数理解析研究所講究録
第 1934 巻 2015 年 66-75

相対跡公式と HILBERT モジュラー形式の L 関数の劣凸評価

杉山 真吾
(SHINGO SUGIYAMA)

大阪大学大学院 理学研究科数学専攻
(DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA UNIVERSITY)

1. Introduction

この記事では, GL(2) の相対跡公式を明示的に計算することによって得られる, L 関数の中心値に関する様々な結果を紹介する. 相対跡公式を明示的に計算することが目的であるが, 応用に重点を置いて解説する. ここで述べる結果は都築正男氏 (上智大学) との共同研究である.

2. Notation

F を総実代数体とし $\mathfrak{o}$ をその整数環とする. $\mathbb{A}$ を F のアデール環とする. F のアルキメデス素点全体を Σ_∞ とおく. F の素点 v に対し, F の v での完備化を F_v とし, $|\cdot|_v$ を F_v の正規付値とする. v が F の有限素点の時に, $\mathfrak{o}_v$, $\mathfrak{p}_v$, ϖ_v をそれぞれ F_v の整数環, 極大イデアル, 素元とし, $q_v=|\varpi_v|_v^{-1}$ とする. また, $\mathfrak{o}$ のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して, $\mathfrak{a}$ を割り切る有限素点全体を $S(\mathfrak{a})$ とする.

偶整数の組 $l=(l_v)_{v\in\Sigma_\infty}\in(2\mathbb{N})^{\Sigma_\infty}$ と $\mathfrak{o}$ のイデアル $\mathfrak{n}$ に対して $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{A})$ の既約カスプ保型表現 π で次の 2 つの条件を満たすもの全体を $\Pi(l,\mathfrak{n})$ とする;

- $\forall v\in\Sigma_\infty$ に対して, π の v-成分 π_v が $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ 離散系列表現であり, その極小 $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ タイプが l_v である,
- π の導手 $\mathfrak{f}_\pi$ が $\mathfrak{f}_\pi=\mathfrak{n}$ である.

ここで $\Pi(l,\mathfrak{n})$ は, 重さ l, レベル $\mathfrak{n}$ の正規化 Hecke 固有カスプ正則 Hilbert モジュラー新形式に対応する集合であることに注意しておく.

さてこの時, 与えられた実数値 Hecke 指標 $\eta: F^\times\backslash\mathbb{A}^\times\to\{\pm1\}$ に対して, スタンダード保型 L 関数の中心値 $L(1/2,\pi)$ $(\pi\in\Pi(l,\mathfrak{n}))$ に関する以下のようなレベルアスペクトの平均を考える:

$$\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})}\sum_{\pi\in\Pi(l,\mathfrak{n})}\frac{L(1/2,\pi)L(1/2,\pi\otimes\eta)}{L(1,\pi;\mathrm{Ad})},$$

ここで N($\mathfrak{n}$) は $\mathfrak{n}$ の絶対ノルムであり, $L(s,\pi;\mathrm{Ad})$ は π の adjoint L 関数である. この平均は, 今回扱う相対跡公式を明示的に計算した時にスペクトルサイドとして現れるものである. 次章以降で, "明示的な相対跡公式" の応用として得られる Hecke 固有値の一様分布, 中心 L 値の非消滅, 劣凸評価, そして Royer の結果の一般化について述べる.

3. Equidistribution results

まず Hecke 固有値の一様分布について述べる. 有限素点からなる有限集合 S と実数値 Hecke 指標 $\eta : F^\times\backslash\mathbb{A}^\times \to \{\pm 1\}$ を固定しておく. ここで η の導手 $\mathfrak{f}_\eta$ が $S\cap S(\mathfrak{f}_\eta)=\emptyset$ を満たすようにしておく. $l=(l_v)_{v\in\Sigma_\infty}\in(2\mathbb{N})^{\Sigma_\infty}$ とする.

この時, $S(\mathfrak{n})\cap S=$ となる $\mathfrak{o}$ のイデアル $\mathfrak{n}$ と $\pi\cong\otimes'_v\pi_v\in\Pi(l,\mathfrak{n})$ に対して, π_v は $\mathrm{PGL}(2,F_v)$ のユニタリー化可能不分岐主系列表現となるので, $\pi_v\cong\mathrm{Ind}_{B(F_v)}^{\mathrm{GL}(2,F_v)}(|\cdot|_v^{\nu_v}\boxtimes|\cdot|_v^{-\nu_v})$ となる $\nu_v\in\mathbb{C}/2\pi i(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z}$ が存在する. ここで B は GL(2) の Borel 部分群で, 上三角行列からなるものである.

Definition . 上の状況の下で, $\nu_S(\pi)=(\nu_v)_{v\in S}\in\prod_{v\in S}(\mathbb{C}/2\pi i(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z})$ とおき, $\nu_S(\pi)$ を π の S におけるスペクトルパラメーターという.

$v\in S$ における π_v の佐武パラメーターは $\{q_v^{\nu_v},q_v^{-\nu_v}\}$ となり, 実は ν_v の取り方は 2 通りある. しかし Hecke 固有値を扱う上で問題ないので気にしなくて良い.

π_v はユニタリー化可能だから $\nu_v\in i\mathbb{R}\cup\{x+iy\mid x\in(-1/2,1/2),y\in\{0,\pi(\log q_v)^{-1}\}\}$ ととれるが, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{A})$ の正則保型表現に関する Ramanujan-Petersson 予想 [1] を使うと次が分かる.

Remark 1. [Ramanujan bound] π のスペクトルパラメーター $\nu_S(\pi)$ について

$$\nu_S(\pi)\in\mathfrak{X}_S:=\prod_{v\in S}(i\mathbb{R}/2\pi i(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z})$$

が成り立つ. すなわち $q_v^{\nu_v}+q_v^{-\nu_v}\in\prod_{v\in S}[-2,2]$ が成り立つ.

ここで $\mathfrak{n}$ を割らない有限素点 v に対して, $\pi\in\Pi(l,\mathfrak{n})$ から定まる v での Hecke 作用素の固有値は $q_v^{1/2}(q_v^{\nu_v}+q_v^{-\nu_v})$ であることに注意しておく.

次の漸近公式により, $q_v^{\nu_v}+q_v^{-\nu_v}$ が $[-2,2]$ の中で一様に分布していることが分かる.

Theorem 2. 重さに l に関して $l_v\geq 6$ $(\forall v\in\Sigma_\infty)$ を仮定し, $\eta\neq 1$ とする. $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{o}$ のイデアルで次の 3 つの条件を満たすものとする:

(i) $S(\mathfrak{n})\cap S(\mathfrak{f}_\eta)=\emptyset$,

(ii) $\eta_v(\varpi_v) = -1$ $(\forall v \in S(\mathfrak{n}))$,
(iii)$\prod_{v\infty} \eta_v(-1) \prod_{v\in S(\mathfrak{n})} \eta_v(\varpi_v^{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{n})}) = 1$.

この時, $\delta > 0$ が存在して, $\prod_{v\in S} \mathbb{C}/2\pi i(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z}$ 上の任意の正則な複素数値偶関数 α に対して,

$$\frac{1}{\mathrm{N}(\mathfrak{n})} \sum_{\pi\in\Pi(l,\mathfrak{n})} \frac{L(1/2,\pi)L(1/2,\pi\otimes\eta)}{L^{S_\pi}(1/2,\pi,\mathrm{Ad})}\alpha(\nu_S(\pi))$$

$$=\frac{4D_F^{3/2}}{(2\pi)^{[F:\mathbb{Q}]}}\{\prod_{v\in\Sigma_\infty} \frac{\{(l_v/2-1)!\}^2}{(l_v-2)!}\}C(\mathfrak{n})L_{\mathrm{fin}}(1,\eta)\int_{\mathfrak{X}_S} \alpha(s)d\mu(s) + \mathcal{O}(\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{-\delta})$$

が成立する. ここで, $C(\mathfrak{n}) = \prod_{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{n})\geq 3}(1-q_v^{-2})\prod_{\mathrm{ord}_v(\mathfrak{n})=2}(1-(q_v^2-q_v)^{-1})$, $\mu = \prod_{v\in S}\mu_v$ であり, $i\mathbb{R}/2\pi i(\log q_v)^{-1}\mathbb{Z}$ 上の測度 μ_v は

$$\mu_v(iy) = \begin{cases} \dfrac{q_v-1}{(q_v^{1/2}+q_v^{-1/2}-x)^2}\ \mu_{\mathrm{ST}}(x) & (\eta_v(\varpi_v)=1), \\ \dfrac{q_v+1}{(q_v^{1/2}+q_v^{-1/2})^2-x^2}\ \mu_{\mathrm{ST}}(x) & (\eta_v(\varpi_v)=-1). \end{cases}$$

(ただし変数変換は $x = q_v^{iy} + q_v^{-iy}$) で定める) で定義される. $\mu_{ST}(x)$ は佐藤-Tate 測度 $(2\pi)^{-1}\sqrt{4-x^2}dx$ であり, μ_{ST} と μ_v は $[-2,2]$ 上の確率測度である.

Remark 3. 先行結果としては以下の 5 つが知られている.

(1) $F = \mathbb{Q}$, $l \geq 4$, レベル $\mathfrak{n}$ は素数, $\eta_\infty(-1) = -1$ の条件の下で Ramaksishnan, Rogawski [9] は Theorem 2 を考察した.
(2) F は総実代数体, $l \geq 4$, レベル $\mathfrak{n}$ は square free で $\eta_v(-1) = -1$ $(\forall v|\infty)$ の条件の下で Feigon, Whitehouse [2] は Theorem 2 を考察した.
(3) File, Martin, Pitale [3] は $S(\mathfrak{f}_\eta) \cap S(\mathfrak{n}) \neq \emptyset$ の場合, すなわち $\mathfrak{f}_\eta$ と $\mathfrak{n}$ が共通素因子を持つ場合に Theorem 2 を考察した.
(4) 都築 [14] は square free レベルの非正則 Hilbert 保型形式 (Maass 波動形式) の場合の類似公式を与えた.
(5) 筆者 [11] は都築氏の結果を一般のレベルの場合に拡張した.

本研究の結果 Theorem 2 は, Feigon, Whitehouse, の結果の一般化である. Feigon, Whitehouse の証明では大域 Jacquet-Langlands 対応を使っているため, $\mathfrak{n}$ が square free であるというレベルの条件と $\eta_v(-1) = -1$ $(\forall v \in \Sigma_\infty)$ という指標の条件はともに不可欠であった. 一方, 本研究では大域 Jacquet-Langlands 対応を使う代わりに保型 Green 関数を導入しているため, レベルと指標に関する条件を外すことにができた.

講演の際は触れなかったが, 応用として中心値の非消滅に関する結果が得られるので紹介する. Chebotarev の密度定理により, $\mathfrak{f}_\eta$ を割らない素イデアル $\mathfrak{p}$ で $\eta_\mathfrak{p}(\varpi_\mathfrak{p}) = -1$ となるもの全体 $\mathcal{I}_{inert}$ は素イデアル全体の集合の中で密度が 1/2 である. よって特に, $\mathcal{I}_{\text{inert}}$ は無限集合である. $\mathcal{I}_{\text{inert}} = \{\mathfrak{p}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ と書ける. $\mathcal{I}_S^\eta$ を, $\mathfrak{n} = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathcal{I}_{\text{inert}}} \mathfrak{p}^{n_\mathfrak{p}}$ の形の $\mathfrak{o}$ のイデアルで, $\prod_{v\in\Sigma_\infty} \eta_v(-1) \prod_{\mathfrak{p}\in\mathcal{I}} \eta_\mathfrak{p}(\varpi_\mathfrak{p})^{n_\mathfrak{p}} = 1$ を満たすもの全体とする. この時 Theorem 2 より, 中心値の非消滅に関する次の系が得られる.

Corollary 4. $\{\mathfrak{n}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を, $\mathcal{I}_S^\eta$ の元からなる列で $\lim_{k\to\infty} \mathrm{N}(\mathfrak{n}_k) = \infty$ を満たすものとする. また $\{[a_v, b_v]\}_{v\in S}$ を $[-2, 2]$ の部分区間からなる族とする. この時 $N_0 > 0$ が存在して, $\mathrm{N}(\mathfrak{n}_k) > N_0$ となる任意の k に対して以下の 2 つの条件を満たすカスプ保型表現 $\pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ が存在する:

- $L(1/2, \pi) \neq 0$ かつ $L(1/2, \pi \otimes \eta) \neq 0$,
- スペクトルパラメーター $\nu_S(\pi) = (\nu_v)_{v\in S}$ が $q_v^{\nu_v} + q_v^{-\nu_v} \in [-2, 2]$ を満たす.

Weierstrass の多項式近似定理を用いることにより, Theorem 2 の中のテスト関数 α は連続関数でもよいことが分かるので, 特に α として $\prod_{v\in S}[a_v, b_v]$ の特性関数を取れば良いことが分かる ($\prod_{v\in S}[a_v, b_v]$ の特性関数はもちろん連続関数ではないが, 有界区間は正則 Borel 集合であることに注意せよ).

4. Subconvexity estimates

$\pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ に付随するスタンダード保型 L 関数 $L(s, \pi)$ の凸評価 (convexity estimate) とは, 任意の $\epsilon > 0$ に対する

$$L_{\text{fin}}(1/2, \pi) \ll_\epsilon \mathrm{N}(\mathfrak{n})^{1/4+\epsilon} \Big(\prod_{v\in\Sigma_\infty} l_v\Big)^{1/2+\epsilon}$$

という評価のことをいう. ここでこの不等式において無視した定数は $l, \mathfrak{n}, \pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ に依存しない (ϵ には依存してよい). この評価は L 関数の関数等式と Phragmen-Lindelöf の定理から従うものである.

Conjecture 5. [Lindelöf 予想] 任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$L_{\text{fin}}(1/2, \pi) \ll_\epsilon \mathrm{N}(\mathfrak{n})^\epsilon \Big(\prod_{v\in\Sigma_\infty} l_v\Big)^\epsilon, \quad \pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$$

が成立.

この Lindelöf 予想は, $L(s, \pi)$ の一般 Riemann 予想を仮定すると成り立つ.

以上から, 凸評価よりも精密な評価を得るという解析的整数論の問題が生じる. 凸評価よりも良い評価のことを劣凸評価 (subconvexity estimate) という.

Remark 6. 先行結果としては次が知られている.

(1) Peng [8], Julita, 本橋 [5] は $F=\mathbb{Q}$ の場合に

$$L_{\mathrm{fin}}(1/2,\pi) \ll_\epsilon (\prod_{v\in\Sigma_\infty} l_v)^{1/3+\epsilon}, \quad \pi\in\Pi(l,\mathbb{Z})$$

を示している.

(2) Michel, Venkatesh[6] は, $\theta>0$ が存在して

$$L_{\mathrm{fin}}(1/2,\pi) \ll \mathrm{N}(\mathfrak{n})^{1/4-\theta}(\prod_{v\in\Sigma_\infty} l_v)^{1/2-\theta}, \quad \pi\in\Pi(l,\mathfrak{n})$$

が成り立つことを示している.

明示的な相対跡公式を使うと, L 関数の中心値に関する次の新しい評価が得られる.

Theorem 7. 重さ l は $l_v\geq 6$ $(\forall v\in\Sigma_\infty)$ を満たすとする. $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{o}$ のイデアルとする (Theorem 2 の時とは異なり, $\mathfrak{n}$ は任意で良い!). また $\eta_v(-1)=-1$ $(\forall v\in\Sigma_\infty)$ とする. この時, 任意の $\epsilon>0$ に対して,

$$|L_{\mathrm{fin}}(1/2,\pi)L_{\mathrm{fin}}(1/2,\pi\otimes\eta)| \ll_\epsilon \mathrm{N}(\mathfrak{f}_\eta)^{3/4+\epsilon}\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{1+\epsilon}(\prod_{v\in\Sigma_\infty} l_v)^{7/8+\epsilon}$$

が成り立つ.

Remark 8. 類体論により $\eta: F^\times\backslash\mathbb{A}^\times\to\{\pm1\}$ に対応する F の CM 拡大体を E とする. この時,

$$|L_{\mathrm{fin}}(1/2,\mathrm{BC}_{E/F}(\pi))| \ll_\epsilon \mathrm{N}(\mathfrak{f}_\eta)^{3/4+\epsilon}\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{1+\epsilon}(\prod_{v\in\Sigma_\infty} l_v)^{7/8+\epsilon}.$$

ここで $\mathrm{BC}_{E/F}$ は E/F に付随する GL(2) のベースチェンジリフティングである.

最初に紹介した凸評価は $L(1/2,\mathrm{BC}_{E/F}(\pi))$ の場合では

$$|L_{\mathrm{fin}}(1/2,\mathrm{BC}_{E/F}(\pi))| \ll_\epsilon \mathrm{N}(\mathfrak{f}_\eta)^{1/2+\epsilon}\mathrm{N}(\mathfrak{n})^{1/2+\epsilon}(\prod_{v\in\Sigma_\infty} l_v)^{1+\epsilon}$$

となるので, Theorem 7 は重さアスペクトで 2 次ベースチェンジ L 関数の劣凸評価を与えている (レベルと指標の導手に関しては評価は悪くなっている).

5. A generalization of Royer's result

Birch–Swinnerton-Dyer 予想は整数論において有名かつ重要な未解決問題の一つである. この予想は楕円曲線, アーベル多様体に付随する L 関数の $s=1/2$ での位数と Mordel-Weil 群の階数は一致するという予想であるから, L 関数の高階導関数の 1/2 での値 (中心微分値) や Mordel-Weil 群の階数は重要な研究対象である.

ここで $S_2(N)$ を重さ 2, レベル N の楕円カスプ形式全体とし, $f \in S_2(N)$ に対して $L(s,f)$ は s と $1-s$ に関する関数等式を持つ f のスタンダード保型 L 関数とする. Royer [7] は $f \in S_2(N)$ に対する $L(s,f)$ の中心値 $L(1/2,f)$, 中心微分値 $L'(1/2,f)$ の非消滅を調べることによって, モジュラー曲線 $X_0(N) = \Gamma_0(N)\backslash\mathfrak{h} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ の Jacobi 多様体の $\mathbb{Q}$ 単純因子の Mordel-Weil 群の階数と次元の増大度を明示的に与えた. $L(1/2,f)$ に関係する Royer [7] の結果を楕円モジュラー形式の言葉で書き直すと以下のように述べられる.

Theorem 9. [Royer] p を素数とする. この時, $C_p > 0$ と $N_p \in \mathbb{N}$ が存在して, 次が成り立つ:

$(N,p)=1$ となる任意の $N > N_p$ に対して重さ 2, レベル N の正規化 Hecke 固有新形式 $f \in S_2(N)$ が存在して,

- $[\mathbb{Q}(f):\mathbb{Q}] \geq C_p\sqrt{\log\log \mathrm{N}}$,
- $L(1/2,f) \neq 0$,

となる. ここで $\mathbb{Q}(f)$ は f の Hecke 体である.

明示的な相対跡公式を用いると, 以下の定理が得られる.

Theorem 10. $\eta \neq \mathbf{1}$ とする. 重さ l は平行であり, 6 以上とする. つまり, 6 以上の偶数 k が存在して, 任意の無限素点 v に対して $l_v = k$ を満たすとする. $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{o}$ の任意の素イデアルとする. η_v $(v \in \Sigma_\infty)$ に関する条件は課さなくてよい. この時, $C_{\mathfrak{p}} > 0$ と $N_{\mathfrak{p},l,\eta} \in \mathbb{N}$ が存在して, 次が成立する:

$\mathrm{N}(\mathfrak{n}) > N_{\mathfrak{p},l,\eta}$ となる任意のイデアル $\mathfrak{n} \in \mathcal{I}^{\eta}_{S\cup\{\mathfrak{p}\}}$ に対して $\pi \in \Pi(l,\mathfrak{n})$ が存在して,

- $[\mathbb{Q}(\pi):\mathbb{Q}] \geq C_{\mathfrak{p}}\sqrt{\log\log \mathrm{N}(\mathfrak{n})}$,
- $L(1/2,\pi)L(1/2,\pi\otimes\eta) \neq 0$,

となる. ここで $\mathbb{Q}(\pi)$ は π の Hecke 体である.

この Theorem 10 は [13] で述べられている. [13] の結果は本講演の Theorem 10 よりも改良されており, [13] では中心微分値 $L'(1/2,\pi)$ に関する結果も述べられていることに注意せよ.

6. Sketch of the proof

証明を厳密に述べても分かりにくいと思うので, 本質的にどういう計算を行ったのかを述べるに留める. この章では "周期積分の正規化" や "Green 関数の正規化" は省略するので数学的には不正確な箇所がある. 証明の詳細は [12] を参照せよ.

T を GL(2) の対角的極大分裂トーラスとし, Z を GL(2) の中心とする. 直感的には核関数 $K_f(x,y)$ の 2 重積分

$$\int_{Z(\mathbb{A})T(F)\backslash T(\mathbb{A})}\int_{Z(\mathbb{A})T(F)\backslash T(\mathbb{A})} K_f(t_1,t_2)\eta(\det t_2)dt_1dt_2$$

を計算すればよいが, $Z(\mathbb{A})T(F)\backslash T(\mathbb{A}) \cong F^{\times}\backslash\mathbb{A}^{\times}$ の体積が ∞ であることから積分の発散の問題をうまく処理しなければならない.

ここでは重積分を正規化する代わりに, 保型形式 $\hat{\Psi}(\alpha; g)$ に関する積分

$$\int_{Z(\mathbb{A})T(F)\backslash T(\mathbb{A})} \hat{\Psi}(\alpha; t)\eta(\det t)dt$$

を考える.

$\hat{\Psi}(\alpha; g)$ は l と $\mathfrak{n}$ と α に付随する $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ 上の保型形式であり, 保型 Green 関数と呼ばれる. $\hat{\Psi}(\alpha; g)$ は関数 $\Psi(\alpha; g)$ の Poincaré 級数

$$\hat{\Psi}(\alpha; g) = \sum_{\gamma \in T(F)\backslash \mathrm{GL}(2,F)} \Psi(\alpha; \gamma g)$$

で定義される.

まず, Green 関数は $\mathrm{GL}(2, \mathbb{A})$ 上のなめらかな複素数値関数として以下の Euler 積で定義される: パラメーター $s \in \mathbb{C}^S$ に対して,

$$\Psi(s, g) = \prod_{v \in \Sigma_\infty} \Psi_v(l_v, g_v) \prod_{v \in S} \Psi_v(s_v, g_v) \prod_{v \notin \Sigma_\infty \cup S} \Psi_v(\mathfrak{n}, g_v).$$

ここで $\Psi_v(l_v, g_v)$ は平野 [4] で計算された新谷関数であり, $\Psi_v(s_v, g_v)$ は都築 [14] で定義された Green 関数である. 残りの $\Psi_v(\mathfrak{n}, g_v)$ は Hecke 合同部分群 $\mathbf{K}_0(\mathfrak{n}\mathfrak{o}_v)$ の '特性関数' である.

この時, 正則な偶関数 α に対して以下の多重経路積分を考えることにより, Green 関数を α を変数とする超関数とみなせる:

$$\Psi(\alpha; g) = (\frac{1}{2\pi})^{\#S} \int_{(\mathrm{Re}(s_v))_{v \in S} = (\sigma_v)_{v \in S}} \Psi(s, g)\alpha(s)d\lambda(s).$$

ただし, $d\lambda(s) = \prod_{v \in S} d\lambda_v$, $d\lambda_v = 2^{-1}(\log q_v)(q_v^{(1+s_v)/2} - q_v^{(1-s_v)/2})ds$ であり, σ_v は十分大きい実数とする. Caushy の積分定理により, 上の積分は σ_v の取り方に依らない.

さて, カスプ形式 $\varphi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ に対して φ の (T, η) 周期積分を

$$P^\eta(\varphi) = \int_{Z(\mathbb{A})T(F)\backslash T(\mathbb{A})} \varphi(t)\eta(\det t)dt$$

で定義するとき, $P^\eta(\hat{\Psi}(\alpha; -))$ を 2 通りの異なる方法で展開することによって, 相対跡公式を導出してみよう.

まずスペクトルサイドを得るために, $\hat{\Psi}(\alpha; -)$ をスペクトル展開する. $\hat{\Psi}(\alpha; -)$ は重さ l, レベル $\mathfrak{n}$ のカスプ形式なので, 連続スペクトルと留数スペクトルは現れない (Eisenstein 級数と 1 次元保型表現は現れない). よって, 以下のスペクトル展開を得る.

$$\hat{\Psi}(\alpha; g) = C \sum_{\pi \in \cup_{\mathfrak{c}|\mathfrak{n}} \Pi(l, \mathfrak{c})} \sum_{\varphi} \alpha(\nu_S(\pi))\overline{P_T^1(\varphi)}\varphi(g)$$

ここで $C \neq 0$ は $l, \mathfrak{n}, \eta$ に依存する明示的定数である．また φ は, π の元で重さ l, レベル $\mathfrak{n}$ のものからなる π の部分空間の正規直交基底を動く．上のスペクトル展開は保型 Green 関数とカスプ形式の L^2 内積が周期積分で書けるという性質から得られるものである．したがって, 保型 Green 関数の (T, η) 周期積分は

$$P^{\eta}(\hat{\Psi}(\alpha; -)) = C \sum_{\pi \in \cup_{\mathfrak{c}|\mathfrak{n}} \Pi(l, \mathfrak{c})} \sum_{\varphi} \alpha(\nu_S(\pi)) \overline{P^1(\varphi)} P^{\eta}(\varphi)$$

と表すことができる．この式の右辺を相対跡公式のスペクトルサイドと呼ぶ.

一方, トーラス T による両側剰余類空間 $T \backslash \mathrm{GL}(2)/T$ を用いて保型 Green 関数の定義式を変形すると,

$$\hat{\Psi}(\alpha; g) = \sum_{\gamma \in T(F) \backslash \mathrm{GL}(2,F)/T(F)} \sum_{\delta \in T_\gamma(F) \backslash T(F)} \Psi(\alpha, \gamma\delta g)$$

となる．ここで $T_\gamma = \gamma^{-1} T \gamma \cap T$ とおいた．さらに

$$J_\gamma(g) = \sum_{\delta \in T_\gamma(F) \backslash T(F)} \Psi(a; \gamma\delta g)$$

とおくと, 保型 Green 関数の (T, η) 周期積分は

$$P^{\eta}(\hat{\Psi}(\alpha; -)) = \sum_{\gamma \in T(F) \backslash \mathrm{GL}(2,F)/T(F)} P^{\eta}(J_\gamma(\alpha; -))$$

と表せる．この式の右辺を幾何サイドと呼び, $P^{\eta}(J_\gamma(\alpha; -))$ は軌道積分と呼ぶ.

実際は, 普通に計算すると軌道積分 $P^{\eta}(J_\gamma(\alpha; -))$ が発散してしまうので, 周期積分の‘正規化’が必要である．この正規化のもとでスペクトルサイドと幾何サイドを明示的に計算すると, スペクトルサイドには $L(1/2, \pi) L(1/2, \pi \otimes \eta)/L(1, \pi, \mathrm{Ad})$ に関する和が現れ, 幾何サイドの主要項には $\int_{\mathfrak{X}_S} \alpha(s) d\mu(s)$ が現れるので先に述べた種々の結果が得られるのである．注意として, スペクトルサイドの計算の際に old form の空間の正規直交基底を明示的に求めなければならないが, それについては著者の先行結果 [10] を使えばよい.

Theorem 7 を得るには, 十分大きいパラメター $K \geq 2$ に対して $S = \{v \in \mathcal{I}_{\mathrm{inert}} - S(\mathfrak{n}) \mid K \leq q_v \leq 2K\}$ とおき, 与えられた $\pi \in \Pi(l, \mathfrak{n})$ に対して, テスト関数として

$$\alpha^{\pi}(s) = \left(\sum_{v \in S} \{ (q_v^{\nu_v} + q_v^{-\nu_v})(q_v^{s_v} + q_v^{-s_v}) - (q_v^{2s_v} + q_v^{-2s_v} + 1) \} \right)^2, s = (s_v)_{v \in S}$$

(ただし $\nu_S(\pi) = (\nu_v)_{v \in S}$ とおいた) を採用して, $K \asymp (\prod_{v \in \Sigma_\infty} l_v)^{1/8}$ とすればよい.

また Theorem 10 は, $S=\{v\}$(ただし v は $\mathfrak{p}$ に対応する素点) とおいて, 非負整数 n に依存する

$$\alpha(s)=\frac{q_v^{(n+1)s}-q_v^{-(n+1)s}}{q_v^s-q_v^{-s}}$$

をテスト関数として計算すれば得られる.

7. ACKNOWLEDGEMENTS

今回講演の機会と報告集執筆の機会を与えて下さった世話人の石井卓先生, 成田宏秋先生にはこの場を借りて大変感謝致します. またこの研究において筆者は日本学術振興会より助成・特別研究員奨励費を受けております (特別研究員 DC2, 25-668).

References

[1] Blasius, D., *Hilbert modular forms and the Ramanujan conjecture*, Noncommutative Geometry and Number Theory, Aspects Math. E37, Vieweg, Wiesbaden 2006, 35–56.
[2] Feigon, B., Whitehouse, D., *Averages of central L-values of Hilbert modular forms with an application to subconvexity*, Duke. Math. J., **149** (2009), 347–410.
[3] File, D., Martin, K., Pitale, A., *Test vectors and central L-values for* GL(2), preprint.
[4] Hirano, M., *Shintani functions on* $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, Trans. of Amer. Math. Soc. **352** No.4 (2000), 1709–1721.
[5] Jutila, M., Motohashi, Y., *Uniform bound for Hecke L-functions*, Acta Math., **195** (2005), 61–115.
[6] Michel, P., Venkatesh, A., *The subconvexity problem for* GL_2, Publ. I.H.E.S., **111** (2010), 171–271.
[7] Royer, E., *Facteurs* $\mathbb{Q}$*-simples de* $J_0(N)$ *de grande dimension et de grand rang,* Bull. Soc. Math. France 128 (2000), no. 2, 219–248.
[8] Z. Peng, Z., *Zeros and central values of automorphic L-functions*, Ph.D thesis, Princeton University, Princeton, 2001.
[9] D. Ramakrishnan, J. Rogawski, *Average values of modular L-series via the relative trace formula*, Pure and Appl. Math. Q. **1** No.4, 701-735, 2005.
[10] Sugiyama, S., *Regularized periods of automorphic forms on GL(2)*, Tohoku Math. J. **65**, no.3 (2013), 373–409.
[11] Sugiyama, S., *Asymptotic behaviors of means of central values of automorphic L-functions for GL(2)*, preprint. http://arxiv.org/abs/1312.2732
[12] Sugiyama, S., Tsuzuki, M., *Relative trace formulas and subconvexity estimates of L-functions for Hilbert modular forms*, preprint. http://arxiv.org/abs/1305.2261
[13] Sugiyama, S., Tsuzuki, M., *Existence of Hilbert cusp forms with nonvanishing L-values*, preprint. http://arxiv.org/abs/1406.2902
[14] Tsuzuki, M., *Spectral square means of central values of automorphic L-functions for* GL(2), to appear in Mem. Amer. Math. Soc., available at http://pweb.cc.sophia.ac.jp/tsuzuki/publication/MaassformGL(2).pdf

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, Toyonaka, Osaka 560-0043, Japan
E-mail address: s-sugiyama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp