数理解析研究所講究録
第 1932 巻 2015 年 47-49

グラフの Mycielskians とそれらの boxicity の挙動

*上別府 陽 (島根大学大学院 総合理工学研究科)

近年, Chandran 氏ら [1] がグラフ G の boxicity と chromatic number (それぞれ, $\mathrm{box}(G)$, $\chi(G)$ で表す) との間に, 次の関係があることを発見した.

Theorem ([1]). $s \geq 0$ とする. $\mathrm{box}(G) = \frac{|V(G)|}{2} - s$ ならば, $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{2s+2}$ である.

前定理は「グラフ G の boxicity が $\frac{|V(G)|}{2}$ に近ければ, G の chromatic number も大きいこと」を示している. これにより, boxicity と chromatic number の挙動が似る可能性があると期待できる. また, boxicity が大きいグラフの例があまり多く知られていない現状を受け, chromatic number を大きくする graph operation の 1 つである **Mycielskian** $M(\cdot)$ による boxicity の挙動を調査し, 得られた成果を報告する.

本稿で登場するグラフはすべて有限かつ単純なグラフとし, グラフ G の頂点集合を $V(G)$, 辺集合を $E(G)$ で表す. また, グラフの頂点 u と v を結ぶ辺を uv と書く. グラフ G の補グラフを $\overline{G}$ で表す.

1 グラフの boxicity

$\mathcal{F}$ を空でない, ある集合族とする. 頂点集合が集合族 $\mathcal{F}$ で, 辺集合が

$$\{F_1F_2 \mid F_1, F_2 \in \mathcal{F}, F_1 \neq F_2, F_1 \cap F_2 \neq \emptyset\}$$

で定義されるグラフを集合族 $\mathcal{F}$ の *intersection* グラフと呼ぶ. また, 実数直線上の k 個の閉区間 $I_1, I_2, \ldots, I_k$ の直積 $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k$ を k 次元ユークリッド空間内の *box* と呼ぶ. 一般に, n 個の頂点を持つグラフ G は n 次元ユークリッド空間の box からなるある集合族の intersection グラフと同型であることが確認できる. そこで,

$$\min\left\{k \in \{0\} \cup \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{グラフ } G \text{ が } k \text{ 次元ユークリッド空間の box からなる}\\ \text{ある集合族の intersection グラフと同型}\end{array}\right\}$$

をグラフ G の *boxicity* と呼び, $\mathrm{box}(G)$ で表す. ただし, 完全グラフの boxicity を 0 と定める. グラフ H が G の誘導部分グラフならば, $\mathrm{box}(G) \geq \mathrm{box}(H)$ であることが定義から確かめられる.

2 boxicity に関する基本的な結果と応用

Roberts 氏 [6] は n 個の頂点を持つグラフに制限したときの最大 boxicity が $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ であることを示した. 具体的には, 完全多部グラフ $K_{2,2,\ldots,2}$ または $K_{2,2,\ldots,2,1}$ の boxicity が最大 boxicity に達する. $K_{2,2,\ldots,2}$ の boxicity が大きいことは, 例えば, $K_{2,2}$, 即ち, 4-cycle を 2 次元 box の intersection グラフで表すことから始めてみれば直観的にわかるだろう. なお, 文献 [2] にはグラフの boxicity の計算に役立つ基本的な考えがいくつか記されている. 次はその一例である. 補グラフ $\overline{H}$ が interval グラフであるようなグラフ H を *cointerval* と呼ぶ.

Theorem ([2]) グラフ G に対して, 次の 3 つは同値.

(1) $\mathrm{box}(G) \leq k$,

*Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University, Shimane 690-8504, Japan.
E-mail address : kamibeppu@riko.shimane-u.ac.jp
This work was supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B), No.25800091.

(2) G は $V(G)$ を頂点集合とする k 個の interval グラフ (boxicity が 1 以下のグラフ) の共通部分で表せる,

(3) 補グラフ $\overline{G}$ は，k 個の cointerval spanning subgraph で $\overline{G}$ の辺を被覆できる.

なお，グラフの boxicity の概念は, Roberts 氏 [6] によって紹介され, 生態学における生態ニッチの交差に関する問題やオペレーションズリサーチにおける艦隊整備計画等, 様々な分野へ応用されている ([5, 7, 8]).

3 グラフの Mycielskian

グラフ G に対して, $z \notin V(G)$ とする. また, $V(G)_1$, $V(G)_2$ を頂点集合 $V(G)$ のコピーとし, v_i を $V(G)$ の元 v に対応する $V(G)_i$ の元とする $(i = 1, 2)$. また,

$$E_1 = \{u_1v_1 \mid uv \in E(G)\}, \quad E_2 = \{u_1v_2, v_1u_2 \mid uv \in E(G)\}, \quad E_3 = \{zu_2 \mid u \in V(G)\}$$

とする. 頂点集合を $\{z\} \cup V(G)_1 \cup V(G)_2$ とし, 辺集合を $E_1 \cup E_2 \cup E_3$ とするグラフを, グラフ G の *Mycielskian* と呼び, $M(G)$ で表す. この graph operation $M(\cdot)$ は元々，chromatic number が十分に大きい, triangle-free グラフを構成するために, Mycielski 氏 [4] によって考案された有名な方法である. 集合 $V(G)_1$ が誘導する $M(G)$ の部分グラフは元のグラフ G だから, $\mathrm{box}(M(G)) \geq \mathrm{box}(G)$ が成立する. 本研究では, Mycielskian $M(\cdot)$ によって, 与えられたグラフの boxicity が増加するかどうかに興味がある. したがって, 多くのグラフを $\mathrm{box}(M(G)) > \mathrm{box}(G)$ か $\mathrm{box}(M(G)) = \mathrm{box}(G)$ のいずれかに分類したい.

4 グラフの Mycielskian の boxicity の上界と下界

$\mathcal{C}$ をグラフ G の完全部分グラフからなる族とする. G の各辺 e に対して，$e \in E(K)$ である $\mathcal{C}$ に属する完全部分グラフ K があるとき，$\mathcal{C}$ を完全グラフによる G の辺被覆と呼ぶ. 完全グラフによる G の辺被覆に必要な完全グラフの数の最小値を $\theta(G)$ と書く. また，自身を除くすべての G の頂点と辺で結ばれるグラフ G の頂点 v を *universal* と呼ぶ. グラフの Mycielskian の boxicity に対する上界および下界は, 次で与えられる.

Theorem A ([3]). l 個の universal vertex を持つグラフ G に対して,

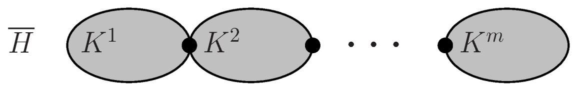
$$\mathrm{box}(G) + \left\lceil \tfrac{l}{2} \right\rceil \leq \mathrm{box}(M(G)) \leq \begin{cases} \theta(\overline{G}) + \left\lceil \tfrac{l}{2} \right\rceil & \text{if } l \text{ is zero or odd,} \\ \theta(\overline{G}) + \left\lceil \tfrac{l}{2} \right\rceil + 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が成り立つ.

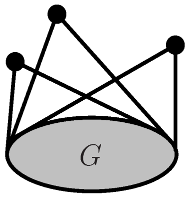
以下では，$\mathcal{P} = \{G \mid \mathrm{box}(G) = \theta(\overline{G})\}$ とする.

Remark 1. グラフ G は $l\,(\geq 0)$ 個の universal vertex を持っているとする. グラフの Mycielskian に対する上界と下界により, 例えば, クラス $\mathcal{P}$ に属するグラフに対して, その Mycielskian の boxicity は, ほぼ限定されたことがわかる. 特にクラス $\mathcal{P}$ の中で, universal vertex を持たない, もしくは, 奇数個の universal vertex を持つようなグラフ G に対して, $\mathrm{box}(M(G)) = \mathrm{box}(G) + \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil$ であることがわかる. また, 偶数個の universal vertex を持つグラフの中で，例えば，偶数個の頂点を持つ完全グラフの Mycielskian の boxicity は，$\left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 1 \;(= \theta(\overline{G}) + \left\lceil \frac{l}{2} \right\rceil + 1)$ であることがわかっている.

Example (クラス $\mathcal{P}$ に属するグラフ).
- 完全多部グラフ $K_{n_1, n_2, \ldots, n_k}$,
- 補グラフ $\overline{H}$ が 4 頂点以上の複数の完全グラフ $\{K^i\}$ でできた鎖状構造を持つ，グラフ H,
（ただし，隣り合う完全グラフは 1 つの頂点を共有）



- n-suspension $\mathrm{Susp}_n(G)$ $(n \geq 2)$，ただし，$G \in \mathcal{P}$.



$\mathrm{Susp}_3(G)$

さて，$V(G)$ の部分集合 U で，G のどの辺 e に対しても，$u \in e$ である U に属する頂点 u があるとき，U をグラフ G の頂点被覆と呼ぶ.

Remark 2. Chandran 氏ら [1] は，グラフ G の頂点被覆に必要な頂点数の最小値 $t(G)$ を用いて，グラフの boxicity の上界 $\mathrm{box}(G) \leq \lfloor \frac{t(G)}{2} \rfloor + 1$ を与えた. グラフの Mycielskian に対して，$t(M(G)) \leq 2t(G)+1$ であることがわかるので，グラフの Mycielskian の boxicity の上界 $\mathrm{box}(M(G)) \leq t(G)+1$ を得る. この上界を用いて，クラス $\mathcal{P}$ に属するグラフの中でその Mycielskian の boxicity を決定することができないが，**Theorem A** の上界を使えば，その boxicity を決定できる例 (例えば，完全多部グラフ) があるため，**Theorem A** の有用性が窺える.

5 box$(M(G)) >$ box(G)，box$(M(G)) =$ box(G) へのグラフの分類

Mycielskian の boxicity に関して，これまでに得られているグラフの分類結果を以下にまとめる.

$\mathrm{box}(M(G)) > \mathrm{box}(G)$	$\mathrm{box}(M(G)) = \mathrm{box}(G)$
graphs with universal vertices	graphs without universal vertices satisfying $\mathrm{box}(G) = \theta(\overline{G})$
non-trivial interval graphs	
cycles with at least 5 vertices	

References

[1] L. S. Chandran, A. Das, and C. D. Shah, Cubicity, boxicity, and vertex cover, Discrete Math. 309 (2009) 2488-2496.

[2] M. B. Cozzens and F. S. Roberts, Computing the boxicity of a graph by covering its complement by cointerval graphs, Discrete Appl. Math. 6 (1983) 217-228.

[3] A. Kamibeppu, Bounds for the boxicity of Mycielski graphs, available at `http://arxiv.org/abs/1308.2368`.

[4] J. Mycielski, On graph coloring (in French), Colloq. Math. 3 (1955) 161-162.

[5] R. J. Opsut, and F. S. Roberts, On the fleet maintenance, mobile radio frequency, task assignment, and traffic phasing problems, in: G. Chartrand et al., eds., The Theory and Applications of Graphs, Wiley, New York (1981) 479-492.

[6] F. S. Roberts, On the boxicity and cubicity of a graph, in: Recent Progress in Combinatorics, Academic Press, New York (1969) 301-310.

[7] F. S. Roberts. Discrete Mathematical Models, with Applications to Social, Biological, and Environmental Problems, Prentice-Hall, 1976.

[8] F. S. Roberts. Food webs, competition graphs, and the boxicity of ecological phase space, Theory and Applications of Graphs, Lecture Notes in Mathematics 642 (1978), Y. Alavi and D. Lick, eds., Springer-Verlag, 447-490.