数理解析研究所講究録
第 1934 巻 2015 年 40-51

Towards rationality of critical values of the standard L-functions for $\mathrm{U}(2,1)$

Yoshi-hiro Ishikawa
岡山大学・自然科学研究科　石 川 佳 弘

1 Problem and strategy : Zeta integral

この§1では, 問題の設定 と その解決への戦略を記しておく。総実代数体上でもパラレルに問題は定式化出来るが, 今回は Archimedean local なパーツが主結果であり, 基礎体 F の数論に関わる部分は考慮しないので, F は有理数体 $\mathbb{Q}$ とする。

<Group structure>

$E/\mathbb{Q}$ を虚二次拡大とする。$\mathbb{Q}$ 上の準分裂ユニタリ群 $\mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)$ を,

$$G \;:=\; \{g\in GL(3,E) \mid {}^t\bar{g}\begin{pmatrix} & & 1\\ & \kappa & \\ -1 & & \end{pmatrix} g = \begin{pmatrix} & & 1\\ & \kappa & \\ -1 & & \end{pmatrix}\}.$$

と実現しておく。但し, $\kappa\in E^{\times}$ は トレース ゼロ元, $\bar{\ }$ は $E/\mathbb{Q}$ のガロア群の生成元である。G の Borel 部分群 $B=MN$ は

$$N \;=\; \{\begin{pmatrix} 1 & b & z\\ & 1 & -\bar{b}\\ & & 1\end{pmatrix}\in G \mid b,z\in E,\ z+\bar{z}=-|b|_E^2\},$$

$$M \;=\; \{\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \bar{\alpha}^{-1}\end{pmatrix}\in G \mid \alpha\in E^{\times},\beta\in E^{(1)}\}$$

と表示できる。§2で 局所対称空間を導入する際に G の similitude が必要となる。G の定義に於いて, 条件の右辺に similitude norm の値 $\nu(g)$ を掛けたものが, $\mathrm{GU}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)$ であった。これを $\widetilde{G}$ と記すと, G は $\widetilde{G}$ の部分群と見做せる。また Rankin-Selberg 型のゼータ積分を 下で導入する際に, Euler 部分群として 次の H が必要となる。

$$H \;:=\; \widetilde{H}\cap G,\quad \widetilde{H} \;:=\; \mathrm{Img}\Big(i:\mathrm{GU}_{E/\mathbb{Q}}(1,1)\ni\begin{pmatrix} \star & \star\\ \star & \star\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} \star & & \star\\ & 1 & \\ \star & & \star\end{pmatrix}\in\widetilde{G}\Big).$$

H の Borel 部分群は, $B_H = Z_N A$ で与えられる。但し, Z_N, A は次の様に表示できる。

$$Z_N = \{\begin{pmatrix} 1 & & z \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \in G \mid z \in E,\, \mathrm{tr}z = 0\}, \quad A = \{\begin{pmatrix} a & & \\ & 1 & \\ & & a^{-1} \end{pmatrix} \in G \mid a \in \mathbb{Q}^\times\}.$$

また, § 2 で種々の cohomology の関係を記述する際に G,H と その similitude の包含関係が必要となるので, 埋め込み j を

$$\begin{array}{ccc} G := \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2,1) & \subset & \widetilde{G} := \mathrm{GU}_{E/\mathbb{Q}}(2,1) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H \cong \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(1,1) & \xrightarrow{j} & \widetilde{H} \cong \mathrm{GU}_{E/\mathbb{Q}}(1,1) \end{array}$$

と決める。縦の埋め込みは, $\widetilde{H}$ の定義中の i である。以下, valued points は, $G_p := G(\mathbb{Q}_p)$ などと略記する。

<The standard L-function>

アデール群 $G(\mathbb{A}) = U(3)_{\mathbb{A}}$ の既約 cuspidal 保型表現 $\pi = \otimes_v \pi_v$ と E の Hecke 指標 ξ に対して, π の ξ-twisted L-関数は, Euler 積

$$L(s;\pi\times\xi) := \prod_v L_v(s;\pi_v\times\xi_v).$$

により定義される。

ここで, 非 Archimedes 素点 p での成分 ξ_p, π_p が共に不分岐であれば, 不分岐 L-因子は

$$L_p(s;\pi_p\times\xi_p) := L_{E,p}(s;\xi_p)L_p(2s;\xi_p\chi)L_p(2s;\xi_p/\chi).$$

で与えられる。但し, χ は π_p が $\mathrm{Ind}_{B_p}^{G_p}(\chi)$ の組成成分として現れる様な Borel 部分群 $B_p = N_p M_p$ の表現

$$\chi : n.\mathrm{diag}(\alpha,\beta,\bar{\alpha}^{-1}) \mapsto \chi_p(\alpha) \in \mathbb{C}^\times,$$

であり, χ_p は $E_p^\times$ の不分岐指標である。

Archimedes 素点 ∞ 上で, π_∞ が Harish-Chandra パラメタが $\Lambda = (\Lambda_1,\Lambda_2,\Lambda_3) \in \mathbb{Z}^3$ の離散系列表現 D_Λ で, ξ_∞ が $(t, m_\xi) \in \mathbb{C}\times\mathbb{Z}$ により

$$\xi_\infty : \mathbb{C}^\times \ni \alpha \mapsto |\alpha|^{2t}\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^{m_\xi} \in \mathbb{C}^\times, \tag{1.1}$$

とパラメタ付けされている時, Archimedean L-因子は,

$$L_\infty(s;D_\Lambda\times\xi_{(t,m)}) := \prod_{i=1}^{3}\Gamma_{\mathbb{C}}\left(s+t+|\Lambda_i|+\frac{|m_\xi|}{2}\right) \tag{1.2}$$

となる。

<Problem>

既約 cuspidal 保型表現 π と E の Hecke 指標 ξ に対して, ξ-twisted L-関数の臨界点 $s = s_0$ での特殊値

$$L(s_0;\pi\times\xi)$$

の代数性を調べたい。即ち, 適切な方法で超越パート"$p(s_0;\pi,\xi)$"$\in \mathbb{C}^\times$ を定め,

$$\frac{L(s_0;\pi\times\xi)}{p(s_0;\pi,\xi)}$$

への $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ による作用を調べることを目標とする。

とは言え, 無条件では何も出来ないので, Hecke 指標 ξ は algebraic 指標(*i.e.* $t=0$ in (1.1)), cuspidal 表現 π は generic 表現 即ち π_∞ が large 離散系列 $D_\Lambda^{(1,1)}$ (*i.e.* $\Lambda_1>\Lambda_3>\Lambda_2$) とする。

<Zeta integral of Gelbart-Piatetski-Shapiro>

φ を cuspidal 表現 π に属する generic 形式とする時, Gelbart と Piatetski-Shapiro のゼータ積分

$$\mathcal{Z}(s;\varphi,\xi):=\int_{H(F)\backslash H(\mathbb{A})H}\varphi|_H(h)\,E^H(s;h,\xi)\,\mathrm{d}h. \tag{1.3}$$

(*cf.* [Ge-PS]) を考える。ここで, E^H は $H(\mathbb{A})$ の主系列表現 $\mathrm{Ind}_{B_H(\mathbb{A})}^{H(\mathbb{A})}(1_{N_H}\otimes\xi\otimes e^{2s})$ のセクション $f_\xi^{(s)}=\otimes_v f_{\xi,v}^{(s)}$ から作られる Eisenstein 級数

$$E^H(s;h,\xi)\ :=\ \sum_{\gamma\in B_H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{Q})} f_\xi^{(s)}(\gamma h),$$

である。Langlands の一般論により, 上の積分は 全 s-平面に有理型に解析接続される。

§ 3 に於いて, ゼータ積分 (1.3) を コホモロジー類間のカップリングと見做す。このことで, $\boxed{\text{一つの } \overline{\mathbb{Q}}\text{-構造}}$ を得る。

<Unfolding and local integrals>

局所化可能な generic カスプ形式 $\varphi=\otimes_v\varphi_v$ を採る。Whittaker 模型の一意性により, ゼータ積分 (1.3) は局所積分の積に分解する;

$$\mathcal{Z}(s;\varphi,\xi)=\prod_v \mathcal{Z}_v(s;W,f_\xi^{(s)}),$$

但し,

$$\mathcal{Z}_v(s;W,f_\xi^{(s)})\ :=\ \int_{Z_{N,v}\backslash H_v} W_{\varphi_v}|_{H_v}(h_v)f_{\xi,v}^{(s)}(h_v)\mathrm{d}h_v$$

である。ここで, $Z_{N,v}$ は G_v の極大冪零部分群 N_v の中心であり, W_{φ_v} は $\varphi_v\in\pi_v$ に付随する Whittaker vector

$$W_{\varphi_v}(g_v)\ :=\ \ell_\psi\big(\pi_v(g_v).\varphi_v\big)$$

を表す。ℓ_ψ は Whittaker 模型 $\mathrm{Hom}_{G_v}(\pi_v,\mathrm{Ind}_{N_n}^{G_v}\psi_{N_v})$ の非零元である。残る $f_{\xi,v}^{(s)}$ は, H_v の Borel 部分群 $i\left(\begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}\right)$ からの誘導である 主系列表現 $I_v^H(s;\xi):=\mathrm{Ind}_{B_{H,v}}^{H_v}(\xi|\cdot|^s)$ の特別なセクションである。この局所積分表示により, ゼータ積分は カスプ形式 φ が generic でなければ, 消えてしまうことに注意する。

Gelbart と Piatetski-Shapiro は, Casselman-Shalika 公式を使うことで, 全てのデータが不分岐である様な非 Archimedes 素点 $v=p$ に於いて, 上の局所積分が L-関数の不分岐 Euler 因子に一致することを示した;

Proposition 1.1 ([Ge-PS] §4) *G_p の不分岐表現 (i.e. $K_p := G(\mathbb{Q}_p)$-spherical 表現 $)\pi_p$ に対して, $f^{(s)}_{\xi,p}$ を不分岐セクションに採ると*

$$\mathcal{Z}_p(s; W, f^{(s)}_\xi) \;=\; L_p(s; \pi_p \times \xi_p).$$

が成り立つ。 □

<**Strategy to attack the Problem**>
如くして, S を $\{v : \mathbb{Q}$ の素点 $| \, G_v, \pi_v, \xi_v$ の何れかが分岐 $\}$ とする時, 臨界 L-値は

$$L(s_0; \pi \times \xi) \times \prod_{v \in S} \frac{\mathcal{Z}_v(s; W, f^{(s)}_\xi)}{L_v(s; \pi_v \times \xi_v)}\bigg|_{s=s_0} \;=\; \mathcal{Z}(s; \varphi, \xi)\Big|_{s=s_0}$$

と表せることが判った。

ここで, 非 Archimedes 素点 v 上で $\overline{\mathbb{Q}}$-値をとる Whittaker vector からなる部分空間を考えることで, 局所 Whittaker 模型 $\mathcal{W}h_{\psi_v}(\pi_v) := \mathrm{Img}\, \ell_\psi$ に $\boxed{\text{もう一つの } \overline{\mathbb{Q}}\text{-構造}}$ を導入する。

「二つの $\overline{\mathbb{Q}}$-構造のズレとして, Harder 周期 $p(s_0; \pi, \xi)$ を取り出そう」というのが, 我々の基本戦略である。

しかし, "the Bad places" S の中には, Archimedes 素点 ∞ も含まれている。そこで

<**Archimedean zeta and its new vector**>
Cayley 変換により, G_∞ の極大コンパクト群 K_∞ は 対角部分群として $U(2) \times U(1)$ に同型となり, $\pi_\infty \cong D_\Lambda$ の K_∞-type は 整数の三組

$$\mu = [\mu_1, \mu_2; \mu_3] \;\in\; \{\Lambda + m[1,-1;0] + n[1,0;-1] \;|\; m, n \in \mathbb{N}\},$$

でパラメタ付けされる。ここで, (μ_1, μ_2) は $U(2)$-表現の最高ウェイト, μ_3 は $U(1)$-指標 $(u \mapsto u^{\mu_3})$ のパラメタである。各々の基底を Gel'fand-Zetlin basis $\{ \left| \begin{smallmatrix} \mu_1, & \mu_2 \\ & k \end{smallmatrix} \right\rangle \mid \mu_1 \geq k \geq \mu_2 \}$, 及び $\mathbf{1}_{\mu_3}$ と書く。ここで, large 離散系列 $D^{(1,1)}_\Lambda$ の K_∞-type τ_μ に属する K_∞-finite vector w に対して, 付随する Whittaker vector を

$$W^{(\mu, w)}_\Lambda(g) \;:=\; \ell_\psi(\pi_\Lambda(g).w)$$

と定める。また, H_∞ の主系列の Jacquet section を, Schwartz 関数 $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{C}^2)$ から,

$$f^{(s)}_{\xi,\Phi}(h) \;:=\; \int_{\mathbb{C}^\times} \Phi(h^{-1}.[z,z]) \, \xi(z) \, |z|^{2s} \, \mathrm{d}^\times z \;\in\; I^H_\infty(s; \xi)$$

と構成する。

Theorem 1.2 ([Ish], §2) *Large 離散系列 $D^{(1,1)}_\Lambda$ の Harish-Chandra パラメタが, $\Lambda_1 + \Lambda_3 < 0$ を満たす時, Schwartz 関数を*

$$\Phi^{good}(z_1, z_2) \;:=\; \prod_{i=1}^{2} z_i^{m_i} \overline{z_i}^{n_i} \times \exp\big(-\pi |z_i|^2\big),$$

$$\textit{with} \qquad n_1 - m_1 \;=\; m_\xi + \Lambda_3, \qquad n_2 - m_2 \;=\; -\Lambda_3.$$

の様に採ると,

$$\mu = \left[m_\xi - |\Lambda|,\ |\Lambda| + \Lambda_3;\ |\Lambda| - \Lambda_3 - m_\xi \right]$$

として, $k = \Lambda_1 + \Lambda_2 - m_\xi$ 番目の *Gel'fand-Zetlin base* $w = \left| \begin{smallmatrix} \mu_1, \mu_2 \\ k \end{smallmatrix} \right\rangle \otimes 1_{\mu_3}$ に付随する

$$W_\Lambda^{(\mu,w)}\left(\begin{pmatrix} y & & \\ & 1 & \\ & & y^{-1} \end{pmatrix}\right) = c \times y^{\mu_1-\mu_2-1/2} W_{0,k-\mu_1-\mu_2+\mu_3}(2\pi y) \times \left(\left| \begin{matrix} \mu_1, \mu_2 \\ k \end{matrix} \right\rangle \otimes \mathbf{1}_{\mu_3} \right),$$

は, *Gelbart-PS* ゼータ積分に対する *Whittaker new vector* を与える;

$$\mathcal{Z}_\infty(s; W_\Lambda^{(\mu,w)}, f_{\xi,\Phi}^{(s)}) = c \times L_\infty(s; D_\Lambda^{(1,1)}, \xi_{(0,m_\xi)})$$

となる。但し, 定数 c は 明示可能で, 二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{N})$, $N \in \mathbb{Z}[\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, m_\xi]$ に含まれる。□

<Critical set>

この§を終える前に, (1.2) と 上の Theorem 1.2 により,

$$\mathcal{Z}_\infty(0; W, f_{\xi,\Phi}^{(s)}) = A/(2\pi)^B, \qquad \text{with}$$

$$A \in \mathbb{Q}(\sqrt{N}), \quad B = \frac{3}{2}|m_\xi| + |\Lambda_1| + |\Lambda_2| + |\Lambda_3| > 0$$

となることに注意する。ここで, s_0 として 0を採っているが, これは不自然なことではない。実際, 複素変数 s は Hecke 指標 ξ のパラメタ m_ξ によりシフトされるので, algebraic Hecke 指標 ξ を 我々が調べたい cuspidal 表現 π に対する"変数" と見做す方が自然である。そこで, π に対して critical な ξ の集合を

$$\mathrm{Crit}(\pi) := \{E^\times \text{の alg.Hecke 指標 } \xi \mid L_\infty(0; \pi_\infty \times \xi_\infty), L_\infty(1; \pi_\infty{}^\vee \times \xi_\infty^{-1}) \text{ 共に regular } \}$$

と定めると, (1.2) により,

$$\mathrm{Crit}(\pi) = \{m \in \mathbb{Z} \mid -2\ell_\Lambda < m < 2\ell_\Lambda \text{ or } m \text{ is odd}\}$$

と判る。但し, $\ell_\Lambda := \min\{|\Lambda_i|; i = 1,2,3\}$ とした。この設定下では我々の問題は, 各 $\xi \in \mathrm{Crit}(\pi)$ に対して, $L(0; \pi \times \xi)$ の超越パート"$p(\pi)$"$\in \mathbb{C}^\times$ を定め,

$$\frac{L(0; \pi \times \xi)}{p(\pi)}$$

の Aut($\mathbb{C}$)-作用に対する振る舞いを調べることとなる。

2 Foundation : Companion of π

この§ 2では, § 3に於いて $p(\pi)$ を導入する際に 基礎となる結果を説明する。

<Aut($\mathbb{C}$)-action on π>

ここでは, G は 総実代数体 F 上の連結簡約群として, $G(\mathbb{A})$ の保型表現への Aut($\mathbb{C}$)-作用に

関する一般論を思い出す。既約保型表現 $\pi \cong \otimes_{v|\infty}\pi_v \otimes \pi_{\mathrm{fin}}$ に対して, その $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ による作用は ${}^\sigma\pi := \left\{\prod_{v|\infty} {}^\sigma\pi_v\right\} \otimes {}^\sigma\pi_{\mathrm{fin}}$ として, 各成分への作用は次で与えられる。

$$\begin{aligned} {}^\sigma\pi_v(g_v) &:= \pi_{\sigma^{-1}.v}(g_{\sigma^{-1}.v}) && \text{for } \forall v \mid \infty, \\ {}^\sigma\pi_{\mathrm{fin}}(g_{\mathrm{fin}}) &:= t\cdot\pi_{\mathrm{fin}}(g_{\mathrm{fin}})\cdot t^{-1}, && \text{with } t : V_{\pi_{\mathrm{fin}}} \to V' : \sigma\text{-lin.isom.} \end{aligned}$$

但し, Archimedes 素点 $v|\infty$ は, $F \hookrightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ と同一視している。

我々の戦略では, L-臨界値の超越パート (:Harder 周期) の導入に当たり, $L(s;\pi\times\xi)$ のゼータ積分表示 $\mathcal{Z}(s;\varphi,\xi)$ に依拠する。従って, Aut($\mathbb{C}$)-作用による カスピダリティーの保存：

$$\pi : \text{generic cuspidal} \implies {}^\sigma\pi : \text{generic } \underline{\text{cuspidal}}$$

を示すことが, 出発点となる。

L^2-保型形式の空間の構造論によると,

$$L^2\big(G(F)\mathfrak{A}\backslash G(\mathbb{A})\big) \cong L^2_{\mathrm{disc}}\big(G(F)\mathfrak{A}\backslash G(\mathbb{A})\big) \oplus L^2_{\mathrm{cont}}\big(G(F)\mathfrak{A}\backslash G(\mathbb{A})\big),$$

$$L^2_{\mathrm{disc}}\big(G(F)\mathfrak{A}\backslash G(\mathbb{A})\big) \cong L^2_{\mathrm{cusp}}\big(G(F)\mathfrak{A}\backslash G(\mathbb{A})\big) \oplus L^2_{\mathrm{res}}\big(G(F)\mathfrak{A}\backslash G(\mathbb{A})\big).$$

と分解する。これに応じて, ユニタリ保型表現 π を

$$\begin{aligned} \pi \subset L^2_{\mathrm{disc}}\big(G(F)\mathfrak{A}\backslash G(\mathbb{A})\big) &\quad \text{なら} \quad \pi\text{: discrete 保型表現} \\ \pi \subset L^2_{\mathrm{cusp}}\big(G(F)\mathfrak{A}\backslash G(\mathbb{A})\big) &\quad \text{なら} \quad \pi\text{: cuspidal 保型表現} \\ \pi \subset L^2_{\mathrm{res}}\big(G(F)\mathfrak{A}\backslash G(\mathbb{A})\big) &\quad \text{なら} \quad \pi\text{: residual 保型表現} \end{aligned}$$

と呼ぶのであった。Clozel により示された次の事実は, 我々にとって基本的である。

Lemma 2.1 (Clozel; [Clo]) .
$G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現 π が, "cohomological"であるとする。この時,
(1) π が cuspidal なら, ${}^\sigma\pi$ は discrete である。
(2) π が cuspidal かつ generic なら, ${}^\sigma\pi$ も generic である。 □

Clozel は, 更に 一般線形群に対して, カスピダリティの保存を示している；

Proposition 2.2 (Clozel; [Clo]) .
群 G が 一般線形群 $\mathrm{GL}(n)$ の時には, π が cuspidal なら, ${}^\sigma\pi$ も cuspidal である。 □

しかし, 上のステートメントは 一般の簡約群 G では成り立たない。"cohomological"な π の定義を思い出した後に, 準分裂ユニタリ群 $G = \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)$ の場合の remedy を述べる。

<cohomological representations>

ここでの議論は標準的であり, 適切に修正すれば 一般の G でも通用するが, 以下 $G = \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)$, $\widetilde{G} = \mathrm{GU}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)$ として説明する。

$\widetilde{G}(\mathbb{R})$ の極大コンパクト部分群, 中心を其々 $\widetilde{K}_\infty$, Z_{G_∞} とする時, 無限レベル Picard modular surface を

$$\mathcal{S}^{\widetilde{G}} := \varprojlim \widetilde{G}(\mathbb{Q})\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A})/(\widetilde{K}_\infty Z_{G_\infty})\widetilde{K}_{\mathrm{fin}} \tag{2.1}$$

と定める。但し, 逆極限は 開コンパクト部分群 $\widetilde{K}_{\mathrm{fin}} \subset \widetilde{G}(\mathbb{A})_{\mathrm{fin}}$ に関してとっている。ここで, 最高ウェイトが Λ である $\widetilde{G}(\mathbb{C})$ の既約代数表現 M_Λ に付随する $\mathcal{S}^{\widetilde{G}}$ 上の層を $\mathcal{M}_\Lambda$ とすると, 松島-村上同型は

$$H^i(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \cong H^i\Big(\mathfrak{g}, \widetilde{K}_\infty; C^\infty\big(\widetilde{G}(\mathbb{Q})\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A})\big) \otimes_{\mathbb{C}} M_\Lambda^\vee\Big) \tag{2.2}$$

を主張する。ここで, $M_\Lambda^\vee$ は 反傾表現, $\mathfrak{g}$ は 複素 Lie 環 $\big(\mathrm{Lie}\, \widetilde{G}(\mathbb{R})\big) \otimes \mathbb{C}$ を表す。

この同型により, 様々な $(\mathfrak{g}, \widetilde{K}_\infty)$-stable な埋め込み $\iota_V : C^\infty\big(\widetilde{G}(\mathbb{Q})\backslash\widetilde{G}(\mathbb{A})\big) \hookleftarrow V$ 毎に, 層係数 cohomology の中に $\mathrm{Img}\, \iota_V^*$ を考えることが出来る。V として L^2_{disc} の smooth vector 全体をとった時, $\mathcal{S}^{\widetilde{G}}$ の L^2-cohomology を得るが, それは

$$\mathrm{Img}\, \iota^*_{(L^2_{\mathrm{disc}})^\infty} =: H^i_{(2)}(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \cong \bigoplus_{\pi' \subset L^2_{\mathrm{disc}},\, \chi_{\pi'} = \chi_\Lambda} H^i(\mathfrak{g}, \widetilde{K}_\infty; \pi'_\infty \otimes_{\mathbb{C}} M_\Lambda^\vee) \otimes \pi'_{\mathrm{fin}}$$

と, 直和分解することが知られている。ここで, $\chi_{\pi'}$ は π'_∞ の無限小指標である。この分解により, ユニタリ保型表現 π が

$$H^i(\mathfrak{g}, \widetilde{K}_\infty; \pi'_\infty \otimes_{\mathbb{C}} M_\Lambda^\vee) \neq 0 \quad \text{for } \exists\Lambda, i \text{ の時} \quad \pi\text{: cohomological 保型表現}$$

と呼ぶのであった。

後の準備のために, もう少し思い出しておく。V として L^2_{cusp} の smooth vector 全体をとると, $\mathcal{S}^{\widetilde{G}}$ の cuspidal cohomology を得るが, Borel の定理により, それは

$$\mathrm{Img}\, \iota^*_{(L^2_{\mathrm{cusp}})^\infty} =: H^i_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \hookrightarrow H^i_c(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee)$$

と, compct support cohomology に埋め込まれている。更に interior cohomology

$$H^i_!(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) := \mathrm{Img}\left\{H^i_c(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \to H^i(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee)\right\}$$

を考えれば, 三つの cohomology

$$H^i_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \qquad H^i_!(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee) \qquad H^i_{(2)}(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee)$$

を得るが, これらの包含関係により Proposition 2.1 (1) が示される。

実際, Borel-Serre コンパクト化の性質により, $H^i_{\mathrm{cusp}} \subset H^i_!$ となるが, 今 π は cuspidal cohomological なので, $\pi \subset H^i_{\mathrm{cusp}}$ である。ここで, interior cohomology $H^i_!$ が rational であることにより, ${}^\sigma\pi \subset H^i_!$ となるが, $H^i_! \subset H^i_{(2)}$ により ${}^\sigma\pi$ が discrete と判る。

<**Residual representations of** $\mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)(\mathbb{A})$>

ここでは, $G = \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)$ の場合に Clozel の結果 Proposition 2.2 に当たる カスピダリティ保存定理を示す。これは, $G(\mathbb{A})$ の保型 Spectrum の構造を完全に記述した Gelbart-Rogawski の深い結果に依っている。

ユニタリ Hecke 指標 $\tau : \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(1)(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^{(1)}$ と $E^\times$ の Hacke 指標 ξ により, G の Levi M の表現を $\mathrm{diag}(\alpha, \beta, 1/\overline{\alpha}) \mapsto \tau(\beta)\xi(\alpha)$ と決める。これから誘導される $G(\mathbb{A})$ の主系列表現 $\mathrm{Ind}_{B(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(1_N \otimes \tau\xi \otimes e^{2s})$ のセクション $f^{(s)}_{\tau\xi}$ から作られる Eisenstein 級数を

$$E^G(s; g, \tau\xi) := \sum_{\gamma \in B(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})} f^{(s)}_{\tau\xi}(\gamma h),$$

と書く。すると

Proposition 2.3 (Gelbart-Rogawski) .
(1) $G(\mathbb{A})$ の *Eisenstein* 級数 $E^G(s; g, \tau\xi)$ は, $s = 1$ と $s = \frac{1}{2}$ に *possible poles* を持つ。
(2) $s = 1$ での留数は, 保型 *character* になる。即ち, $G(\mathbb{A})$ の一次元表現を生成する。
(3) $s = \frac{1}{2}$ で *pole* を持つ $\iff$ $L(\frac{1}{2}; \mu \times (\frac{\chi_1}{\chi_2})_E) \neq 0$
(4) (3) の時, $s = \frac{1}{2}$ での留数形式は, $G(\mathbb{A})$ の 到る処 *non-tempered* な無限次元既約保型表現 $\pi^{nt}(\chi)$ を生成する。 □

という事が知られている。ここで, 指標の右下 E は その Base Change :$\chi_E(\alpha) := \chi(\alpha/\overline{\alpha})$ を表す。また, μ, χ_1, χ_2 及び, non-tempered な residual 表現 $\pi^{nt}(\chi) := \otimes_v \pi^{nt}(\chi_v)$ の各成分は, 以下で与えられる。

素点 v が非 Archimedean かつ $E/\mathbb{Q}$ で惰性する時,

$$0 \to \pi^{nt}(\chi_v) \to \mathrm{Ind}_{B_v}^{G_v}(\widetilde{\chi}_v \otimes 1_{N_v}) \to \pi^{(2)}(\chi_v) \to 0 \quad : \text{exact},$$

但し, $\widetilde{\chi}_v$ は $\chi_v : H_v \times \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(1) \ni (h_2, h_1) \mapsto \chi_2(\det h_2)\chi_1(h_1) \in \mathbb{C}^{(1)}$ と $\mu_v|_{\mathbb{Q}_v} = \omega_{E_v/\mathbb{Q}_v}$(:CFTchr.) なる指標 $\mu_v : E_v^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ から次の様に作った, Levi M_v の表現である。

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\chi}_v : & M_v & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ & \mathrm{diag}(\alpha, \beta, 1/\overline{\alpha}) & \mapsto & \mu_v(\alpha)|\alpha|_v^{1/2}\chi_{2,E}(\alpha)\chi_1(\alpha) \end{array}$$

素点 v が非 Archimedean かつ $E/\mathbb{Q}$ で分解 (*i.e.* $v = ww'$) する時,

$$\pi^{nt}(\chi_v) \ := \ \mathrm{Ind}_{P_{(2,1)}(E_w)}^{\mathrm{GL}_3(E_w)}(\widetilde{\chi}'_w \otimes 1_{N_{(2,1)}})$$

但し, $\widetilde{\chi}'_w$ は 分割 $(2,1) \vdash 3$ に付随する放物部分群 $P_{(2,1)}$ の Levi $M_{(2,1)}$ の表現である；

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\chi}'_w : & M_{(2,1)} & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ & \mathrm{diag}(m_2, m_1) & \mapsto & \chi_2(\det m_2)|\det m_2|_w^{1/2} m_1 \end{array}$$

素点 v が Archimedean の時は, Harish-Chandra 加群として

$$\pi^{nt}(\chi_\infty) \ \cong \ A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$$

となる non-tempered unitarizable 表現である。但し, $\mathfrak{q} := (\mathrm{Lie}\, P_{(2,1)})_{\mathbb{C}}$ つまり, $A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ は $H^1(\mathfrak{g}, K_\infty; A_{\mathfrak{q}}(\lambda) \otimes M_\chi^\vee) \neq 0$ なる Zuckerman 導来函手加群である。
上の構造定理を使うと, 我々の研究方針の出発点となる次の事実を得る。

Theorem 2.4 三変数準分裂ユニタリ群 $G(A) = \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)(\mathbb{A})$ の既約保型表現 π が, *generic cohomological cuspidal* であれば, その *companion* ${}^\sigma\pi$ も そうである。 □

実際, Lemma 2.1 (1) により, ${}^\sigma\pi$ は 既約 generic cohomological discrete である。従って, ${}^\sigma\pi$ が residual であると仮定して, 矛盾を導けば良い。${}^\sigma\pi$ の genericity により, 保型 character の可能性は排除され, ${}^\sigma\pi \cong \pi^{nt}(\chi)$ でなくてはならない。しかし, その Archimedes 成分は $\pi^{nt}(\chi_\infty) \cong A_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ なので, ${}^\sigma\pi_\infty$ の genericity に反する。 ■
この結果により, Harder のレシピに訴えて $L(0; \pi \times \xi)$ の超越パート"$p(\pi)$"$\in \mathbb{C}^\times$ が定義できる様になった。

3 Result : Period and rationality

この§3では，§1の <**Strategy**> の項で述べた，二つの $\overline{\mathbb{Q}}$-構造を導入し，それらを比較することで Harder 周期 $p(\pi)$ を定義する。この周期により，$G = \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)$ の既約 generic cohomological cuspidal 表現 π に対して critical な ξ について，$L(0;\pi\times\xi)/p(\pi)$ の rationality を述べる。

<**Cohomological interpretation**>

ここでは，Gelbart-PS のゼータ積分 (1.3) の cohomological な解釈を与える。その為に，Harder-Mahnkopf cycle を導入する：

$$F^{\widetilde{H}} := \varprojlim F^{\widetilde{H}}(\widetilde{K}^H_{\mathrm{fin}}), \qquad F^{\widetilde{H}}(\widetilde{K}^H_{\mathrm{fin}}) := \widetilde{H}(\mathbb{Q})\backslash\widetilde{H}(\mathbb{A})/\widetilde{K}^H_\infty\widetilde{K}^H_{\mathrm{fin}}$$

逆極限は 開コンパクト部分群 $\widetilde{K}^H_{\mathrm{fin}} \subset \widetilde{H}(\mathbb{A})_{\mathrm{fin}}$ に関してとっている。$\widetilde{H}$, H に付随する局所対称多様体 $\mathcal{S}^{\widetilde{H}}$(:無限レベル modular curve) 及び，$\mathcal{S}^H$ を (2.1) と同様に定義すると，$F^{\widetilde{H}} \cong \mathcal{S}^{\widetilde{H}} \times \mathbb{R}^\times_>$ なので，

$$p: F^{\widetilde{H}} \cong \mathcal{S}^{\widetilde{H}} \times \mathbb{R}^\times_> \longrightarrow \mathcal{S}^{\widetilde{H}}$$

と射影を決める。また，j と i から 自然に $j: \mathcal{S}^H(K^H_{\mathrm{fin}}) \to \mathcal{S}^{\widetilde{H}}(\widetilde{K}^H_{\mathrm{fin}}), i: F^{\widetilde{H}}(\widetilde{K}^H_{\mathrm{fin}}) \to \mathcal{S}^{\widetilde{G}}(\widetilde{K}_{\mathrm{fin}})$ が定まるが，i は proper map になる。

さて，既約 cuspidal 表現 π が cohomological とすると，$H^2_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{S}^{\widetilde{G}};\mathcal{M}^\vee_\Lambda)$ に現れるが，更に π が generic であるとすると Baruch による強重複度一定理 ([Bar], Thm.7.2.13) により，π_{fin}-isotypic 成分との同型

$$\pi \cong H^2_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{S}^{\widetilde{G}};\mathcal{M}^\vee_\Lambda)(\pi_{\mathrm{fin}})$$

を得る。そこで，ゼータ積分 (1.3) の被積分形式 $\varphi \in \pi$ の像を $[\omega_\varphi]$ とすると，cuspidal 類を得る。再び Borel の定理により，compact support cohomology に埋めて，i で引き戻せば，i の proper 性により

$$[\omega_\varphi] \in H^2_{\mathrm{cusp}}(\mathcal{S}^{\widetilde{G}};\mathcal{M}^\vee_\Lambda) \subset H^2_c(\mathcal{S}^{\widetilde{G}};\mathcal{M}^\vee_\Lambda) \longrightarrow H^2_c(F^{\widetilde{H}};i^*\mathcal{M}^\vee_\Lambda) \ni i^*[\omega_\varphi]$$

を得る。これが $\varphi|_H(h)$ の解釈である。

もう一方の被積分形式 $E^H(s;h,\xi)$ は，section $f^{(s)}_\xi$ の Archimedes 成分を Proposition 1.2 の様に Jacquet section $f^{(s)}_{\xi,\Phi}$, with $\Phi = \Phi^{good}$ と採り，Harder の Eisenstein map ([Har]) により $[\omega_\xi] := \mathrm{Eis}(f^{(0)}_{\xi,\mathrm{fin}})$ と定めると，$\mathcal{S}^H$ 上の 1-Eisenstein 類を得る。これを j で $\mathcal{S}^{\widetilde{H}}$ 上の 1-類に延ばし，p で引き戻すと

$$[\omega_\xi] \in H^1(\mathcal{S}^H,\mathcal{N}^\vee_\mu) \longrightarrow H^1(\mathcal{S}^{\widetilde{H}},\mathcal{N}^\vee_\mu) \longrightarrow H^1(F^{\widetilde{H}},\mathcal{N}^\vee_\mu) \ni p^*j_*[\omega_\xi]$$

を得る。ここで，$\mathcal{N}^\vee_\mu$ は 最高ウェイトが μ である $\widetilde{H}(\mathbb{C})$ 既約代数表現 N_μ の反傾に付随する層である。

ここで，$M_\Lambda|_{\widetilde{H}(\mathbb{C})} \subset N_\mu$ と仮定して，その間の $\widetilde{H}(\mathbb{C})$-同変縮約を $\langle\ ,\ \rangle_M : i^*M^\vee_\Lambda \times N^\vee_\mu \longrightarrow \mathbb{C}$ とする。これとウェッジ積を繋ぐとカップリング

$$\langle\ ,\ \rangle : H^2_c(F^{\widetilde{H}};i^*\mathcal{M}^\vee_\Lambda) \times H^1(F^{\widetilde{H}},\mathcal{N}^\vee_\mu) \longrightarrow H^3_c(F^{\widetilde{H}};\underline{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{C}$$

を得るので, これにより $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$-同変写像

$$
\begin{array}{lrcc}
(3.1) & \mathcal{I}(\pi_{\mathrm{fin}},\xi_{\mathrm{fin}}):\ H^2_{\mathrm{cusp}}\big(\mathcal{S}^{\widetilde{G}};\mathcal{M}^{\vee}_{\Lambda}\big) & \longrightarrow & C\big(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})\big) \\
 & [\omega_{\varphi}] & \mapsto & \Big(g\mapsto \big\langle i^*R^*_g[\omega_{\varphi}],p^*j_*[\omega_{\xi}]\big\rangle\Big)
\end{array}
$$

が定義される。ここで

$$
C\big(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})\big)\ :=\ \big\{f:G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})\to\mathbb{C}\ \big|\ \exists K\subset G(\widehat{\mathbb{Z}})\ \text{ s.t. } f:\text{右 }K\text{-inv.}\big\},
$$

R_g は $g\in G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$ による右移動である。$g=e$ の時, 右辺のカップリングは ゼータ積分の特殊値である ; $\langle i^*[\omega_{\varphi}],p^*j_*[\omega_{\xi}]\rangle=\mathcal{Z}(0;\varphi,\xi)$ ことに注意せよ。ここで重要なことは,

Proposition 3.1 上の $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$-同変写像 (3.1) は, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されている。 □

<Local integral>

ここでは, Whittaker 模型を用いて, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されているもう一つの $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$-同変写像を導入する。

一般に, $\mathbb{C}$-線形空間 V に対して, その $\overline{\mathbb{Q}}$-線形部分空間 $V_{\overline{\mathbb{Q}}}$ が V の $\overline{\mathbb{Q}}$-構造であるとは, $V_{\overline{\mathbb{Q}}}\otimes\mathbb{C}\to V$ が同型となることであった。$C\big(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})\big)$ の元で $\overline{\mathbb{Q}}$-値なもの全体 $C\big(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})\big)_{\overline{\mathbb{Q}}}$ は, $\overline{\mathbb{Q}}$-構造を与える。同様に, π_{fin} の Whittaker 模型

$$
\mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}})\ :=\ \prod_{v<\infty}\mathcal{W}h_{\psi_v}(\pi_v)
$$

にも, $\overline{\mathbb{Q}}$-値 Whittaker 関数全体を考えることで, $\overline{\mathbb{Q}}$-構造 $\mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}})_{\overline{\mathbb{Q}}}$ を考えることが出来る。ここで, Proposition 1.1 により, もう一つの $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$-同変写像を

$$
\begin{array}{lrcc}
(3.2) & \mathcal{T}(\pi_{\mathrm{fin}},\xi_{\mathrm{fin}}):\ \mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}}) & \longrightarrow & C\big(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})\big) \\
 & W_{\mathrm{fin}} & \mapsto & \Big(g\mapsto \prod_{v<\infty}\frac{\mathcal{Z}(s;g_pW_p,f_{\xi,p})}{L_p(s;\pi_p\times\xi_p)}\Big)
\end{array}
$$

と定義すると, その決め方から

$$
\mathcal{T}(\pi_{\mathrm{fin}},\xi_{\mathrm{fin}}):\mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}})_{\overline{\mathbb{Q}}}\longrightarrow C\big(G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})\big)_{\overline{\mathbb{Q}}}
$$

なので

Proposition 3.2 上の $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$-同変写像 (3.2) も, $\overline{\mathbb{Q}}$ 上で定義されている。 □

これで, 二つの $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$-同変写像を得たが, これらを繋ぎ合わせる為に 第三の $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$-同変写像を導入する。

<Fourier Whittaker coefficient>

$G=\mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)$ の既約 generic cohomological cuspidal 表現 π に対し, cuspidal cohomology の π_{fin}-isotypic 成分は, 松島-村上同型 (2.2) により,

$$
H^2_{\mathrm{cusp}}\big(\mathcal{S}^{\widetilde{G}};\mathcal{M}^{\vee}_{\Lambda}\big)(\pi_{\mathrm{fin}})\longrightarrow H^2\big(\mathfrak{g},\widetilde{K}_{\infty};\mathcal{W}h_{\psi_{\infty}}(\pi_{\infty})\otimes M^{\vee}_{\Lambda}\big)\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}})
$$

という射をもつ。また, Proposition 1.2 で求めた Whittaker new vector $W_{\Lambda}^{(\mu,w)}$ から定まる, $H^2\big(\mathfrak{g}, \widetilde{K}_\infty; \mathcal{W}h_{\psi_\infty}(\pi_\infty) \otimes M_\Lambda^\vee\big)$ の 2-類を $\eta_{W,\infty}^{new}$ とする時,

$$\begin{array}{ccc} H^2\big(\mathfrak{g}, \widetilde{K}_\infty; \mathcal{W}h_{\psi_\infty}(\pi_\infty) \otimes M_\Lambda^\vee\big) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}}) & \longleftarrow & \mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}}) \\ \eta_{W,\infty}^{new} \otimes W_{\mathrm{fin}} & \longleftarrow\!\shortmid & W_{\mathrm{fin}} \end{array}$$

なる射を得る。これらから定まる $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$-同変写像

$$\mathcal{F}(\pi_{\mathrm{fin}}) : H^2_{\mathrm{cusp}}\big(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee\big)(\pi_{\mathrm{fin}}) \longrightarrow \mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}})$$

で cuspidal cohomology の $\overline{\mathbb{Q}}$-構造送ると, $\overline{\mathbb{Q}}$-値 Whittaker 関数 $\mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}})_{\overline{\mathbb{Q}}}$ とは別に,

$$\mathcal{F}(\pi_{\mathrm{fin}})\big(H^2_{\mathrm{cusp}}\big(\mathcal{S}^{\widetilde{G}}; \mathcal{M}_\Lambda^\vee\big)(\pi_{\mathrm{fin}})_{\overline{\mathbb{Q}}}\big) \subset \mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}})$$

も $\mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}})$ の $\overline{\mathbb{Q}}$-構造を与える。しかし,

Proposition 3.3 (Clozel; [Clo], Prop.3.1) .
V が $G(\mathbb{A}_{\mathrm{fin}})$-加群として 既約なら, V の $\overline{\mathbb{Q}}$-構造は $\mathbb{C}^\times$-倍を除いて 一意である。 □

により, $\mathcal{W}h_{\psi_{\mathrm{fin}}}(\pi_{\mathrm{fin}})$ の $\overline{\mathbb{Q}}$-構造は一つなので,

$$\exists\, p(\pi) \in \mathbb{C}^\times \quad \text{s.t.} \quad p(\pi)\mathcal{F}(\pi_{\mathrm{fin}}) \text{ が } \overline{\mathbb{Q}}\text{上で定義される}$$

なる $p(\pi)$ が定まる。このスカラーを π の Harder 周期とよび, rational な Fourier Whittaker map を $\mathcal{F}'(\pi_{\mathrm{fin}}) := p(\pi)\mathcal{F}(\pi_{\mathrm{fin}})$ と記す。さすれば,

Theorem 3.4 $G = \mathrm{U}_{E/\mathbb{Q}}(2,1)$ の保型表現 π を 既約 *generic cohomological cuspidal* とする。π に対し *critical* な *Hecke* 指標 $\xi \in \mathrm{Crit}(\pi)$ 毎に,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(\pi_{\mathrm{fin}}, \xi_{\mathrm{fin}})\big([\omega_\varphi]\big) \;=\; & \Big[A/(2\pi)^B \times \Big\{ \prod_{p \in S, p \not| \infty} \frac{\mathcal{Z}_p(0; W_p, \xi_p)}{L_v(0; \pi_p \times \xi_p)} \Big\} \times \frac{L(0; \pi \times \xi)}{p(\pi)} \Big] \\ & \times \mathcal{F}'(\pi_{\mathrm{fin}}) \cdot \mathcal{T}(\pi_{\mathrm{fin}}, \xi_{\mathrm{fin}})\big([\omega_\varphi]\big) \end{aligned}$$

が成り立つ。特に, [ ] 内の比例定数は, $\overline{\mathbb{Q}}$ に属する。 □

参考文献

[Bar] Baruch, E.M., On the gamma factors attached to representations of $\mathrm{U}(2,1)$ over a p-adic field, Israel J. Math., **102** (1997), 317-345.

[Clo] Clozel, L., Motifs et formes automorphes: applications du principe de fonctorialité, *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Vol.I, Academic Press (1990), 77–159

[Ge-PS] Gelbart, S. and Piatetski-Shapiro, I., Automorphic forms and L-functions for the unitary groups, *Lie Group Representations II*, Springer Lecture Notes in Math., **1041** (1984), 141-184.

[Gel] Gelbart, S., On theta-series liftings for unitary groups, *Theta functions: from the classical to the modern*, CRM Proc.Lec.Notes, **1** (1993), 129–174.

[Har] Harder, G., Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case GL_2, Inv. Math., **89** (1987), 37–118.

[Ish] Ishikawa, Y., Whittaker new vectors for discrete series representations of real Lie group $U(2,1)$, 数理解析研究所 講究録 **1826** (2013) 18-23.

[Ro1] Rogawski, J., *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Math. Studies **123**, Princeton Univ.Press (1990).

[Ro2] Rogawski, J., The multiplicity formula for A-packets, *The zeta functions of Picard modular surfaces*, Univ. Montréal (1992), 395–419.

Yoshi-hiro Ishikawa
The Graduate School of Natural Science and Technology,
Department of Mathematics, Okayama University,
Naka 3-1-1 Tushima Okayama, 700-8530, Japan