数理解析研究所講究録
第 1934 巻 2015 年 170-172

ON SPECIAL VALUES OF CERTAIN L-FUNCTIONS
ある L 函数の特殊値について
(森本和輝との共同研究)

古澤 昌秋
(大阪市立大学大学院理学研究科)

ABSTRACT. 2012 年 1 月の RIMS 研究集会「保型形式と保型的 L 関数の研究」において，森本和輝との共著論文についての講演を行った．本研究集会においては，その結果を一般化した続編の共著論文についての講演を行った．

いま F を総実代数体とし，$\mathbb{A}$ をそのアデール環とする．$\mathbf{f}$ を F 上の原始的 Hilbert 尖点形式とし，π を $\mathbf{f}$ に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約尖点表現とする．次に，(V, q) は F 上の 2 次形式で，totally anisotropic とし，τ は $\mathrm{SO}(V, \mathbb{A})$ の既約保型表現とする．このとき，テンソル L 函数 $L(s, \pi \otimes \tau)$ の特殊値の代数性を示した．

前の論文においては基礎体が $\mathbb{Q}$ であったのを一般の総実代数体 F とし，τ について τ_∞ が自明な表現であるという制限を取り除き，最大臨界点だけでなく他の臨界点（全てではないが）を含むようにし，代数性だけでなくガロア群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の作用による同変性も示した，のが，今回の一般化である．

主定理を述べるために，記法について説明する．

- F を総実代数体とし，拡大次数 $[F:\mathbb{Q}] = d$，F のアデール環を $\mathbb{A}$ とする．
- (V, q) は，F 上の totally anisotropic な 2 次形式で $\dim_F V = n \geq 2$ とする．
- n が奇数のときは，χ_V は $\mathbb{A}^\times$ の自明な指標を表すとし，n が偶数のときには，χ_V は，
$$\chi_V(x) = \left(x, (-1)^{\frac{n}{2}}\, d(V)\right)_F$$
によって定まる $\mathbb{A}^\times$ の 2 次指標を表すとする．
- τ を $\mathrm{SO}(V, \mathbb{A})$ の既約保型表現とする．このとき τ_∞ はコンパクト群 $\mathrm{SO}(V, F_\infty)$ (ただし $F_\infty = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^d$) の表現で最高ウェイト $\underline{\mathbf{m}} = (\underline{m}_1, \ldots, \underline{m}_d)$:
$$\underline{m}_j = (m_{j,1}, \ldots, m_{j,n'}) \in \mathbb{Z}^{n'}, \quad \begin{cases} m_{j,1} \geq \cdots \geq m_{j,n'} \geq 0, & n \text{ は奇数}; \\ m_{j,1} \geq \cdots \geq m_{j,n'-1} \geq |m_{j,n'}|, & n \text{ は偶数}, \end{cases}$$
ただし $n' = \left[\frac{n}{2}\right]$，としてよい．
- $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$，ただし，$k_j \geq 2$ かつ k_j の偶奇は全て同じ，とする．このとき F の整イデアル $\mathfrak{c}$ と $\mathbb{A}^\times$ の有限位数 Hecke 指標 ψ に対して，$\mathbf{f}$ を，志村 [10] の意味で，空間 $\mathcal{S}^0_{\mathbf{k}}(\mathfrak{c}, \psi)$ に属する type $(\mathbf{k}, \psi)$ の原始的尖点形式とし，$\pi = \pi(\mathbf{f})$ を $\mathbf{f}$ に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ尖点表現とする．

このとき，論文 [6] の主定理は下記の通りである：

Date: 2014 年 1 月 24 日 RIMS 研究集会「保型形式および関連するゼータ関数の研究」．本研究集会における講演の機会を与えてくださった研究代表者の石井卓さんに感謝します．

この研究は，科学研究費補助金基盤研究 (C)25400020 によって支援されています．

主定理. 整数 $m(\mathbf{k},\tau)$ を

$$m(\mathbf{k},\tau) = \min\{k_j - 2m_{j,1} \mid 1 \leq j \leq d\}$$

によって定義し，$m(\mathbf{k},\tau) > 2n$ が成り立っていると仮定する．

m は $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ の元で，

$$m = \frac{m(\mathbf{k},\tau)-n+1}{2} - \ell, \quad \ell \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \ell \leq \frac{m(\mathbf{k},\tau)-n}{2}$$

を満たしているとする．

このとき，F の素点の有限集合 S_0 で，S_0 は F の無限素点を全て含み，次の性質を満たすものが存在する：

F の素点の有限集合 S について，$S \supset S_0$ ならば，$L(s,\pi\otimes\tau)$ の *partial* L 函数 $L^S(s,\pi\otimes\tau) = \prod_{v\notin S} L(s,\pi_v\otimes\tau_v)$ について，

$$P^S(m,\mathbf{f},\tau) := \frac{L^S(m,\pi\otimes\tau)}{\left(2\pi\sqrt{-1}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]d(2m-1)} \mathfrak{g}(\chi_V)\, J(\mathbf{f})^{\left[\frac{n}{2}\right]}}$$

とおくとき，

$$P^S(m,\mathbf{f},\tau) \in \overline{\mathbb{Q}}$$

かつ

$$\left(P^S(m,\mathbf{f},\tau)\right)^\rho = P^S(m,\mathbf{f}^\rho,\tau^\rho), \quad \forall\rho \in \mathrm{Gal}\left(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}\right)$$

が成り立つ．

ここで，$\overline{\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}$ の代数閉包を表し，$L(s,\pi\otimes\tau)$ は $s\mapsto 1-s$ に関して函数等式を持つように *normalize* されている．また，

- $J(\mathbf{f}) = \left(2\pi\sqrt{-1}\right)^d \pi^{\sum_{j=1}^d k_j} \mathfrak{g}(\psi) \langle\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle$,
- $\mathfrak{g}(*)$ は $*$ のガウス和，
- $\langle\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle$ は *Petersson* ノルム，

である．(これらの定義については [10] を参照されたい．)

論文 [6] には，森本による Appendix として，motivic L 函数の臨界点における特殊値の代数性に関する Deligne の予想 [3] に現れる Deligne period が，上記の L 函数 $L(s,\pi\otimes\tau)$ について明示的に計算されている．(この計算については，吉田 [11] が主参考文献である．) 森本の Deligne period の計算により，上記の主定理は Deligne の予想と矛盾しないことがわかる．

証明は，論文 [5] において用いた，考察する L 函数の特殊値が，IV 型領域に対応する特殊直交群 $\mathrm{SO}(n+1,2)$ の正則 Eisenstein 級数の Bessel model 型の Fourier 係数から得られることに基づく方法を踏襲する．論文 [7] にあるように，水本 [9] と Böcherer [1] による，次数 2 の Klingen Eisenstein 級数の Fourier 係数の公式に多いに啓発されたことが動機になっている．不分岐素点における計算は，Ginzburg, Piatetski-Shapiro & Rallis [8] に依拠する．論文 [5] においては，最大臨界点における特殊値のみが考察されているが，論文 [6] において他の臨界点における特殊値を考察するにあたっては，ベクトル値 Eisenstein 級数，すなわち，Eisenstein 級数の K-type を変化させる方法が用いられている．ベクトル値 Eisenstein 級数を用いることによって臨界点が移動することは，$\mathrm{PGSp}(4) \simeq \mathrm{SO}(3,2)$ の場合については，既に Böcherer-佐藤-山崎 [2]，Dummigan [4] において，観察および利用されているが，論文 [6] における我々の考察はより体系的である．

$n = \dim_F V = 4$ の場合を考察することによって，主定理から，GL (2) の Rankin triple L 函数の unbalanced weight case の非中心臨界点における特殊値の代数性が従うことは，前論文 [5] におけるのと全く同様である．

REFERENCES

[1] Böcherer, S.: Über gewisse Siegelsche Modulformen zweiten Grades. Math. Ann. **261** (1982), 23–41.

[2] Böcherer, S., Satoh, T., Yamazaki, T.: On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series. Comment. Math. Univ. St. Paul. **41** (1992), 1–22.

[3] Deligne, P.: Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. With an appendix by N. Koblitz and A. Ogus. Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, 313–346. Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1979).

[4] Dummigan, N.: Symmetric square L-functions and Shafarevich-Tate groups. II. Int. J. Number Theory **5** (2009), 1321–1345.

[5] Furusawa, M., Morimoto, K.: On special values of certain L-functions. Amer. J. Math., to appear.

[6] Furusawa, M., Morimoto, K.: On special values of certain L-functions. II. Preprint.

[7] Furusawa, M., Shalika, J. A.: On Fourier coefficients of Eisenstein series. Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), 81–98, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD (1989).

[8] Ginzburg, D., Piatetski-Shapiro, I., Rallis, S. : L functions for the orthogonal group. Mem. Amer. Math. Soc. **128**, no. 611, viii+218 pp (1997).

[9] Mizumoto, S.: Fourier coefficients of generalized Eisenstein series of degree two. I. Invent. Math. **65** (1981/82), 115–135.

[10] Shimura, G.: The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms. Duke Math. J. **45** (1978), 637–679.

[11] Yoshida, H.: On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms. Duke Math. J. **75** (1994), 121–191.