数理解析研究所講究録
第 1934 巻 2015 年 146-151

ゼータ関数の微分の零点について

Takashi Nakamura
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

概要

この論説では我々の論文 [14] について解説する．その主結果を雑に言えば，右半臨界領域で絶対収束する Dirichlet 級数を係数に持つリーマンゼータ関数の 1 次以上の多項式の $k\in\mathbb{N}$ 回微分は右半臨界領域で零点を持ち，その系として，概均質ベクトル空間のゼータ関数の特別な場合，スペクトルゼータ関数の特別な場合，など数多くのゼータ関数の k 回微分は右半臨界領域で零点を持つ，というものである．

§1 で主結果を述べる．§2 では zeta 関数の普遍性定理について簡単にまとめる．§3 は Riemann zeta 関数の微分の零点に関する結果の紹介である．最後の §4 で主結果について補足説明を与える．

1 主結果

$\mathbb{N}$ を 1 以上の整数とし，関数 $L(s)$ の $k\in\mathbb{N}$ 回微分を $L^{(k)}(s)$ で表す．一般 Dirichlet 級数を絶対収束する領域で $\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{-\lambda_ns}$, $a_n\in\mathbb{C}$, $\lambda_n>0$ で定義する．$\mathcal{D}_s$ を $\sigma>1/2$ で絶対収束する一般 Dirichlet 級数の成す環とする．$\mathcal{D}_s[X]$ を $\mathcal{D}_s$ を係数とする多項式環とする．主定理に現れる hybrid universality は次の章で定義する．

Main Theorem 1. 関数 $L(s)$ は *hybrid universality* を持ち，$P_s\in\mathcal{D}_s[X]$ は単項式でない最高次数が 1 以上の多項式，または $P_s\in\mathcal{D}_s[X_0,X_1,\dots,X_l]$ において $X_1,\dots,X_l$ の次数の少なくと一つは 1 以上とする．このとき，$P_s(L(s),L^{(1)}(s),\dots,L^{(l)}(s))$ は $D:=\{s\in\mathbb{C}:1/2<\Re(s)<1\}$ 内に無限個の零点を持つ．正確には，任意の $1/2<\sigma_1<\sigma_2<1$ に対し，関数 $P_s(L(s),L^{(1)}(s),\dots,L^{(l)}(s))$ は長方領域 $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$, $0<t<T$, ただし $T>0$ は充分大，内に cT 超個の零点を持つ．

Corollary 1.1. 関数 $L(s)$ は *hybrid universality* を持ち，$P_s\in\mathcal{D}_s[X]$ は最高次数が 1 以上の多項式とする．このとき，任意の $1/2<\sigma_1<\sigma_2<1$ に対し，関数 $(d/ds)^kP_s(L(s))$, ただし $k\in\mathbb{N}$, は長方形領域 $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$, $0<t<T$, $T>0$ は充分大，内に cT 超個の零点を持つ．

主定理において，$\zeta(s)+\zeta(2s)$ や $\zeta^2(s)-\zeta'(s)$ とその $k\in\mathbb{N}$ 回微分などは仮定の条件を充たしているが，$\zeta(2s)\zeta(s)$ などは除外される．この定理において，$P_s\in\mathcal{D}_s[X]$ は単項式でない最高次数が 1 以上の多項式の場合のみを扱ったのが [15, Main Theorem 1] である．

次の定理は零点の個数の上からの評価である．種々の仮定を必要としているが，関数 $L(s)$ が hybrid universality を持つ場合は，それらを充たす場合が殆どである．一般に個数の評価は上からよりも下からの方が難しいと考えられていることを注意しておく．この本論説でも下からの評価である Main Theorem 1 の方が重要であり，その証明は深い．

Theorem 1.2. 関数 $L(s)$ を $\sigma > 1$ で絶対収束する一般 *Dirichlet* 級数で，$\sigma > 1/2$ に有理型に解析接続され，有限個の極を持ち，それらは全て $\sigma = 1$ 上にあるとする．さらに関数 $L(s)$ のオーダーは有限で，任意の $1/2 < \sigma < 1$ に対し，次を充たすと仮定する．

$$\int_2^T \left|L^{(j)}(\sigma + it)\right|^2 dt = O(T), \qquad 0 \leq j \leq l, \quad T \geq 2.$$

このとき，任意の $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ に対し，関数 $P_s(L(s), L^{(1)}(s), \ldots, L^{(l)}(s))$ は長方形領域 $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $0 < t < T$, ただし $T > 0$ は充分大，内に CT 個以下の零点を重複度も込めて持つ．

Corollary 1.3. 関数 $L(s)$ は上の定理の条件を充たすとする．このとき，任意の $1/2 < \sigma_1 < \sigma_2 < 1$ に対し，関数 $(d/ds)^k P_s(L(s))$, ただし $k \in \mathbb{N}$, は長方領域 $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $0 < t < T$, ただし $T > 0$ は充分大，内に CT 個以下の零点を重複度も込めて持つ．

2 普遍性定理

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ に対して，$\sigma > 1$ では

$$\zeta(\sigma)^{-1} \leq |\zeta(s)| \leq \zeta(\sigma)$$

となる．しかし $\sigma \leq 1$ ではこのような簡単な評価はできず，1914 年に示された次の定理が成り立つ ([10, 第 6 章] 参照)．余談であるが，今年 2014 年は上記のゼータ関数の稠密性定理 100 周年である．

Theorem A (Bohr and Courant). 任意に固定した $1/2 < \sigma < 1$ に対し，$\{\zeta(\sigma+it) : t \in \mathbb{R}\}$ は $\mathbb{C}$ で稠密である．

この結果の関数空間への拡張が，ゼータ関数の普遍性と呼ばれるものである．普遍性定理の歴史，証明，一般化等については [6], [9], [18] を参照して頂きたい．

meas(A) で集合 A の Lebesgue 測度とし，$\nu_T\{\ldots\} := T^{-1}\mathrm{meas}\{\tau \in [0,T] : \ldots\}$, $\ldots$ の部分には τ が充たす条件が書かれる．K を $D := \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \Re(s) < 1\}$ に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする．

Theorem B (Voronin). $f(s)$ を K 上で連続で零点を持たず，K の内部で正則な関数とする．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left\{\max_{s\in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

この定理は普遍性定理（universality theorem）と呼ばれるものであり，手短に言えば，零点を持たない任意の正則関数は Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の平行移動により一様に近似でき，しかも近似できる τ の密度は正であることを意味する．Riemann ゼータ関数の普遍性定理は Voronin により 1975 年に証明された．

次に hybrid universality について述べる．これは適当な日本語訳がないので混合普遍性と訳しておく．簡単に言えば，混合普遍性とは普遍性定理と Kronecker の近似定理の融合である．$\|x\|$ で実数 x と整数の距離で最小のものとする．

Definition 2.1. L関数$L(s)$が*hybrid universality*を持つとは，以下の性質を充たすことである．$f(s)$をK上で連続で零点を持たず，Kの内部で正則な関数，$\{\alpha_j\}_{1\leq j\leq n}$を$\mathbb{Q}$上一次独立な実数とし，$\{\theta_j\}_{1\leq j\leq n}$を実数とする．このとき任意の$\varepsilon>0$に対して，

$$\liminf_{T\to\infty}\nu_T\left\{\max_{s\in K}|L(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon,\ \max_{1\leq j\leq n}\|\tau\alpha_j-\theta_j\|<\varepsilon\right\}>0.$$

Gonek [3] により Dirichlet L 関数は hybrid joint universality を持つことが証明されている．その後 Kaczorowski と Kulas [4] により改良され，Pańkowski [16] が最も一般的な形で述べている．即ち, Euler 積を持ち，その他良い条件を充たすような L 関数は hybrid universality を持つ.

3 Riemann ゼータ関数の微分の零点

Riemann ゼータ関数の微分の零点については数多くあるが，本論説では古典的で良く知られたものと主結果と関連性が高いものに限定して紹介する.

1935年に Speiser [17] は，Riemann ゼータ関数の 1 回微分$\zeta'(s)$が帯領域$0<\Re(s)<1/2$に零点を持たないことと Riemann 予想が同値であることを示した．$N_k(T)$, $k\geq 1$, を Riemann ゼータ関数の k 回微分の零点$\beta_k+i\gamma_k$のうち，$0<\gamma_k<T$を充たすものの個数とする．このとき Berndt [1, p. 577] は

$$N_k(T)=\frac{T\log T}{2\pi}-\frac{1+\log 4\pi}{2\pi}T+O(\log T),\qquad T\to\infty.$$

を証明した．Levinson と Montgomery は [8, Theorem 10] において

$$\begin{aligned}2\pi\sum_{0<\gamma_k\leq T}(\beta_k-1/2)&=kT\log\log(T/2\pi)-2\pi k\mathrm{Li}(T/2\pi)\\&\quad+(\log 2-2k\log\log 2)(T/2)+O(\log T),\end{aligned}$$

ただし$\mathrm{Li}(x):=\int_2^x dy/\log y$を示した．さらに Levinson と Montgomery は，$k\in\mathbb{N}$, $j\in\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$とするとき，$\zeta^{(j)}(s)$が$0<\Re(s)<1/2$において零点を有限個しか持たないのであれば，$\zeta^{(j+k)}(s)$も同様の性質を持つことを示した．証明に普遍性定理が使われるものとして，次の定理が知られている.

Theorem C. *Riemann* ゼータ関数の k 微分 $\zeta^{(k)}(s)$，ただし $k\in\mathbb{N}$, は長方領域$\sigma_1<\sigma<\sigma_2$, $0<t<T$, ただし$T>0$は充分大，内にcT超個の零点を持つ.

この定理は$k=1$である場合は Laurinčikas [5]，$k\geq 2$ある場合は Meyrath [12] によって証明された．さらには Laurinčikas は [7, p. 200] において$\sum_{k=1}^{l}a_k\zeta^{(k)}(s)$，$a_k\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$も同様の性質を持つことを証明した．この論説の主結果はもちろん上記の Laurinčikas と Meyrath の結果の一般化である．Laurinčikas [7, p. 200] ではゼータ関数の係数が複素数であるが，その係数を複素数ではなく$\sigma>1/2$で絶対収束する一般 Dirichlet 級数にしたものを証明するためには，hybrid universality が (少なくとも現時点では) 必要になることを注意しておく.

4 主結果について補足説明

この論説に書かれた主結果はその主張が非常に明解であるため，様々な場所で講演をしている．その際以下の3つの質問をされることがある．その解答をこの章で述べる．

主定理の条件を充たすゼータ関数は存在するのか？

この論説の主結果の意義は，Riemann 予想の類似を充たさないゼータ関数を構成できることではなく，既存のゼータ関数で Riemann 予想の類似を充たさないかどうか判定できるところにある．一般に，ある性質を充たすものを構成するより，既知のものがある性質を充たすかどうか見極める方が難しいことを注意しておく．例えば，歴史上初の超越数の例を与えたのは Liouville (1844) であるが，自然対数の底 e が超越数であると証明したのは Hermite (1873) である．その拡張として，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が $\mathbb{Q}$ 上一次独立な代数的数であるとき，$e_1^\alpha, \ldots, e_n^\alpha$ は $\mathbb{Q}$ 上代数的独立であることを主張する Lindemann の定理が証明されたのは 1882 年のことである．C を零でない複素数とすると $\zeta(s)+C$ が Riemann 予想の類似を充たさないことは 1911 年に Bohr により証明された ([18, Theorem 1.3] 参照)．この定理が Liouville の結果に対応するものであるとすれば，本論説の主結果は Lindemann の定理に対応するものといっても良いのかもしれない．

概要で述べたように，概均質ベクトル空間のゼータ関数の特別な場合，スペクトルゼータ関数の特別な場合，Euler-Zagier 多重ゼータ関数などが主定理の条件を満足する．詳しくは [15, Section 3] を見て頂きたい．大ざっぱに言えば，あるゼータ関数が Riemann ゼータ関数の多項式で書けてしまえば主定理の条件を充たすことになるので，このようなゼータ関数は [15, Section 3] で挙げられたもの以外にも数多く存在すると考えられる．現在では知られていないが，将来主定理の条件を満足するようなゼータ関数が大量に発見される可能性もあり得る．

主定理の条件を充たすゼータ関数が Riemann 予想の類似を充たさないのは当然か？

主定理の条件の下ではいかなるゼータ関数の多項式も Riemann 予想の類似を充たさないのは，個人の見解ではあるが意外であった．即ち Riemann 予想の類似を充たすゼータ関数の多項式が構成できると考えていた．その理由として，Taylor [19] により

$$\zeta^*(s+1/2) - \zeta^*(s-1/2), \qquad \zeta^*(s) := \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

は関数等式を充たし，全ての零点は $\Re(s) = 1/2$ 上に存在することが証明されていたことが挙げられる．上記のゼータ関数は Euler 積を持たないと考えられるが，Riemann 予想の類似を充たすことを注意しておく．さらに，

$$\zeta(s) + Cs, \qquad |C| > 10, \quad -19/2 \le \Re(C) \le 17/2$$

は $\sigma > 1/18$ において零点を持たない ([13, Theorem 1.3] 参照)．これも Euler 積を持たないと考えられる．この関数の $k \in \mathbb{N}$ 回微分は主定理の条件を充たすので，長方領域

$\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, $0 < t < T$, ただし$T > 0$は充分大，内にcT超個の零点を持つ．このように主定理の条件を充足しないものについては，帯領域$1/2 < \sigma < 1$で零点を持たないものが存在する．

即ち主定理において，係数を絶対収束するDirichlet級数だけではなく，ガンマ関数やsの多項式も考えてしまうと，右半臨界領域で零点を持たない例が構成できることになる．主定理では次数有限の多項式を扱っているが，無限にすると

$$1 + \zeta(s) + \cdots + \frac{\zeta(s)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(s)^n}{n!} = \exp\bigl(\zeta(s)\bigr)$$

となるので，この関数は明らかに$1/2 < \sigma < 1$において零点を持たない．これらの例により主定理の条件がそう簡単には弱めることができないであろうと考えられる．

主定理の条件を充たすゼータ関数の零点の意味は？

Riemannゼータ関数の零点が素数分布に関連することは広く知られているが([10, 第3と4章参照])，概均質ベクトル空間のゼータ関数の特別な場合，スペクトルゼータ関数の特別な場合，Euler-Zagier多重ゼータ関数などの零点が何か数論的な対象と繋がっているかどうかは残念ながら現在のところ不明である．これらの出所の異なるゼータ関数とその$k \in \mathbb{N}$回微分が，Main Theorem 1で特徴付けられるような零点分布を持つことの理由もよくわからない．もちろん普遍性定理により下からの評価がcTであり，Littlewoodの定理から上からの評価がCTという零点分布の必然性がわかるが，それ以外の説明ができないという意味である．関数等式を持ったり，幾何的な意味を持ったり，特殊値が数論的な意味を持つものであるので，ゼータ関数自体は興味深いことは疑いのないことではあるが．上記のゼータ関数が，絶対収束領域で零点を持つかどうかも未だに明らかにされていない．Euler-Zagier 2重ゼータ関数に限定すれば，絶対収束領域に零点があることは知られているが([11]参照)，一般の多重バージョンでは不明であるし，主定理のような広いクラスでとなると全く手つかずである．先の注意とも関連するが，主定理の条件を充たしかつ絶対収束領域では零点を持たないものが構成できる可能性もある．Dirichlet級数が絶対収束領域で零点を持つかどうかは，論文[2]などを参考にして頂きたい．

私の記憶違いかつ誤解の可能性もあるが，哲学者ヴィトゲンシュタインは「島が島であるのは周りに海があるからだ」というような意味の文言がある．つまり島が島であることを特徴づけるのは島ではなく，島の補集合とも言えるそのまわりを囲っている海である，ということである．今回の主結果はRiemann予想を充たさないものを判定する定理を与えたので，上の例えでいえば，島(Riemann予想を充たすもの)ではなくまわりの海(Riemann予想を充たさないもの)にはどんなゼータ関数が存在するか明らかにしたということになる．これらのゼータ関数がRiemann予想を充たすものを特徴づける保証はないが，数論的に意味のあるゼータ関数も多く含むことを明らかにしたことには，一定の意義があると考えている．

参考文献

[1] B. C. Berndt, *The number of zeros for* $\zeta^{(k)}(s)$, J. London Math. Soc. **2** (1970), 577–580.

[2] A. R. Booker and F. Thorne, *Zeros of L-functions outside the critical strip*, arXiv:1306.6362.

[3] S. M. Gonek, *Analytic Properties of Zeta and L-functions*, Ph.D. Thesis, Universality of Michigan (1979).

[4] J. Kaczorowski and M. Kulas, *On the non-trivial zeros off line for L-functions from extended Selberg class*, Monatshefte Math. **150** (2007), 217-232.

[5] A. Laurinčikas, *Zeros of the derivative of the Riemann zeta-function*, Lithuanian Math. J. **25** (1985), no. 3, 255–260.

[6] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-function*, Kluwer Academic Publishers, 1996.

[7] A. Laurinčikas, *Universality of composite functions*, Functions in number theory and their probabilistic aspects, 191–204, *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, **B34**, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012.

[8] N. Levinson and H. L. Montgomery, *Zeros of the derivatives of the Riemann zeta function*, Acta Math. **133** (1974), 49–65.

[9] K. Matsumoto, Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions,' *Sugaku* 53 (2001), 279-296 (in Japanese); English Transl.: *Sugaku Expositions* 17 (2004), 51–71.

[10] 松本耕二 著, リーマンのゼータ関数 (開かれた数学), 朝倉書店 2005.

[11] K. Matsumoto ans M. Shōji, *Numerical computations on the zeros of the Euler double zeta-function I*, arXiv:1403.3765.

[12] T. Meyrath, *On the universality of derived functions of the Riemann zeta-function*, J. Approx. Theory **163** (2011), no. 10, 1419–1426.

[13] T. Nakamura, *A modified Riemann zeta distribution in the critical strip*, to appear in *Proceedings of the American Mathematical Society.*

[14] T. Nakamura, *Universality and zeros of the derivatives of zeta functions*, preprint.

[15] T. Nakamura and Ł. Pańkowski, *On complex zeros off the critical line for non-monomial polynomial of zeta-functions*, arXiv:1212.5890.

[16] Ł. Pańkowski, *Hybrid joint universality theorem for the Dirichlet L-functions*, Acta Arith. **141** (2010) no. 1, 59–72.

[17] A. Speiser, *Geometrisches zur Riemannschen Zetafunktion*, Math. Ann. **110** (1935), no. 1, 514–521.

[18] J. Steuding, Value Distributions of L-functions, Lecture Notes in Mathematics Vol. 1877, Springer-Verlag, 2007.

[19] P. R. Taylor, *On the Riemann zeta function*, Quart. J. Oxford **19** (1945) 1–21.