数理解析研究所講究録
第 1935 巻 2015 年 78-88

Szabó のタイプの関数の行列単調性について

千葉大学大学院理学研究科　渚　勝 (Masaru Nagisa)

ここでは $(0,\infty)$ 上で定義された実数値連続関数 f について考察する. f が作用素単調または行列単調であるとは, 任意の自然数 n と $A,B\in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ で $0<A\leq B$ となるとき

$$f(A)\leq f(B)$$

が成立することである.

作用素単調関数であることと Pick 関数であることは同等であることが知られている. つまり, 作用素単調関数 $f(t)$ は, 上半平面 $\mathbb{H}_+=\{z\in \mathbb{C}\mid \Im z>0\}$ 上の解析関数に解析接続でき, かつ $f(\mathbb{H}_+)\subset\overline{\mathbb{H}_+}$ となることである. したがって, Pick 関数であることを示すことで, 作用単調性を示すことができる. つまり, 上半平面へ解析接続した関数が上半平面を保存することをみるため, 偏角を調べるというのが基本方針になる.

この報告では

$$f(t)=t^{\gamma}\prod_{i=1}^{n}\frac{(t^{\alpha_i}-1)}{(t^{\beta_i}-1)}$$

$|\gamma|\leq 2,\ 0<\alpha_i,\beta_i\leq 2,\ \alpha_i\neq\beta_j$ という関数の $(0,\infty)$ 上での作用素 (行列) 単調性を調べる. この関数は Szabó [9] によって考察されたものであるが, 後の Remark(1) で述べる事実より, α,β,γ に制約が課されているが, この制約がある意味, 本質的であることがわかる. 作用素単調関数の極限関数はまた作用素単調なので, $0<\alpha_i,\beta_i<2$ と仮定して議論をすすめることにする.

$$g(t)=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}\dfrac{(t^{\alpha_i}-1)}{(t^{\beta_i}-1)} & t\neq 1\\ \prod_{i=1}^{n}\alpha_i/\beta_i & t=1\end{cases}$$

とおき, $g(t)$ の上半平面への解析接続

$$g(z)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(z^{\alpha_i}-1)}{(z^{\beta_i}-1)}\quad(z\in\mathbb{H}_+)$$

を考える. このとき, 上半平面から連続的に $z=re^{\pi i}(r>0)$ での $g(z)$ の値が定まる. $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ として

$$G_0(\alpha.\beta)=\inf\{\frac{\arg g(z)}{\pi}\mid z=re^{\pi i},r>0\},$$
$$F_0(\alpha.\beta)=\sup\{\frac{\arg g(z)}{\pi}\mid z=re^{\pi i},r>0\}$$

を定義する. ただし $\mathrm{Arg}:\mathbb{C}\setminus\{0\}\longrightarrow[0,2\pi)$ とし

$$\arg f(z)=\gamma\mathrm{Arg}z+\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{Arg}(z^{\alpha_i}-1)-\mathrm{Arg}(z^{\beta_i}-1))\quad(0\leq\mathrm{Arg}z\leq\pi).$$

として考える (ただし $\arg f(1)=0$ とする).

以下では, $z\in\mathbb{H}_+$ のとき, $0\leq\arg f(z)\leq\pi$ を示すことが目標となる. そのため

$$0\leq u-\lim_{r\to\infty}\arg f(re^{i\theta})\leq\pi\quad(0\leq\theta\leq\pi)$$
$$0\leq u-\lim_{r\to 0}\arg f(re^{i\theta})\leq\pi\quad(0\leq\theta\leq\pi)$$
$$0\leq\arg f(re^{i\pi})\leq\pi\quad(0<r)$$

を示すことで作用素単調性が判定できる. いま扱っている関数の場合は最後の条件だけで判定が可能というのは次の命題であり、以下に用いる事実は Nagisa-Wada [8] の中で示している.

Theorem 1 (N-Wada) For any $s>0$, $f(t)^s$ is operator monotone on $(0,\infty)$ if and only if

$$\gamma+G_0(\alpha,\beta)\geq 0 \text{ and } s(\gamma+F_0(\alpha,\beta))\leq 1.$$

一般的に $F_0(\alpha,\beta),G_0(\alpha,\beta)$ を α,β を用いて表すことは困難であると思われる.

とくに $f(z)=\frac{z^a-1}{z^b-1}$ について

$$\begin{aligned}f(re^{\pi i})&=\frac{(re^{\pi i})^a-1}{(re^{\pi i})^b-1}=(re^{\pi i})^{a-b}\frac{1-(re^{\pi i})^{-a}}{1-(re^{\pi i})^{-b}}\\&=(re^{\pi i})^{a-b}\overline{\left(\frac{(e^{\pi i}/r)^a-1}{(e^{\pi i}/r)^b-1}\right)}\end{aligned}$$

の計算より

$$\arg f(re^{\pi i})+\arg f(e^{\pi i}/r)=(a-b)\pi$$

が得られる. これは, $0\leq r\leq 1$ での $\arg f(re^{\pi i})$ の最大値と最小値を用いて $F_0(a,b)$, $G_0(a,b)$ が計算できることや、後の Remark(3) の内容にも関係する. したがって, α,β が具体的な数値で与えられるときは, 計算機を用いて $F_0(\alpha,\beta)$, $G_0(\alpha,\beta)$ の近似値を求めることは難しくない.

また $G_0(\alpha,\beta)=-F_0(\beta,\alpha)$ であるので計算しやすい $F(\alpha,\beta)$ という関数で

$$-F(\beta,\alpha)\leq G_0(\alpha,\beta),\quad F_0(\alpha,\beta)\leq F(\alpha,\beta)$$

となるものを構成できれば, $f(t)$ が作用素単調になるための十分条件を与えることができる.

Proposition 2(N-Wada) Let $0 < a, b \leq 2$ and $z \in \mathbb{H}_+$.

$$-F(b,a)\pi \leq \arg \frac{z^a - 1}{z^b - 1} \leq F(a,b)\pi,$$

where

$$F(a,b) = \begin{cases} a-b & (a \geq b, 0 \leq b \leq 1) \\ a-1 & (1 < a, b < 2) \\ 0 & (a < b, 0 \leq a \leq 1) \end{cases}.$$

Theorem 3(N-Wada) (1) Let S_n be the set of all permutations on $\{1, 2, \ldots, n\}$. If it satisfies

$$0 \leq \gamma - \min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} F(\beta_{\sigma(i)}, \alpha_i) \text{ and } \gamma + \min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)}) \leq 1,$$

then $f(t)$ is operator monotone.

(2) If $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$ and $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \ldots \leq \beta_n$, then

$$\sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i, \beta_i) = \min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)}).$$

Remark (1) If, for $\alpha_i, \beta_i > 0$ $(\alpha_i \neq \beta_j)$,

$$g(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z^{\alpha_i} - 1}{z^{\beta_i} - 1}$$

is holomorphic and has no zeros on $\mathbb{H}_+$, then $\max\{\alpha_i, \beta_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \leq 2$.

(2) For $0 < b < a \leq 2$, it holds that

$$F_0(a,b) = a - b \Leftrightarrow G_0(a,b) = 0 \Leftrightarrow 0 < b \leq 1.$$

(3) $\quad F_0(\alpha, \beta) > \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \Leftrightarrow G_0(\alpha, \beta) < 0.$

これらの事実を用いれば, 特別な形を持つ関数の作用素単調性を判定することが容易になる. また, 計算機による近似計算を加えれば詳細な判定が可能になる.

以下、近似計算の部分は渡辺春香, Albania Imam 両氏と共同の作業を行った.

Example 1 For $a, b \in \mathbb{R}$, we define

$$h(t) = \frac{b}{a} \frac{t^a - 1}{t^b - 1},$$

where $(t^0-1)/0$ means $\log t$. Then $h(t)$ is operator monotone on $[0,\infty)$ if and only if

$$(a,b) \in \{a=b\} \cup (\{0<a-b\leq 1\} \cap ([-1,2]\times[-2,1])) \cup ([0,1]\times[-1,0]).$$

証明 $a=b$ のときは $h(t)=1$ なので作用素単調である.

(i) $a,b>0$ のとき $h(t)=\dfrac{b}{a}\dfrac{t^a-1}{t^b-1}$.

(ii) $a>0, b<0$ のとき $h(t)=\dfrac{-b}{a}t^{-b}\dfrac{t^a-1}{t^{-b}-1}$.

(iii) $a<0, b>0$ のとき $h(t)=\dfrac{b}{-a}t^{a}\dfrac{t^{-a}-1}{t^{b}-1}$.

(iv) $a,b<0$ のとき $h(t)=\dfrac{-b}{-a}t^{a-b}\dfrac{t^{-a}-1}{t^{-b}-1}$.

Remark(1) より $a\neq b$ かつ $|a|,|b|>2$ のとき $h(t)$ は作用素単調でないことがわかる.

(i) のとき $\lim_{r\to+\infty}\arg h(re^{\pi i})=(a-b)\pi$ だから $h(t)$ が作用素単調ならば $0\leq a-b\leq 1$ であることがわかる. また $0<b<a(\leq 2)$ のとき Remark(2),(3) より $0<b\leq 1$ かつ $0\leq a-b\leq 1$ が $h(t)$ が作用素単調になるための同値条件であることがわかる.

(ii) のとき $\lim_{r\to 0+}\arg h(re^{\pi i})=-b\pi$, $\lim_{r\to+\infty}\arg h(re^{\pi i})=a\pi$ だから $h(t)$ が作用素単調であれば $0\leq a,-b\leq 1$ となる. また $0\leq a,-b\leq 1$ のとき Theorem 3 を用いて

$$0\leq -b-F(-b,a)=\begin{cases}-b & 0\leq -b\leq a\leq 1\\ a & 0\leq a<-b\leq 1\end{cases}$$

$$1\geq -b+F(a,-b)=\begin{cases}a & 0\leq -b\leq a\leq 1\\ -b & 0\leq a<-b\leq 1\end{cases}$$

となるので $h(t)$ は作用素単調である.

(iii) のとき $\lim_{r\to+\infty}\arg h(re^{\pi i})=-b\pi$ だから $h(t)$ は作用素単調にならない.

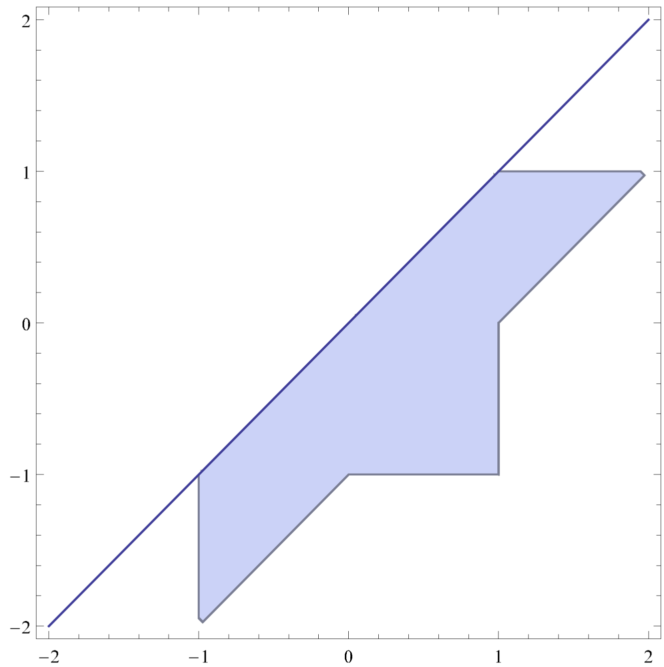
(iv) のとき $\lim_{r\to 0+}\arg h(re^{\pi i})=(a-b)\pi$ だから $h(t)$ が作用素単調であれば $0\leq a-b\leq 1$ となる. $a<-1$ とすると $1<-a<-b\leq 2$ となり, Remark(2) より $F_0(-b,-a)>(a-b)$.

$$(a-b)+G_0(-a,-b)=(a-b)-F_0(-b,-a)<0$$

となり Theorem 1 より $h(t)$ が作用素単調でないことがわかる. $a\geq -1$ とすると $0\leq a-b\leq 1$ を用いて

$$a-b-F(-b,-a)=0,\quad a-b+F(-a,-b)=a-b\leq 1$$

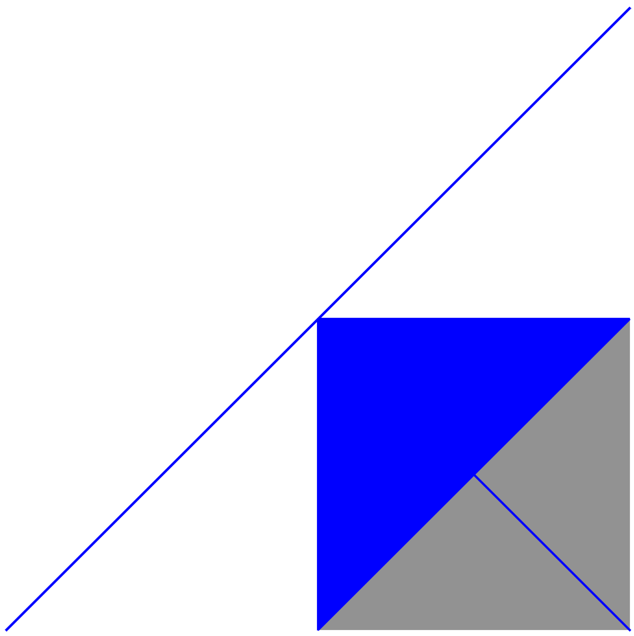
となり Theorem 3 より $h(t)$ が作用素単調であることがわかる.



Example 2 For $a, b \in \mathbb{R}$, we define

$$h(t) = \frac{t^a + 1}{t^b + 1}.$$

In the case that $(a, b) \notin (\{a = b\} \cup [0, 1] \times [-1, 0])$, $h(t)$ is not operator monotone. In the case that $(a, b) \in \{a = b\} \cup ((\{a - b \leq 1\} \cup \{a = -b\}) \cap [0, 1] \times [-1, 0])$, $f(t)$ is operator monotone on $[0, \infty)$.



証明 $a=b$ のときは $h(t)=1$ なので作用素単調である.

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \frac{t^b-1}{t^a-1}\frac{t^{2a}-1}{t^{2b}-1} = t^{-b}\frac{t^{-b}-1}{t^a-1}\frac{t^{2a}-1}{t^{-2b}-1} \\
&= t^a\frac{t^b-1}{t^{-a}-1}\frac{t^{-2a}-1}{t^{2b}-1} = t^{a-b}\frac{t^{-b}-1}{t^{-a}-1}\frac{t^{-2a}-1}{t^{-2b}-1}
\end{aligned}
$$

だから Remark(1) より $h(t)$ が作用素単調であれば $(a,b)\in[-1,1]\times[-1,1]$ となることがわかる.

$z=re^{\pi i}$ $(r>0)$ のとき

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \frac{1}{|z^b+1|^2}(z^a+1)(\bar{z}^b+1) \\
&= \frac{1}{|z^b+1|^2}(r^{a+b}\cos(a-b)\pi + r^a\cos a\pi + r^b\cos b\pi + 1) \\
&\quad + \frac{i}{|z^b+1|^2}(r^{a+b}\sin(a-b)\pi + r^a\sin a\pi - r^b\sin b\pi)
\end{aligned}
$$

となることに注意する.

$a\neq b$ かつ $0<a,b\leq 1$ のとき. $\lim_{r\to\infty}\arg f(re^{\pi i})=(a-b)\pi$ だから, $b>a$ のときは作用素単調でないことがわかる. $0<b<a\leq 1$ のときも十分小さい $r>0$ に対して

$$
\Im h(re^{\pi i}) = \frac{r^b}{|z^b+1|^2}(r^a\sin(a-b)\pi + r^{a-b}\sin a\pi - \sin b\pi) < 0
$$

となるので作用素単調にならない.

$a\neq b$ かつ $-1\leq a,b<0$ のとき. $\lim_{r\to 0+}\arg f(re^{\pi i})=(a-b)\pi$ だから, $b>a$ のときは作用素単調でないことがわかる. $-1\leq b<a<0$ のときも十分大きい $r>0$ に対して $\Im h(re^{\pi i})<0$ となるので作用素単調にならない.

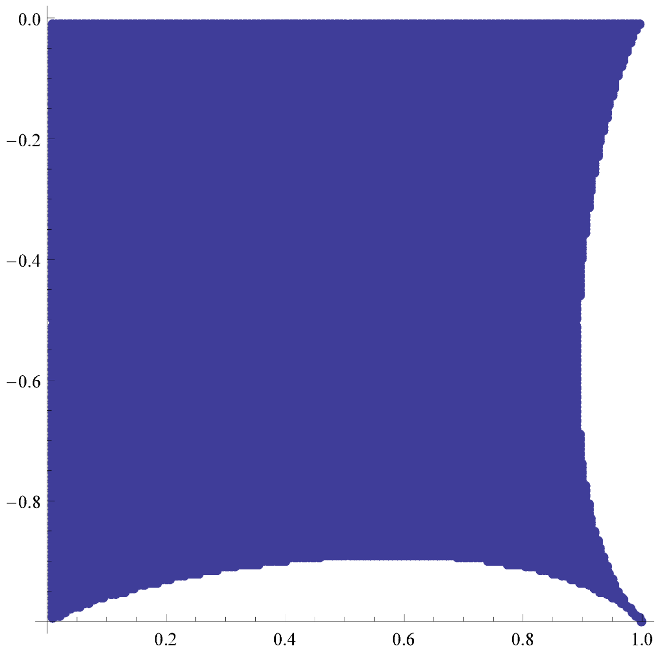
$-1\leq a<0,\ 0<b\leq 1$ のとき

$$
a+G_0((b,-2a),(-a,2b))<0
$$

だから $h(t)$ は作用素単調にならない. $a=0$ かつ $0<b\leq 1$ のときは $h(t)$ が減少関数になるので作用素単調でない.

$0\leq a\leq 1$, $-1<b\leq 0$ のとき, $z=re^{i\theta}$ に対して $\arg h(z)$ は $r\to\infty$ のとき $a\theta$ に, $r\to 0+$ のとき $-b\theta$ に一様収束する. $0\leq a-b\leq 1$ のとき $\Im h(re^{\pi i})\geq 0$ となるから $h(t)$ は作用素単調になる. また $a=-b$ のときも $\Im h(re^{\pi i})\geq 0$ となり $h(t)$ は作用素単調になる.

(a,b) が $[0,1]\times[-1,0]$ に属するときに, 作用素単調性が決定できていない部分がある. この部分については近似計算によって次の図のような状況であることがわかる.



Example3. Extension of Petz-Hasegawa's functions
Szabó [9] において

$$g(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} \dfrac{(t^{\alpha_i}-1)}{(t^{\beta_i}-1)} & t \neq 1 \\ \prod_{i=1}^{n} \alpha_i/\beta_i & t = 1 \end{cases}$$

の偏角に付随する以下の量が考えられている.

$$S(\alpha,\beta) = u + \sum_{i=u+1}^{n} \alpha_i - \sum_{j=1}^{v} \beta_j - (n-v),$$

where $0 < \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_u \leq 1 < \alpha_{u+1} \leq \cdots \leq \alpha_n$ and $0 < \beta_1 \leq \cdots \leq \beta_v \leq 1 < \beta_v \leq \cdots \leq \beta_n$. この $S(\alpha,\beta)$ は

$$-S(\beta,\alpha) \leq -F(\beta,\alpha) \leq G_0(\alpha,\beta), \quad F_0(\alpha,\beta) \leq F(\alpha,\beta) \leq S(\alpha,\beta)$$

を満たすので, Theorem 3 と同様に作用素単調性の判定に利用することができる.
Petz-Hasegawa の関数とは

$$f(t) = a(1-a)\frac{(t-1)^2}{(t^a-1)(t^{1-a}-1)} \qquad (-1 < a < 2)$$

であり, これが作用素単調であることが知られている (詳細は [5], これを一般化した作用素単調関数については [6], [7]). この作用素単調性は

- $0 < a < 1$ のとき

$$-S((a,a),(1,1)) = -(2-2) = 0, \quad S((1,1),(a,a)) = 2-(a+(1-a)) = 1.$$

- $-1 < a < 0$ のとき

$$f(t) = (-a)(1-a)t^{-a}\frac{(t-1)^2}{(t^{-a}-1)(t^{1-a}-1)}$$

より

$$-a - S((-a, 1-a), (1,1)) = -a - (1 + (1-a) - 2) = 0,$$
$$-a + S((1,1), (-a, 1-a)) = -a + (2 - (-a) -) = 1$$

- $1 < a < 2$ のときは $-1 < a < 0$ と同様

となり Theorem 3 より判定できる.

この $S(\alpha, \beta)$ を用いて $0 < \beta_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \geq n-1$ のとき

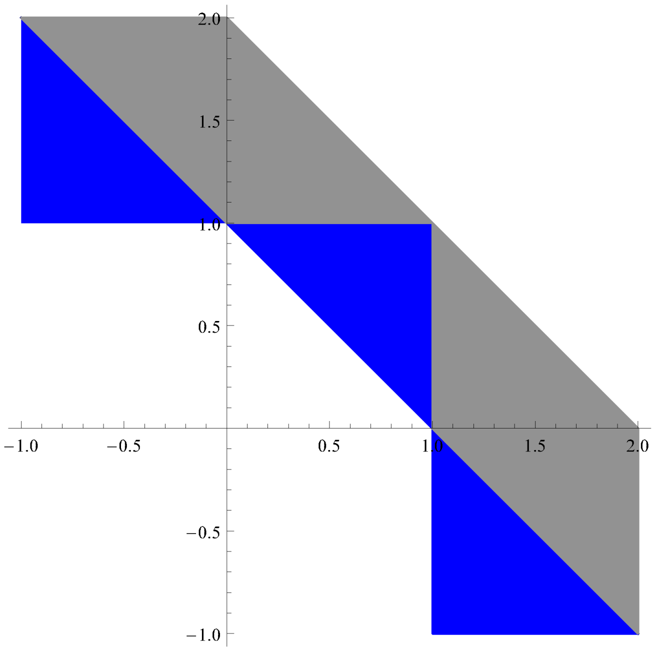
$$f(t) = \frac{(t-1)^n}{(t^{\beta_1}-1)\cdots(t^{\beta_n}-1)}$$

が作用素単調であることもわかる.

実数 a, b に対して, Petz-Hasegawa の関数の直接的な拡張として

$$f(t) = ab\frac{(t-1)^2}{(t^a-1)(t^b-1)}$$

を考える. ただし $0/(t^0-1) = 1/\log t$ と考える. $(a,b) \notin ([-1,0]\times[1,2] \cup \{(a,b) \mid a \geq 0, b \geq 0, 1 \leq a+b \leq 2\} \cup [1,2]\times[-1,0])$ のとき $f(t)$ は作用素単調でなく, $(a,b) \in \{(a,b) \mid -1 \leq a \leq 0, 1 \leq b \leq 1-a\} \cup \{(a,b) \mid 0 \leq a \leq 1, 1-a \leq b \leq 1\} \cup \{(a,b) \mid 1 \leq a \leq 2, -1 \leq b \leq 1-a\}$ のときは作用素単調になる.



証明 $|a|,|b|>2$ のときは Remark(1) より作用素単調でないことがわかる.

a,b の対称性より, $a\geq b$ として考える.

$0<b\leq a\leq 2$ のとき

$$\lim_{r\to\infty}\arg f(re^{i\theta})=(2-a-b)\theta$$

だから, f が作用素単調であるためには $0\leq 2-a-b\leq 1$, つまり $1\leq a+b\leq 2$ となる.

$$-F(a,1)-F(b,1)=\begin{cases}2-a-b & 1\leq b\leq a\\ 1-a & b<1\leq a\\ 0 & b\leq a<1\end{cases},$$

$$F(1,a)+F(1,b)=\begin{cases}0 & 1\leq b\leq a\\ 1-b & b<1\leq a\\ 2-a-b & b\leq a<1\end{cases}$$

より $b\leq a\leq 1$ のとき f が作用素単調であることがわかる.

$a>0,\ b<0$ のとき

$$f(t)=a(-b)t^{-b}\frac{(t-1)^2}{(t^a-1)(t^{-b}-1)}$$

より

$$\lim_{r\to\infty}\arg f(re^{i\theta})=(2-a)\theta,\quad \lim_{r\to 0}\arg f(re^{i\theta})=(-b)\theta.$$

したがって f が作用素単調であるためには $1\leq a\leq 2$ かつ $-1\leq b\leq 0$ が必要であることがわかる.

$$(-b)-F(a,1)-F(-b,1)=\begin{cases}-a-b+1 & b>-1\\ -a+2 & b\leq -1\end{cases},$$

$$(-b)+F(1,a)+F(1,-b)=\begin{cases}1 & b>-1\\ -b & b\leq -1\end{cases}$$

なので $1\leq a\leq 2$ かつ $-1\leq b\leq 1-a$ のとき f は作用素単調であることがわかる.

$a,b<0$ のとき

$$f(t)=(-a)(-b)t^{-a-b}\frac{(t-1)^2}{(t^{-a}-1)(t^{-b}-1)}$$

より

$$\lim_{r\to\infty}f(re^{i\pi})=2\pi$$

となり作用素単調にならない.

$b=0,\ a>0$ のとき

$$f(t)=\frac{a(t-1)^2}{(t^a-)\log t}$$

であり,

$$\lim_{r\to\infty}\arg f(re^{i\theta})=2\theta-a\theta$$

より $a<1$ または $a>2$ のとき $f(t)$ は作用素単調にならないことがわかる.

$b=0,\ a<0$ のとき

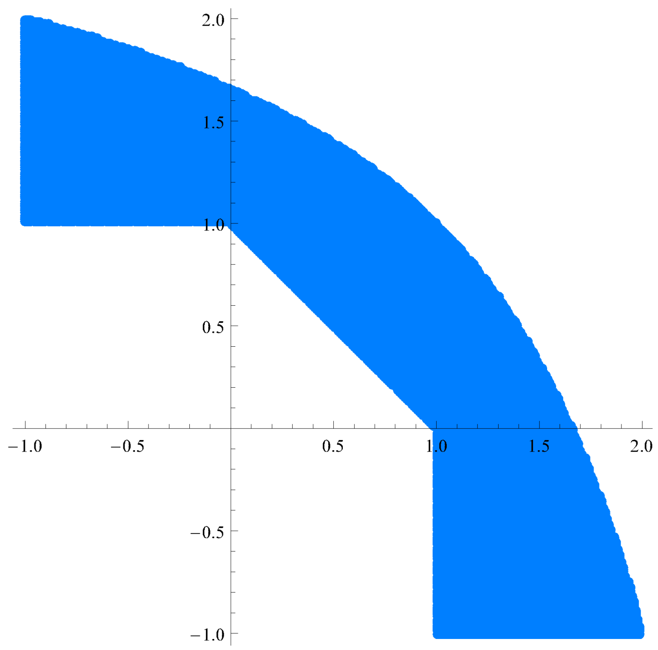
$$f(t)=\frac{(-a)t^{-a}(t-1)^2}{(t^{-a}-1)\log t}$$

であり

$$\lim_{r\to\infty}\arg f(re^{\pi i})=2\pi$$

なので作用素単調にならない.

作用素単調性が判定できていない部分については, $F_0(\alpha,\beta),G_0(\alpha,\beta)$ の近似計算によって, 以下のような状況になることがわかる.



References

[1] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer, 1997.

[2] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, 2007.

[3] W. F. Donoghue, Jr., *Monotone matrix functions and analytic continuation*, Springer-Verlag, 1974.

[4] F. Hiai, *Matrix Analysis: Matrix monotone functions, matrix means, and majorization*, Interdecip. Inform. Sci. 16 (2010) 139–248.

[5] F. Hiai and D. Petz, *Introduction to matrix analysis and applications*, Springer, 2014.

[6] M. Kawasaki and M. Nagisa, *Some operator monotone functions related to Petz-Hasegawa's functions*, Technical Reports of Mathematical Sciences, 2012, Chiba University.

[7] M. Kawasaki and M. Nagisa, *Transforms on operator monotone functions*, arXiv:math/1206.5452.

[8] M. Nagisa and S. Wada, *Operator monotonicity of some functions*, arXiv:math/1412.8625.

[9] V.E.S. Szabó, *A class of matrix monotone functions*, Linear Algebra Appl. 420(2007), 79–85.