数理解析研究所講究録
第1929巻 2014年 91-99

ループ群の手法によるリー群へのアフィン調和写像の構成について

北海道大学・理学研究院 小林 真平
Shimpei Kobayashi
Department of mathematics, Hokkaido University

序

本研究は，ミュンヘン工科大学のドルフマイスター氏と山形大学の井ノ口氏との共同研究に基づく．詳しくは参考文献 [9] を参照して頂きたい．

ウーレンベックがリーマン面からユニタリー群 U_{n} への調和写像を可積分系の手法を用いて構成した事はよく知られている [24]. シーガルによってこの結果は拡張されて，すべてのコンパクトリー群に対しても同様の手法が成立する事が示された [22]. これらの構成で重要な事は，コンパクトリー群の両側不変計量を用いるということである（実は両側不変計量があれば，コンパクトであるという仮定は必要ない）．

従って両側不変計量が存在しない場合，可積分系の手法が適用できるという期待はできない．実際，左不変計量しかもたないようなリー群（例えば可解リー群など）に対して調和であるという条件を書き下してみれば，それは可積分系にはなっていないと考えられる（節4参照）．

そこでリー群のアフィン接続に着目して, 調和写像の方程式を考えて見る（アフィン調和写像と呼ぶ，節1参照）．すると，ある種のアフィン調和写像は可積分系になっていることがわかる．両側不変計量が存在する場合は，アフィン調和写像は両側不変計量に関する調和写像になり，ウーレンベック・シーガルの定式化と同じであるが，両側不変計量が存在しない場合は新しいものである．例として可解リー群のときにアフィン調和写像が定める偏微分方程式を見てみると，それは電磁気学における誘電体のガウスの法則を考えていることに他ならないことがわかる（節4参照）．また，アフィン調和写像は確率論でも現れる概念である [2, 23].

1 アフィン調和写像

(M,g) をリーマン多様体とし (N,∇) をアフィン接続 ∇ を持つ多様体とする．∇^M を (M,g) のレビ・チビタ接続，T を ∇ の捩率とする．このとき ∇ から引き戻し束 φ^*TN に誘導される接続 ∇^φ を次で定義する：

$$\nabla^\varphi_X(V\circ\varphi)=(\nabla_{d\varphi(X)}V)\circ\varphi.$$

ここで $X,Y\in\Gamma(TM), V\in\Gamma(TN)$ とした [12, p. 4]．$d\varphi$ の共変外微分は次で与えられる：

$$d^{\nabla^\varphi}d\varphi(X,Y)=\varphi^*T(X,Y).$$

したがって，$d\varphi$ が φ^*TN 値閉 1 形式であるためには $\varphi^*T=0$ であることが必要十分である．φ の第二基本形式 $\nabla d\varphi$ はつぎのように定義される：

$$\nabla d\varphi(Y;X):=(\nabla^\varphi_X d\varphi)Y=\nabla^\varphi_X d\varphi(Y)-d\varphi(\nabla^M_X Y),\quad X,Y\in\Gamma(TM). \tag{1}$$

φ のテンション場 $\tau(\varphi,\nabla)$ は次のように定義される．

$$\tau(\varphi,\nabla):=\mathrm{tr}_g(\nabla d\varphi).$$

定義 1. リーマン多様体 (M,g) からアフィン多様体 (N,∇) への滑らかな写像 $\varphi:(M,g)\to(N,\nabla)$ がアフィン調和写像もしくは ∇ 調和写像であるとは次の方程式を満たすことである：

$$\tau(\varphi,\nabla)=0.$$

2 リー群へのアフィン調和写像

G をリー群とし，$\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする．双線形写像 $\mu:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ を考える．このとき $\mathfrak{g}$ 値 1 形式 α, $\beta\in\Omega^1(M;\mathfrak{g})$ に対して，$\mathfrak{g}$ 値 2 形式 $\mu(\alpha\wedge\beta)$ を

$$\mu(\alpha\wedge\beta)(X,Y):=\mu(\alpha(X),\beta(Y))-\mu(\alpha(Y),\beta(X))$$

で定める．ここで $X,Y\in\Gamma(TM)$ とした．さらに μ の対称化 $\mathrm{sym}\,\mu$ と歪対称化 $\mathrm{skew}\,\mu$ を次のように定める：

$$(\mathrm{sym}\,\mu)(X,Y):=\tfrac{1}{2}\mu(X,Y)+\tfrac{1}{2}\mu(Y,X),\quad(\mathrm{skew}\,\mu)(X,Y):=\tfrac{1}{2}\mu(X,Y)-\tfrac{1}{2}\mu(Y,X).$$

簡単にわかるように α, $\beta\in\Omega^1(M;\mathfrak{g})$ に対して次が成立する:

$$(\mathrm{sym}\,\mu)(\beta\wedge\alpha)=-(\mathrm{sym}\,\mu)(\alpha\wedge\beta),\quad(\mathrm{skew}\,\mu)(\beta\wedge\alpha)=(\mathrm{skew}\,\mu)(\alpha\wedge\beta). \tag{2}$$

注意 1. θ をリー群 G のモレー・カルタン形式とする．θ は G 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 形式である．このとき $\mathfrak{g}$ 値 2 形式 $[\theta\wedge\theta]$ は次のように計算される：

$$[\theta\wedge\theta](X,Y)=2[\theta(X),\theta(Y)]=2(\theta\wedge\theta)(X,Y).$$

よく知られているようにモレー・カルタン形式 θ はモレー・カルタンの方程式を満たす：

$$d\theta+\frac{1}{2}[\theta\wedge\theta]=d\theta+\theta\wedge\theta=0.$$

次に G 上の左不変アフィン接続を双線形写像 μ を用いて次のように与える：

$$\nabla^{\mu}_X Y=\mu(X,Y),\quad X,Y\in\mathfrak{g}.$$

注意 2. 野水 [20] によれば，G 上のすべての左不変アフィン接続はこのようにして得られる事が知られている．

定義 2. 両側不変な接続 ${}^{(t)}\nabla:=\nabla^{\mu(t)}$, $(\mu(t)={}^{(t)}\mu)$ の 1 径数族 $\{{}^{(t)}\nabla\mid t\in\mathbb{R}\}$ を次のように定める：

$$ {}^{(t)}\mu(X,Y):=\frac{1}{2}(1+t)[X,Y],\quad X,Y\in\mathfrak{g}. \tag{3}$$

1 径数族 $\{{}^{(t)}\nabla\mid t\in\mathbb{R}\}$ の中の特別な 3 つの接続を定義する：

1. $t=-1$ のとき，標準接続 (*canonical connection*): ${}^{(-1)}\nabla$,
2. $t=1$ のとき，反標準接続 (*anti-canonical connection*): ${}^{(1)}\nabla$,
3. $t=0$ のとき，中立接続 (*neutral connection*): ${}^{(0)}\nabla$.

注意 3. 標準接続と反標準接続は [17, 1, 16] で議論されている．[17] では接続 ${}^{(-1)}\nabla$, ${}^{(1)}\nabla$ と ${}^{(0)}\nabla$ はそれぞれ *Cartan-Schouten's* $(-)$ 接続, $(+)$ 接続, (0) 接続と呼ばれている．

次の簡単かつ重要な補題をあげておく．

補題 1.

1. 両側不変接続 ${}^{(t)}\nabla$ が捩率 0 であるのは中立接続 ${}^{(0)}\nabla$ のときのみである．
2. M をリーマン面とし，G をリー群とする．さらに ∇^{μ} を G 上の左不変接続で μ を歪対称とする．このとき写像 $\varphi: M\to G$ が ∇^{μ} 調和であることと中立調和（つまり ${}^{(0)}\nabla$ 調和）であることは同値である．

さらに容認アフィン調和写像の定義と，容認アフィン調和写像が零曲率表現を持つこと（可積分系の定式化を持つこと）を見る．

定義 3. リーマン面 M からリー群 G への ∇^μ 調和写像 φ とそのモレー・カルタン形式 $\alpha = \varphi^*\theta = \alpha' + \alpha''$ (α' は α の $(1,0)$ 部分，α'' は α の $(0,1)$ 部分) で次の条件を満たすものを考える：

$$(\operatorname{sym}\mu)(\alpha' \wedge \alpha'') = 0. \tag{4}$$

このとき φ を容認アフィン調和写像または容認 ∇^μ 調和写像と呼ぶ.

注意 4. もし双線形写像 μ が歪対称であれば，条件 (4) は自動的に満たされる．特に接続 ${}^{(t)}\nabla$, $(t \in \mathbb{R})$ に対して，滑らかな写像 $\varphi : M \to (G, {}^{(t)}\nabla)$ が容認アフィン調和写像であることとアフィン調和写像であるこは同値である.

命題 1. $\varphi : M \to (G, \nabla^\mu)$ をリーマン面 M から左不変接続 ∇^μ を持つリー群 G への容認 ∇^μ 調和写像とし $\alpha = \varphi^*\theta = \alpha' + \alpha''$ を φ のモレー・カルタン形式とする (α' は α の $(1,0)$ 部分，α'' は α の $(0,1)$ 部分)．このときモレー・カルタン形式の $\mathbb{S}^1$-族 α_λ を次のように定義する：

$$\alpha_\lambda := \frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\alpha' + \frac{1}{2}(1-\lambda)\alpha''. \tag{5}$$

このとき接続の $\mathbb{S}^1$-族 $d + \alpha_\lambda$ は全ての $\lambda \in \mathbb{S}^1$ に対して平坦であることがわかる.

逆に $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ を単連結領域とし，$\alpha_\lambda = \frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\alpha' + \frac{1}{2}(1-\lambda)\alpha''$ を $\mathfrak{g}$ 値 1 形式の $\mathbb{S}^1$-族で条件 (4) を満たすものとする．さらに零曲率条件

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0$$

がすべての $\lambda \in \mathbb{S}^1$ に対して満たされているとする．このとき，滑らかな写像 $F_\lambda : \mathbb{D}\times\mathbb{S}^1 \to G$ の $\mathbb{S}^1$-族が存在して $F_\lambda^*\theta = \alpha_\lambda$ が成立する．この写像 F_λ を拡張解と呼ぶ．この写像は $\lambda = \pm 1$ に対して容認 ∇^μ 調和写像である.

注意 5.

1. 簡単にわかるように，$\alpha_{\lambda=1} = 0$ より写像 $F_{\lambda=1}$ は定数写像である.
2. $F_{\lambda=1} = \mathrm{id}$ を仮定すると，写像 F は $\mathbb{D}$ から基点付きループ群 ΩG への写像である：

$$\Omega G = \{\gamma : \mathbb{S}^1 \to G \mid \gamma(1) = \mathrm{id}\}.$$

また，拡張解は ΩG の自然な複素構造に関して正則曲線になっていることに注意する.

補題 1 と命題 1 の帰結として次の定理を得る.

定理 1. M をリーマン面とし，G を左不変接続 ∇^μ を持つリー群とする．さらに μ は歪対称であるとし，${}^{(0)}\nabla$ を定義 2 で与えられる両側不変接続とする．このとき，写像 $\varphi : M \to G$ が ∇^μ 調和であることと，${}^{(0)}\nabla$ 調和であることは同値である．さらに $\alpha = \varphi^*\theta = \alpha' + \alpha''$

を φ のモレー・カルタン形式とする (α' は α の $(1,0)$ 部分，α'' は α の $(0,1)$ 部分）．このとき次のように定義される接続の $\mathbb{S}^1$-族 $d+\alpha_\lambda$ は平坦である：

$$\alpha_\lambda := \frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\alpha' + \frac{1}{2}(1-\lambda)\alpha''. \tag{6}$$

逆に $\mathbb{D}$ を単連結領域とし $\alpha_\lambda = \frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\alpha' + \frac{1}{2}(1-\lambda)\alpha''$ を $\mathfrak{g}$ 値 1 形式の $\mathbb{S}^1$-族で，次の零曲率条件をすべての $\lambda \in \mathbb{S}^1$ に対して満たすとする：

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0.$$

このとき，写像 $F_\lambda : \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1 \to G$ の $\mathbb{S}^1$-族が存在して $F_\lambda^*\theta = \alpha_\lambda$ を満たす．写像 F_λ は拡張解とよばれ，$\lambda = \pm 1$ とすべての歪対称な μ に対して ∇^μ 調和，つまり ${}^{(0)}\nabla$ 調和である．

3 ワイエルシュトラス型の表現公式との繋がり

リー群のアフィン調和写像は，正則関数の組から構成される．このような構成法はワイエルシュトラス型の表現公式と呼ばれ，ドルフマイスター・ペディット・ウーによって，はじめコンパクトリーマン対称空間への調和写像の場合に与えられ [11], その後さまざまに拡張された．特に [7] ではこの表現公式のリー群への調和写像の場合の定式化が簡潔に述べられている．ここでは，リー群へのアフィン調和写像がアフィン対称空間へのアフィン調和写像と対応付けられることを見る．

写像 $\varphi : \mathbb{D} \to G$ のモレー・カルタン形式 α に対して $\mathbb{S}^1$-族 α_λ を次のように定義する：

$$\alpha = \varphi^*\theta = \alpha' + \alpha'', \quad \alpha_\lambda = \frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\alpha' + \frac{1}{2}(1-\lambda)\alpha''. \tag{7}$$

一方，写像 φ はつぎのように枠 $\mathcal{G}$ への持ち上げを持つ：

$$\mathcal{F} : \mathbb{D} \to \mathcal{G} := G \times G, \ \ p \mapsto (\mathrm{id}, \varphi(p)).$$

ここで id を G の単位元とした．結果として

$$\mathcal{A} = \mathcal{F}^*\theta_{\mathcal{G}} = (0, \varphi^*\theta) = (0, \alpha). \tag{8}$$

ここで $\theta_{\mathcal{G}}$ は $\mathcal{G} = G \times G$ のモレー・カルタン形式である．今 $G \times G$ 上の対合 σ を

$$\sigma(a,b) = (b,a)$$

で定義する．次に $\mathcal{A}$ を σ の微分 $d\sigma$ に関して分解する．簡単にわかるように ± 1 に対応する固有空間 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{P}$ が次のように求まる：$\mathcal{K} = \{(X,X) \mid X \in \mathfrak{g}\}, \mathcal{P} = \{(Y,-Y) \mid Y \in \mathfrak{g}\}$. 結果として

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{\mathcal{K}} + \mathcal{A}_{\mathcal{P}}.$$

ここで $\mathcal{A}_{\mathcal{K}} = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)$ と $\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \frac{1}{2}(-\alpha, \alpha)$ である．さらに $\mathbb{D}$ 上の複素構造を用いて分解する：

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}} = \mathcal{A}'_{\mathcal{P}} + \mathcal{A}''_{\mathcal{P}}.$$

ここで $\mathcal{A}'_{\mathcal{P}}$ は $(1,0)$ 形式で $\mathcal{A}''_{\mathcal{P}}$ は $(0,1)$ 形式である．パラメータ λ を次のように導入する：

$$\mathcal{A}_\lambda = \lambda^{-1}\mathcal{A}'_{\mathcal{P}} + \mathcal{A}_{\mathcal{K}} + \lambda\mathcal{A}''_{\mathcal{P}}, \quad \lambda \in \mathbb{S}^1. \tag{9}$$

このとき，簡単な計算によって次が示される．

$$\mathcal{A}_\lambda = \left(\frac{1}{2}(1-\lambda^{-1})\alpha' + \frac{1}{2}(1-\lambda)\alpha'', \frac{1}{2}(1+\lambda^{-1})\alpha' + \frac{1}{2}(1+\lambda)\alpha''\right) = (\alpha_\lambda, \alpha_{-\lambda}). \tag{10}$$

明らかに，$\mathcal{A}_\lambda$ が可積分であること，つまり $d\mathcal{A}_\lambda + \frac{1}{2}[\mathcal{A}_\lambda \wedge \mathcal{A}_\lambda] = \mathbf{0}$ であることは α_λ が可積分であること，つまり $d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0$ であることが必要十分である．したがって，写像 $\mathcal{F}_\lambda : \mathbb{D} \times \mathbb{S}^1 \to \mathcal{G}$ が存在して，$\mathcal{F}_\lambda^* \theta_{\mathcal{G}} = \mathcal{A}_\lambda$ を満たす．写像 $\mathcal{F}_\lambda$ は φ の拡張標構と呼ばれる．拡張標構 $\mathcal{F}_\lambda$ は拡張解 F_λ を用いて次のように表現される：

$$\mathcal{F}_\lambda = (F_\lambda, F_{-\lambda}).$$

次の定理は定理 1 の簡単な帰結である．

定理 2.

1. φ が ${}^{(0)}\nabla$ 調和写像である．

2. $d + \alpha_\lambda$ はすべての $\lambda \in \mathbb{S}^1$ に対して平坦接続を定める．

3. $d + \mathcal{A}_\lambda$ はすべての $\lambda \in \mathbb{S}^1$ に対して平坦接続を定める．

従って，リーマン面 M からリー群 $(G, {}^{(0)}\nabla)$ への ${}^{(0)}\nabla$ 調和写像 φ の問題は，アフィン対称空間 $G \times G/\mathrm{diag}$ への ${}^{(0)}\nabla$ 調和写像の問題と等価である事がわかる．アフィン対称空間への調和写像のワイエルシュトラス型の表現公式は，良く知られており，その詳細は省略する（例えば [3] 参照）．

4　3次元の可解リー群へのアフィン調和写像

ここでは，3 次元の可解リー群への ${}^{(0)}\nabla$ 調和写像を例に考えてみる．3 次元可解リー群の 2 径数族 $G(\mu_1, \mu_2)$ を次のように定める：

$$G(\mu_1, \mu_2) = \left\{ (x^1, x^2, x^3) = \begin{pmatrix} e^{\mu_1 x^3} & 0 & x^1 \\ 0 & e^{\mu_2 x^3} & x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathrm{GL}_3\mathbb{R}. \tag{11}$$

ここで $\mu_1+\mu_2\neq 0$ であるとき $G(\mu_1,\mu_2)$ はユニモジュラーでないことに注意する．また簡単にわかるように $\mu_1=\mu_2=0$ のとき，$G(\mu_1,\mu_2)$ はアーベル群 $\mathbb{R}^3$ である．${}^{(0)}\nabla$ 調和写像の方程式は座標 $\varphi=(\varphi^1,\varphi^2,\varphi^3)$ を用いると次のようにかける．

$$\varphi^k_{z\bar{z}}-\frac{1}{2}\mu_k(\varphi^k_z\varphi^3_{\bar{z}}+\varphi^k_{\bar{z}}\varphi^3_z)=0,\ (k=1,2),\quad \varphi^3_{z\bar{z}}=0. \tag{12}$$

次に $G(\mu_1,\mu_2)$ に左不変計量を導入する：

$$ds^2=e^{-2\mu_1 x^3}(dx^1)^2+e^{-2\mu_2 x^3}(dx^2)^2+(dx^3)^2.$$

この計量に関する調和写像の方程式を書いてみると次のようになる [13]：

$$\varphi^k_{z\bar{z}}-\mu_k(\varphi^k_z\varphi^3_{\bar{z}}+\varphi^k_{\bar{z}}\varphi^3_z)=0,\ (k=1,2),\quad \varphi^3_{z\bar{z}}+\sum_{k=1}^{2}\mu_k e^{-2\mu_k\varphi^3}\varphi^k_z\varphi^k_{\bar{z}}=0. \tag{13}$$

注意 6. ${}^{(0)}\nabla$ 調和写像の方程式は線形のポアソン方程式である．特にこの方程式は，電磁気学における誘電体のガウスの法則と同じである．

参考文献

[1] I. Agricola, Connections on naturally reductive spaces, their Dirac operator and homogeneous models in string theory. *Comm. Math. Phys.*, **232** (2003), no. 3, 535–563.

[2] M. Arnaudon, Connexions et martingales dans les groupes de Lie, *Séminaire de Probabilités XXVI*, pp. 146–156, Lecture Notes in Math., **1526**, Springer, Berlin, 1992.

[3] V. Balan, J. Dorfmeister, A Weierstrass-type representation for harmonic maps from Riemann surfaces to general Lie groups, *Balkan J. Geom. Appl.*, **5** (2000), no. 1, 7–37.

[4] V. Balan, J. Dorfmeister, Birkhoff decompositions and Iwasawa decompositions for loop groups, *Tohoku Math. J. (2)*, **53** (2001), 593–615.

[5] V. Balan, J. Dorfmeister, Generalized Weierstrass type representation for harmonic maps into general symmetric spaces via loop groups, *J. Math. Soc. Japan*, **57** (2005), no. 1, 69–94.

[6] J. T. Cho, J. Inoguchi, J.-E. Lee, Affine biharmonic submanifolds in 3-dimensional pseudo-Hermitian geometry, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, **79** (2009), no. 1, 113–133.

[7] J. Dorfmeister, J.-H. Eschenburg, Pluriharmonic maps, loop groups and twistor theory, *Ann. Global Anal. Geom.*, **24** (2003), no. 4, 301–321.

[8] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, Constant mean curvature surfaces in hyperbolic 3-space via loop group, *J. Reine Angew. Math.*, **686** (2014), 1–36.

[9] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, A loop group method for affine harmonic maps into Lie groups, *preprint*, arXiv:1405.0333.

[10] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi, A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group, *preprint*, arXiv:1210.7300v2.

[11] J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu, Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces, *Comm. Anal. Geom.*, **6** (1998), no. 4, 633–668.

[12] J. Eells, L. Lemaire, *Selected Topics in Harmonic Maps*, Regional Conference Series in Math., **50**, Amer. Math. Soc., 1983.

[13] J. Inoguchi, S. Lee, A Weierstrass type representation for minimal surfaces in Sol, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **136** (2008), no. 6, 2209–2216.

[14] P. Kellersch, *Eine Verallgemeinerung der Iwasawa Zerlegung in Loop Gruppen*, DGDS. Differential Geometry—Dynamical Systems. Monographs **4**, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2004.

[15] W. S. Kendall, Martingales on manifolds and harmonic maps, *Geometry of random motion* (Ithaca, N.Y., 1987), pp. 121–157, Contemp. Math., **73**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[16] I. Khemar, Elliptic integrable systems: a comprehensive geometric interpretation, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **219** (2012), no. 1031.

[17] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differentail Geometry* II, Interscience Tracts in Pure and Applied Math. **15**, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1969.

[18] O. Kowalski, *Generalized Symmetric Spaces*, Lecture Notes in Math., **805**, Springer, Berlin-New York, 1980.

[19] J. Milnor, Curvatures of left invariant metrics on Lie groups, *Adv. Math.*, **21** (1976), no. 3, 293 – 329.

[20] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, *Amer. J. Math.*, **76** (1954), 33–65.

[21] A. Pressley, G. Segal, *Loop groups*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986.

[22] G. B. Segal, Loop groups and harmonic maps, *Advances in Homotopy Theory* (Cortona, 1988), pp. 153–167, London Math. Soc. Lecture Note Series, **139**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[23] S. N. Stelmastchuk, The Ito exponential on Lie groups, *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, **8** (2013), no. 5-8, 307–326.

[24] K. Uhlenbeck, Harmonic maps into Lie groups: classical solutions of the chiral model, *J. Differ. Geom.*, **30** (1989), no. 1, 1–50.