

Artin モノイドの増大関数と それに関連する組合せ的な恒等式について

株式会社 IIC パートナーズ 松森 至宏
Yoshihiro Matsumori
IIC Partners co., ltd.

1 Introduction

Artin モノイドはブレイドモノイドの一般化であり, E. Brieskorn と齋藤恭司 [3] により 1972 年に導入された. Artin モノイドの増大関数は分子が 1 の有理関数となる. その分母多項式の公式はまず P. Deligne[4] により見出され, 最近齋藤恭司 [6] により, また M. Albenque と P. Nadeau[1] により, 独立に再発見された. しかし, この公式は全ての有限型の部分モノイドについての和をとる形で書かれており, 与えられた Artin モノイドの増大関数をこの公式から直接計算することは難しい. 淵脇誠, 藤井道彦, 齋藤恭司, 土岡俊介 [5] は有限型の Artin モノイドに対して測地有限オートマトンを構築し, 計算機を使って多くの具体例を計算した.

私は A 型, B 型, \tilde{A} 型などの適当な Artin モノイドの無限列に対して分母多項式の母関数を計算し, これらをベキ級数に展開することによって, 整数の分割を用いた分母多項式の明示的な公式を得た. また, この公式と母関数とに特別な値を代入して比較することにより整数の分割に関連した組合せ的な恒等式が得られる.

ここでは A 型の場合の結果についてのみ述べるが, 有限型, アフィン型, またそれらに限らず適当な Artin モノイドの無限系列についても同様な結果が得られる.

2 Artin モノイドとその球面増大関数

Artin モノイドについての基本的な定義と性質を述べる (cf. [3]). M を n 次の Coxeter 行列 (cf. [2]) とし, $I = \{1, \dots, n\}$ とおく. Coxeter 行列とは, 正の整数を成分とする対称行列であって, 対角成分が全て 1 で他の成分は 2 以上であるものことである. M 型の Artin モノイド G_M^+ は次の表示により定義される.

$$G_M^+ := \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n \mid \sigma_i \sigma_j \sigma_i \cdots = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \cdots \rangle \quad (2.1)$$

ここで関係式の両辺はそれぞれ σ_i, σ_j で始まる長さ m_{ij} の σ_i と σ_j の交代列である.

関係式の両辺の語の長さが等しいので, モノイドの元に対してその元を代表する語の長さを対応させることにより次数準同型 $\deg : G_M^+ \rightarrow \mathbf{Z}_{\geq 0}$ を定義することができる. G_M^+ の球面増大関数 $\dot{P}_M(x)$ とは次の球面増大級数により定義される関数である.

$$\dot{P}_M(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \#(\deg^{-1}(k))x^k \quad (2.2)$$

J を I の部分集合とする. J の元を添字に持つ文字の集合 $\{\sigma_j\}_{j \in J}$ は, M を J に制限した Coxeter 行列 $M|_J := (m_{ij})_{i,j \in J}$ が有限型であるとき, またそのときに限り最小公倍元を持つ. ここで Coxeter 行列が有限

型であるとは対応する Coxeter 群が有限群であることを言う。この最小公倍数は J の fundamental element と呼ばれ Δ_J と書かれる。 $M|_\emptyset$ は有限型とし、 Δ_\emptyset は単位元と約束する。 Artin モノイドの球面増大関数はこれらの部分集合とその fundamental element の情報だけで決定される。

定理 1 (Deligne, Saito, Albenque and Nadeau)

Artin モノイドの球面増大関数は次のような分子が 1 の有理関数となる。

$$\dot{P}_M(x) = \frac{1}{N_M(x)} \quad (2.3)$$

ここで分母多項式 $N_M(x)$ は

$$N_M(x) = \sum_{M|J: \text{有限型}} (-1)^{\#(J)} x^{\deg(\Delta_J)} \quad (2.4)$$

で与えられる。

3 球面増大関数の明示的な公式と組合せ的な恒等式

ここでは A 型の Artin モノイド、つまりブレイドモノイドの場合の結果を述べる。他の型の Artin モノイドについても同様な結果が得られる。

A_n 型の Coxeter 行列とは次のように定義される n 次正方行列である。

$$A_n = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad m_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 3 & (|i - j| = 1) \\ 2 & (|i - j| \geq 2) \end{cases} \quad (3.1)$$

A_{n-1} 型の Artin モノイドの分母多項式を $a_n(x)$ と書き、その母関数 $A(x, y)$ を次のように定義する。

$$a_n(x) := \begin{cases} N_{A_{n-1}}(x) & (n \geq 2) \\ 1 & (n = 0, 1) \end{cases} \quad (3.2)$$

$$A(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) y^n \quad (3.3)$$

$A(x, y)$ は定理 1 から計算することができる。

命題 1

$A(x, y)$ は次のようにベキ級数の逆数として書ける。

$$A(x, y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{\frac{n(n-1)}{2}} y^n \right)^{-1} \quad (3.4)$$

$A(x, y)$ をベキ級数に展開することにより、 A_{n-1} 型の Artin モノイドの球面増大関数 $\dot{P}_{A_{n-1}}(x)$ の明示的な公式が得られる。

定理 2

A_{n-1} 型の Artin モノイドの球面増大関数 $\dot{P}_{A_{n-1}}(x)$ は以下の公式で与えられる.

$$\dot{P}_{A_{n-1}}(x) = \left(\sum_{s \in P(n)} (-1)^{n-|s|} C(s) x^{\|s\|} \right)^{-1} \quad (3.5)$$

ここで正の整数 n の分割全体の集合を $P(n)$ で表した.

$$P(n) := \left\{ s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}^n \mid \sum_{k=1}^n k s_k = n \right\} \quad (3.6)$$

また, $s \in P(n)$ に対し, $|s| := \sum_{k=1}^n s_k$, $\|s\| := \sum_{k=1}^n \frac{k(k-1)}{2} s_k$, $C(s) := |s|! / s_1! \cdots s_n!$ と記号を定義した.

$\dot{P}_{A_{n-1}}(x)$ をベキ級数に展開することにより次の系を得る.

系 1

n 本の紐からなる交点数が k の positive なブレイド (紐が交差するとき必ず右の紐が左の紐の上を通るようなブレイド) のイソトピー類の個数は次の式で与えられる.

$$\sum_{t \in P(k)} (-1)^{|t|} C(t) \prod_{j=1}^k (a_{n,j})^{t_j} \quad (3.7)$$

ここで

$$a_{n,j} := \sum_{\substack{s \in P(n) \\ \|s\|=j}} (-1)^{n-|s|} C(s) \quad (3.8)$$

とおいた.

1 と -1 を定理の公式の x に代入し, それぞれ $A(1, y)$, $A(-1, y)$ と比較することにより次の恒等式が得られる.

系 2

$n \geq 2$ に対し, 以下の恒等式が成り立つ.

$$\sum_{s \in P(n)} (-1)^{|s|} C(s) = 0 \quad (3.9)$$

$$\sum_{s \in P(n)} (-1)^{|s| + \|s\|} C(s) = (-1)^n 2 \quad (3.10)$$

他の型の Artin モノイドからも (3.10) のような恒等式が得られる. 組合せ論的な解釈を与えることができそうなので, これから調べてみたい.

参考文献

- [1] M. Albenque and P. Nadeau, Growth function for a class of monoids, FPSAC 2009: Formal Power Series and Algebraic Combinatorics 2009, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc. 2009, 25-38.

- [2] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6, *Eléments de Mathématique XXXIV*, Herman, Paris, 1968.
- [3] E. Brieskorn and K. Saito, Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen, *Invent. Math.* **17** (1972), 245-271.
- [4] P. Deligne, Les immeubles des groupes de tresses généralisés, *Invent. Math.* **17** (1972), 273-302.
- [5] M. Fuchiwaki, M. Fujii, K. Saito and S. Tsuchioka, Geodesic automata and growth functions for Artin monoids of finite type, Preprint, RIMS-1646, 2008.
- [6] K. Saito, Growth functions for Artin monoids, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **85** no. 7 (2009), 81-94.