coif $N$  は, 正規直交ウェーブレット関数が  $(N-1)$  次までのモーメントが消えていてかつ正規直交スケーリング関数の 1 から  $(N-1)$  次までのモーメントが消えているように作られている.  $N$  に対して, フィルタ長は  $6N$  であり,  $6N$  個のフィルタ係数による連立 2 次方程式を精度良く解かないとフィルタ係数が求まらないので, 秦野 [10] からダウンロードした係数を用いた.

左下図の双直交 I は, CDF 双直交ウェーブレットで, MATLAB において, bior2.2, bior3.3, bior4.4, bior5.5 として実装されているものを使った.

右下図の双直交 II も, CDF 双直交ウェーブレットで, 分解・再構成用のローパスフィルタ係数の長さになるべく等しくなるよう (実際は, 分解用が 2 長い) に分配した組み合わせの中から, フィルタ係数の 2 乗和の合計が一番小さくなる



(正規直交の場合, ローパスフィルタの 2 乗和は 1 になり, このときの合計 2 が下限になる) 組み合わせを選んだ場合である. このウェーブレットを biorLN と記述する. biorL4 は MATLAB の bior4.4 と, biorL5 は MATLAB の rbio5.5 とそれぞれ一致する. グラフは, biorL6, biorL9, biorL12, biorL15 を描いた.

これらのグラフから, 元のローパスフィルタ長より左右に 4 個ずつフィルタを増やしたローパスフィルタ係数を用いた数値計算の誤差は十分小さいことがわかる.

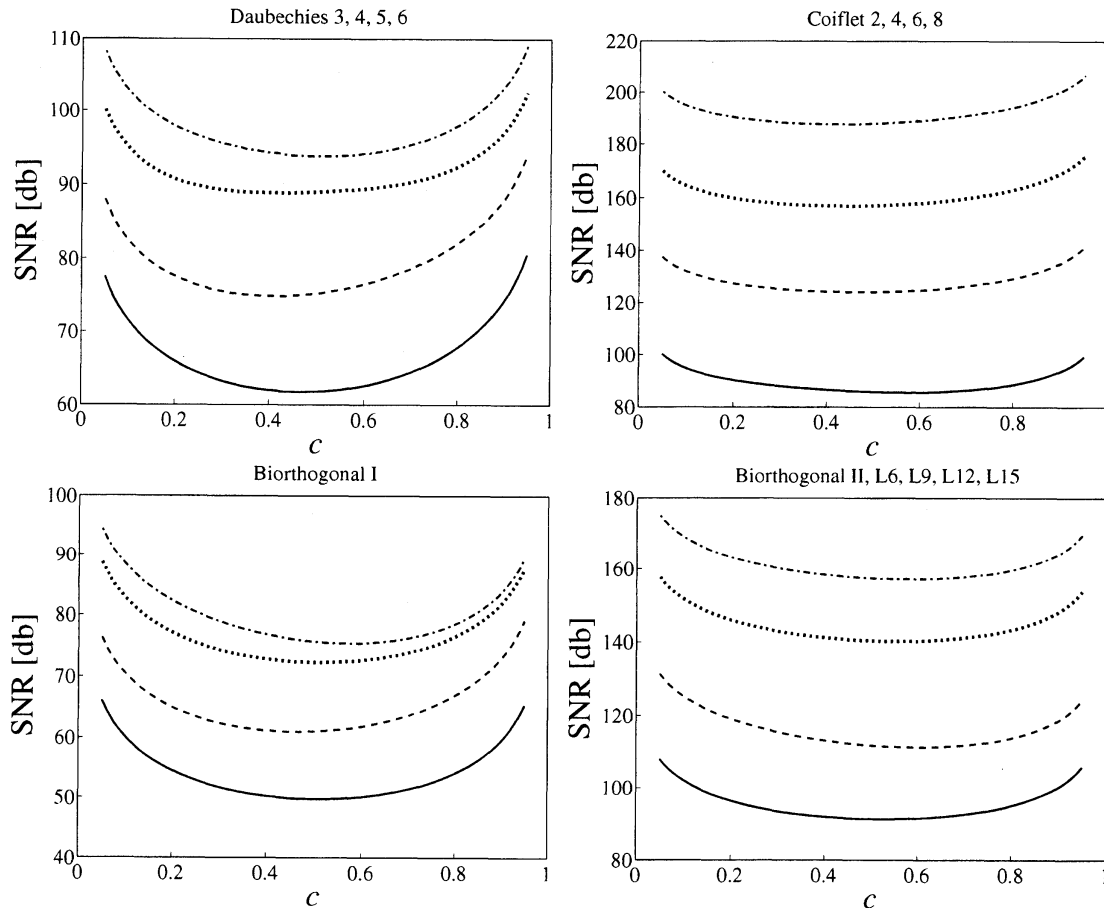


図 5: 有限長  $\{h_{c,k}^\dagger\}, \{\tilde{h}_{c,k}^\dagger\}$  フィルタによる離散ウェーブレット変換・逆変換の誤差. 左上: ドブシー, 右上: コアフマン, 左下: 双直交 I, 右下: 双直交 II, 詳しくは表 1 参照.

## 8 $N$ 分木離散ウェーブレット変換

自然数  $N$  と実数  $0 \leq c < \frac{1}{N}$  を選ぶ. 定数  $c_n = c + n/N, n = 0, \dots, N-1$  をとる. 定理 20 より, 双直交スケーリング関数  $\phi, \tilde{\phi}$  に対して,  $T_{c_n}^\dagger \phi, T_{c_n}^\dagger \tilde{\phi}$  も双直

表 1: 図 5 の SNR グラフのウェーブレット名とそのフィルタ長.

図 5 配置	グラフの線種	ウェーブレット name	元のフィルタ長		フィルタ長	
			$\#\{h_k\}$	$\#\{\tilde{h}_k\}$	$\#\{h_{c,k}^\dagger\}$	$\#\{\tilde{h}_{c,k}^\dagger\}$
左 上 ブ シ ー	実線	db3	6	6	14	14
	破線	db4	8	8	16	16
	点線	db5	10	10	18	18
	一点鎖線	db6	12	12	20	20
右 上 ア フ マ ン	実線	coif2	12	12	20	20
	破線	coif4	24	24	32	32
	点線	coif6	36	36	44	44
	一点鎖線	coif8	48	48	56	56
左 下 双 直 交 I	実線	bior2.2	5	3	13	11
	破線	bior3.3	8	4	16	12
	点線	bior4.4	9	7	17	15
	一点鎖線	bior5.5	9	11	17	19
右 下 双 直 交 II	実線	biorL6	13	11	21	19
	破線	biorL9	19	17	27	25
	点線	biorL12	25	23	33	31
	一点鎖線	biorL15	31	29	39	37

交スケーリング関数である. リース基底  $\{T_{c_n}^\dagger \tilde{\phi}(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  で張られる空間  $T_{c_n}^\dagger \tilde{V}_0$  への射影作用素  $P_{c_n}$

$$P_{c_n} f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, T_{c_n}^\dagger \phi(\cdot - k) \rangle T_{c_n}^\dagger \tilde{\phi}(x - k), \quad f(x) \in L^2(\mathbb{R})$$

を考える. 数列  $\{\langle f, T_{c_n}^\dagger \phi(\cdot - k) \rangle \mid k \in \mathbb{Z}\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  は, 双直交スケーリング関数  $T_{c_n}^\dagger \phi, T_{c_n}^\dagger \tilde{\phi}$  と対応する双直交ウェーブレット関数  $\mathcal{H}_{c_n} \psi, \mathcal{H}_{c_n} \tilde{\psi}$  から求められるローパスフィルタ係数とハイパスフィルタ係数を用いた離散ウェーブレット変換・逆変換が可能である.

次に,  $N$  個の  $c_n, n = 0, \dots, N-1$  に対して,  $P_{c_n} f$  の平均を取る作用素  $P_c^N$

$$P_c^N f = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, T_{c_n}^\dagger \phi(\cdot - k) \rangle T_{c_n}^\dagger \tilde{\phi}(x - k) \right] \quad (12)$$

を考えよう. Toda-Zhang [8], 戸田・章 [9], 萬代 [11] によれば, もし  $\text{supp } \widehat{\phi} \subset [-2\pi, 2\pi]$ ,  $\text{supp } \widehat{\phi} \subset [-2\pi, 2\pi]$  で  $N \geq 2$  であれば, 作用素  $P_c^N$  が平行移動不変になる. また, このとき,  $P_c^N f$  は  $N \geq 2$  であれば,  $N$  に依らない.

そこで, 数列  $\{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  に対して, ある  $f \in L^2(\mathbb{R})$  を対応させて, 式 (12) のスケーリング係数列

$$\{b_k^n = \langle f, \mathcal{T}_{c_n}^\dagger \phi(\cdot - k) \rangle \mid k \in \mathbb{Z}\}_{n=0, \dots, N-1}$$

を定めることができれば, 各  $n = 0, \dots, N-1$  毎に  $\{b_k^n\}_{k \in \mathbb{Z}}$  をローパスフィルタ係数  $\{h_{c_n, k}^\dagger\}$ ,  $\{\widetilde{h}_{c_n, k}^\dagger\}$  とハイパスフィルタ係数  $\{g_{c_n, k}^\dagger\}$ ,  $\{\widetilde{g}_{c_n, k}^\dagger\}$  を用いて, 離散ウェーブレット変換できる. 数列  $\{a_k\}$  から  $N$  種類の離散ウェーブレット変換の対応として, 次の  $N$  分木離散ウェーブレット変換を定義する.

## 8.1 $N$ 分木離散ウェーブレット変換・逆変換のアルゴリズム

数列  $\{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  に対する  $N$  分木離散ウェーブレット変換は, 数列を  $N$  重にする前処理とそれぞれ  $N$  通りの離散ウェーブレット変換からなる. 逆  $N$  分木離散ウェーブレット変換は, それぞれ  $N$  通りの逆離散ウェーブレット変換とその係数から元の数列を作成する後処理に分けられる.

最初に, 双直交スケーリング関数  $\phi$ ,  $\widetilde{\phi}$  と自然に生成されるウェーブレット関数  $\psi$ ,  $\widetilde{\psi}$  を固定する. 自然数  $N$  と実数  $0 \leq c < \frac{1}{N}$  を選ぶ. また, 定数  $c_n = c + n/N$ ,  $n = 0, \dots, N-1$  とおく.

**定義 23** (前処理). 前処理を行う作用素  $\text{Pre} : \ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow (\ell^2(\mathbb{Z}))^N$

$$\left( \{b_k^n\}_k \right)_{n=0}^{N-1} = \text{Pre}(\{a_k\}_k)$$

を以下で定義する.

1. 数列  $\{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  を sinc 関数で補間する.

$$f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \text{sinc}(x - k).$$

2. 補間関数  $f(x)$  から点  $x = k + c_n$ ,  $n = 0, \dots, N-1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  での値を取り出す.

$$b_k^n = f(k + c_n), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n = 0, \dots, N-1.$$

次に,  $n = 0, \dots, N-1$  種類の数列  $\{b_k^n\}_{k \in \mathbb{Z}}$  をスケーリング関数  $\mathcal{T}_{c_n}^\dagger \phi$  とウェーブレット関数  $\mathcal{H}_{c_n} \psi$  に基づく離散ウェーブレット変換でレベル  $J(< 0)$  まで分解する. 初期レベルを 0 に取り, 分解するにつれてレベルが減るように取る.

**定義 24** (離散ウェーブレット変換).  $n = 0, \dots, N-1$  に対して, レベル 0 の近似係数  $\{b_k^{0,n}\}_{k \in \mathbb{Z}} := \{b_k^n\}_{k \in \mathbb{Z}}$  を定義する. レベル  $j$  の近似係数  $\{b_k^{j,n}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  と詳細係数  $\{d_k^{j,n}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  はレベル  $j+1$  の近似係数  $\{b_m^{j+1,n}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  から

$$\begin{aligned} b_k^{j,n} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{h_{c_n, m}^\dagger} b_{m+2k}^{j+1,n} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{h_{c_n, m-2k}^\dagger} b_m^{j+1,n}, \\ d_k^{j,n} &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{g_{c_n, m}^\dagger} b_{m+2k}^{j+1,n} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{g_{c_n, m-2k}^\dagger} b_m^{j+1,n} \end{aligned}$$

で計算する. ただし,  $j = -1, \dots, J$ . このとき

$$(\ell^2(\mathbb{Z}))^N \rightarrow \left( (\ell^2(\mathbb{Z}))^{-J+1} \right)^N$$

の対応

$$\left( \{b_k^{0,n}\}_k \right)_{n=0, \dots, N-1} \mapsto \left( \left\{ \{d_k^{-1,n}\}_k, \dots, \{d_k^{J,n}\}_k; \{b_k^{J,n}\}_k \right\} \right)_{n=0, \dots, N-1}$$

をレベル  $J$  の離散ウェーブレット変換とよぶ.

**定義 25** ( $N$  分木離散ウェーブレット変換). 前処理と離散ウェーブレット変換をあわせた, 数列  $\{a_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  から, レベル  $J$  の離散ウェーブレット変換への対応

$$\begin{aligned} \ell^2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \left( (\ell^2(\mathbb{Z}))^{-J+1} \right)^N, \\ \{a_k\} &\mapsto \left( \left\{ \{d_k^{-1,n}\}_k, \dots, \{d_k^{J,n}\}_k; \{b_k^{J,n}\}_k \right\} \right)_{n=0, \dots, N-1} \end{aligned}$$

をレベル  $J$  の  $N$  分木離散ウェーブレット変換とよぶ.

この後,  $n = 0, \dots, N-1$  に対応する各詳細係数  $\{d_k^{j,n}\}_k$ ,  $j = -1, \dots, J$  とレベル  $J$  の近似係数  $\{b_k^{J,n}\}_k$  に対して, ノイズ除去・エッジ抽出・透かし埋め込み・圧縮などのデータ処理を行う.

**定義 26** (逆離散ウェーブレット変換).  $n = 0, \dots, N-1$  に対して, レベル  $j$  の近似係数  $\{b_k^{j,n}\}_k$  と詳細係数  $\{d_k^{j,n}\}_k$  からレベル  $j+1$  の近似係数  $\{b_m^{j+1,n}\}_m$  は,

$$b_m^{j+1,n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{c_n, m-2k}^\dagger b_k^{j,n} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{c_n, m-2k}^\dagger d_k^{j,n}$$

で得られる. ただし,  $j = J, \dots, -1$ . このとき対応

$$\begin{aligned} \left( (\ell^2(\mathbb{Z}))^{-J+1} \right)^N &\rightarrow (\ell^2(\mathbb{Z}))^N, \\ \left( \left\{ \{d_k^{-1,n}\}_k, \dots, \{d_k^{J,n}\}_k; \{b_k^{J,n}\}_k \right\} \right)_{n=0, \dots, N-1} &\mapsto \left( \{b_k^{0,n}\}_k \right)_{n=0, \dots, N-1} \end{aligned}$$

をレベル  $J$  の逆離散ウェーブレット変換とよぶ.

最後に後処理を定義しよう.

**定義 27** (後処理).  $N$  種類のレベル 0 の近似係数  $(\{b_k^{0,n}\}_k)_{n=0,\dots,N-1}$  に対して, 点  $x = k + c_n$  で値  $b_k^{0,n}$  を取る補間関数

$$f(x) := \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^{0,n} \operatorname{sinc}(N(x - (k + c_n)))$$

を作る.  $f$  を  $[-\pi, \pi]$  に帯域制限した関数

$$\tilde{f} = \mathcal{F}^{-1} \left[ \hat{f}(\xi) \times \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) \right]$$

を用いて, 数列  $\{a_k\}$  を

$$a_k = \tilde{f}(k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

で定義する.

**定義 28** (逆  $N$  分木離散ウェーブレット変換). 逆離散ウェーブレット変換と後処理をあわせた, レベル  $J$  の離散ウェーブレット変換の係数から数列  $\{a_k\}$  への対応

$$\begin{aligned} & \left( (\ell^2(\mathbb{Z}))^{-J+1} \right)^N \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \\ & \left( \left\{ \{d_k^{-1,n}\}_k, \dots, \{d_k^{J,n}\}_k; \{b_k^{J,n}\}_k \right\} \right)_{n=0,\dots,N-1} \mapsto \{a_k\} \end{aligned}$$

をレベル  $J$  の逆  $N$  分木離散ウェーブレット変換とよぶ.

データ処理を行わない場合には, 後処理で得られた数列  $\{a_k\}$  は, 計算誤差を除いて, 最初の数列と一致する.

**注意 29.**  $N = 1$  とすると, 普通の離散ウェーブレット変換になる. この場合には, スケーリング関数  $\phi(x - k)$  の展開係数として, 信号  $f(x)$  と  $\phi(x - k)$  との内積  $\langle f, \phi(\cdot - k) \rangle$  ではなく,  $f(x)$  の点  $x = k$  での値  $f(k)$  そのものを係数としていた. 式 (12) の  $N$  個の射影の平均の場合には,  $\mathcal{T}_{c_n}^\dagger \phi(x - k)$  の係数は, 内積

$$\langle f, \mathcal{T}_{c_n}^\dagger \phi(\cdot - k) \rangle = \langle \mathcal{T}_{-c_n}^\dagger f, \phi(\cdot - k) \rangle = \langle \mathcal{T}_{-c_n} f, \phi(\cdot - k) \rangle = \langle f(\cdot + c_n), \phi(\cdot - k) \rangle$$

となる. ただし, 信号  $f$  は数列を sinc 関数で補間したので,  $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-\pi, \pi]$  である. この場合  $\mathcal{T}_{-c_n}^\dagger f = \mathcal{T}_{-c_n} f$  となることを用いた. 定義 23 で提案した前処理では, 内積  $\langle f, \mathcal{T}_{c_n}^\dagger \phi(\cdot - k) \rangle$  の代わりに, 信号  $f(x + c_n)$  の点  $x = k$  での関数値  $f(k + c_n)$  を用いた.

メイエの正規直交スケーリング関数  $\phi$  とその平行移動に関しては, Toda-Zhang [8], 戸田・章 [9] がより良い前処理・後処理を提案している. メイエの正規直交ウェーブレットの場合を用いた  $N$  分木離散ウェーブレット変換は, [6] 参照.

## 8.2 近似と詳細のシフト不変性について

$N$  分木離散ウェーブレット変換で、レベル  $J (< 0)$  まで分解し、レベル  $J$  の近似係数  $\{b_k^{J,n}\}_{k \in \mathbb{Z}, n = 0, \dots, N-1}$  以外の係数を全て 0 において、逆  $N$  分木離散ウェーブレット変換して得られる数列をレベル  $J$  の近似とよぶ。同様に、レベル  $J$  の詳細係数  $\{d_k^{J,n}\}_{k \in \mathbb{Z}, n = 0, \dots, N-1}$  以外の係数を全て 0 において、逆  $N$  分木離散ウェーブレット変換して得られる数列をレベル  $J$  の詳細とよぶ。

文献 [2] で考察した「時間遅れの入ったブラインド信号源分離問題」では、音源位置やマイク位置により複数の観測信号源に含まれる信号源の位相が異なるので、問題解法のためのウェーブレット変換にシフト不変性が求められる。文献 [2] では、解析ウェーブレット変換という連続ウェーブレット変換（信号との畳み込み積なので平行移動不変性を持つ）を用いた。計算量を減らし、逆変換が可能な  $N$  分木離散ウェーブレット変換を用いる解法を考える場合には、近似や詳細がシフト不変性を持つことが望まれる。普通の離散ウェーブレット変換では、ダウンサンプリングが計算過程で含まれているので、近似や詳細がシフト不変性を持つことはあり得ない。一方で、メイエを用いた 2 分木離散ウェーブレット変換の近似や詳細がシフト不変性を持つことが示されている [9, 8]。

本小節では、メイエ、ドブシー、コアフマン、CDF 双直交ウェーブレットに対して、近似と詳細が数値的にシフト不変性を持つかどうかを調べる。実験条件は、256 点からなるデータ列で、一カ所だけ 1、その他 0 の数列

$$\{a_n^{(\ell)} = \delta_{n,\ell}\}_{n=1,\dots,256}, \quad \ell = 20, 21, \dots, 27$$

を 8 パターン作る。この  $\{a_n^{(\ell)}\}$  のレベル  $J = -3$  の詳細 8 パターンを一つのグラフに描く（横軸の範囲は  $n = 1, \dots, 50$  である）。詳細がシフト不変に近ければ、グラフは同じ形の波の平行移動になる。

メイエのウェーブレットで、 $c = 0.1$  に固定して、 $N = 1, N = 2, N = 5, N = 7$  の場合にレベル  $-3$  の詳細を 8 パターン描くと、図 6 を得る。通常の離散ウェーブレット変換 ( $N = 1$ ) 以外は、詳細が同じ概形のグラフの平行移動になっているので、シフト不変になっている。 $N \geq 2$  では、 $N$  による差は無い。

次に、 $c = 0.1$  で固定し、いろいろなウェーブレット関数を用いた 2 分木離散ウェーブレット変換のレベル  $-3$  の詳細 8 パターンを描いたグラフが図 7 である。上の図がドブシーの正規直交ウェーブレットの場合で、左側が db4（フィルタ長  $8 + 8 = 16$ ）で右側が db8（フィルタ長  $16 + 8 = 24$ ）である。ドブシーの正規直交スケール関数は、フィルタ長が長くなるとシャノンのスケール関数に近づくので、シフト不変に近くなる。レベル  $-3$  の詳細では db10 位で、8 パターンによる差が目視できなくなる。

コアフマンの正規直交ウェーブレットの場合は、左中の図が Coiflet 3（フィルタ長  $18 + 8 = 26$ ）、右中が Coiflet 7（フィルタ長  $42 + 8 = 50$ ）である。Coiflet もフィルタ長が長くなるとシフト不変に近くなる。

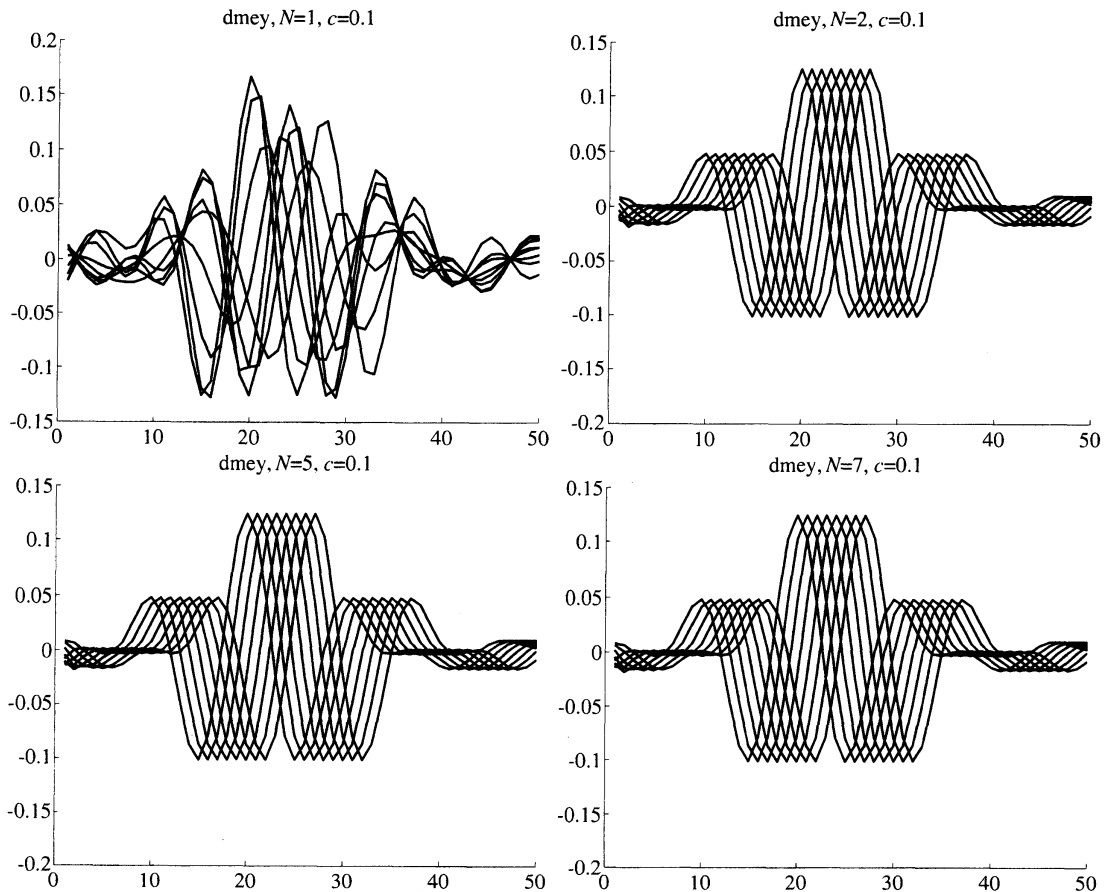


図 6: メイエの正規直交ウェーブレットを用いた  $N$  分木離散ウェーブレット変換のレベル  $-3$  の詳細.  $c = 0.1$  で固定. 左上:  $N = 1$ , 右上:  $N = 2$ , 左下:  $N = 5$ , 右下:  $N = 7$ .

下の図が CDF 双直交ウェーブレットの場合である. 左下図が biorL5, つまり, MATLAB の rbio5.5 の場合である. 右下図は, biorL20 である. CDF 双直交の場合もフィルタ長が長くなるとシフト不変に近くなる.

メイエ以外の場合も,  $N = 1$  と  $N = 2$  では近似と詳細の概形が全く異なるが,  $N \geq 2$  では, あまり差が見られなかった. このことから, 定義 23 の前処理と定義 27 の後処理をより適切に設計する必要があると思われる.

## 9 まとめと今後の課題

本論文では, 以下のことを行った.

1. 双直交ウェーブレット関数の分数べきヒルベルト変換を生成する良い性質を持つ双直交スケーリング関数を構成した.

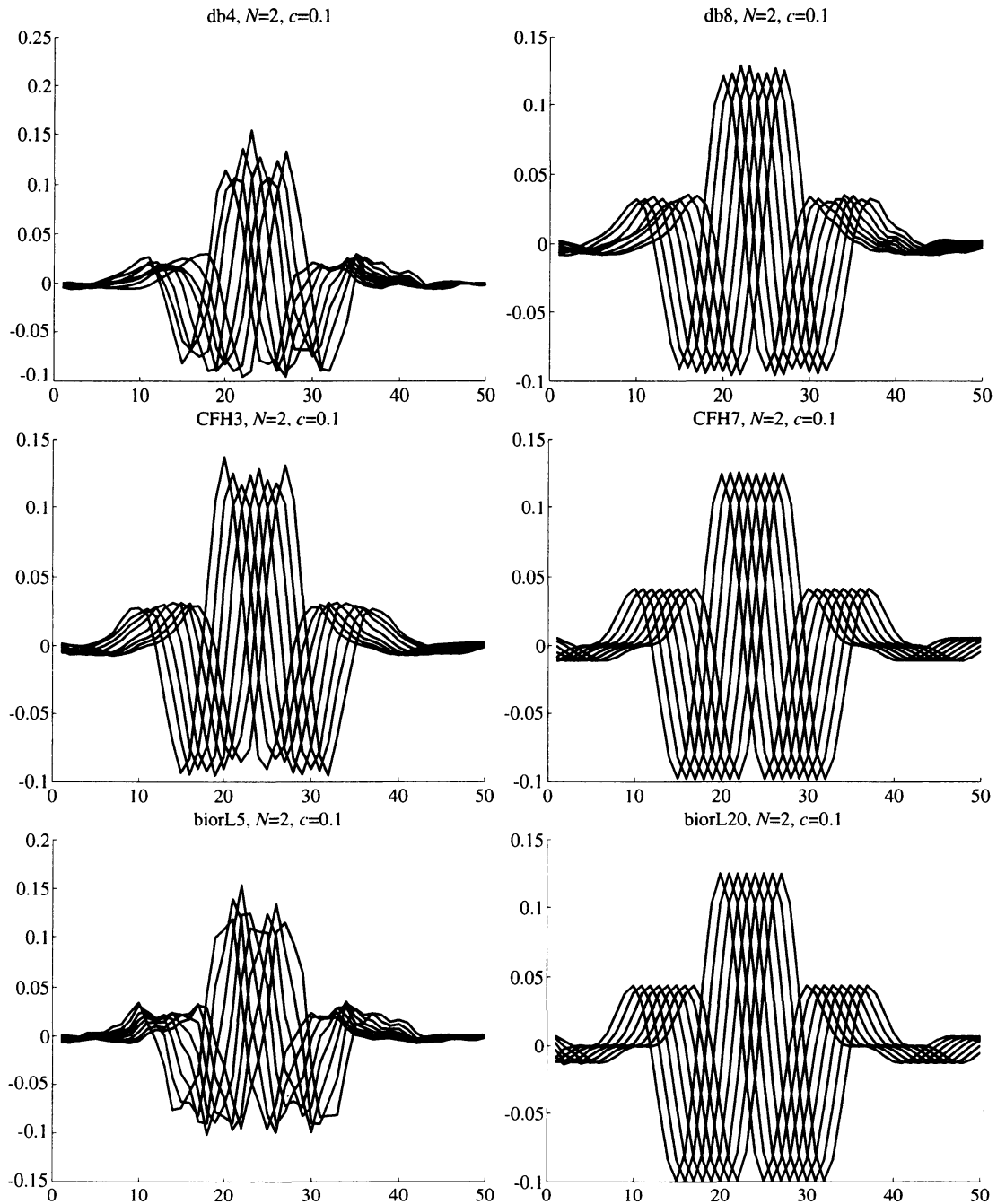


図 7: 2 分木離散ウェーブレット変換のレベル  $-3$  の詳細.  $c = 0.1$  で固定. 左上:  $bd4$ , 右上:  $bd8$ , 左中: Coiflet 3, 右中: Coiflet 7, 左下:  $biorL5$ , 右下:  $biorL20$ .

2. 対応するローパスフィルタ係数を計算する方法を示した.
3. ローパスフィルタ係数を有限長 (元のフィルタ長  $+8$  タップ) で切り取ったフィルタを使った通常の離散ウェーブレット変換・逆変換が十分な精度を持つことを示した.



4.  $N$  分木離散ウェーブレット変換を定義し, 近似と詳細がシフト不変に近い性質を持つ場合があることを例示した.

今後の課題としては,

1. 定義 23 の前処理と定義 27 の後処理をより良く設計する必要がある.
2. 様々なスケーリング関数や対応するローパスフィルタ係数を求める.
3. 時間遅れのある信号源分離の解法に応用する.
4. 電子透かしやノイズ除去などへ応用する.
5. 過剰系 (フレーム) が簡単に設計できるので, スパース表現へ応用する.

などが考えられる.

## 参考文献

- [1] R. Ashino, T. Mandai, and A. Morimoto, Scaling functions generating fractional Hilbert transforms of a wavelet function, to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [2] R. Ashino, T. Mandai, A. Morimoto, and F. Sasaki, Blind source separation of spatio-temporal mixed signals using time-frequency analysis, *Appl. Anal.*, **88**(3), 425–456, 2009.
- [3] A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, **45**(5), 485–560, 1992.
- [4] I. Daubechies, Ten lectures on wavelets, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [5] S. Mallat, A Wavelet Tour of Signal Processing — The Sparse Way, Third Edition, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2009.
- [6] A. Morimoto, K. Ikebe, Y. Ishida, Y. Oshima, M. Tatsumi, H. Tsuji, An application of  $N$ -tree discretewavelet transform to digital watermarking, Proceedings of 2013 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, 14-17 July, 2013, Tianjin, China, 73–78, 2013.
- [7] I.W. Selesnick, R.G. Baraniuk, and N.C. Kingsbury, The dual-tree complex wavelet transform, *IEEE Signal Processing Magazine*, **22**(6), 123–151, 2005.

- [8] H. Toda and Z. Zhang, Perfect translation invariance with a wide range of shapes of Hilbert transform pairs of wavelet bases, *Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*, **8**(4), 501–520, 2010.
- [9] 戸田浩・章忠, 完全シフト不変定理に基づく Hilbert 変換ペア・ウェーブレット基底, *数理解析研究所講究録*, **1684**, 13–35, 2010.
- [10] 秦野和郎, Coiflet Filter 係数, Biorthogonal wavelet Filter 係数の計算, *数理解析研究所講究録*, **944**, 218–226, 1996. 係数値は以下のホームページを参照.  
<http://phase.hpcc.jp/phase/wavelet/>
- [11] 萬代武史, 離散ウェーブレット変換に伴う射影作用素の平均の平行移動不変性, *数理解析研究所講究録*, **1684**, 36–48, 2010.