

# 共鳴バンド法による局所係数コホモロジーの計算

吉永正彦\*

2014 年 5 月 31 日

## Abstract

RIMS の研究集会「離散群と双曲空間の複素解析とトポロジー」(2014 年 1 月 20 日～24 日) では “Milnor fibers of real line arrangements” というタイトルで講演させていただいた。内容は直線配置のミルナーファイバーのコホモロジーへのモノドロミー固有分解を共鳴バンドという実組合せ論的な対象を使って記述する方法についてであった。講演内容は既に出版されている論文 [16] にほぼ忠実に沿っているため、本稿では講演内容の再現はせずに、局所係数コホモロジーを計算する際の、共鳴バンド法と既存のアルゴリズムの比較を行う。

## 1 Introduction

超平面配置における中心的な課題は、様々な代数的、乃至幾何学的な不変量が超平面たちの交わり方の組合せ論的データだけで決定できるか? という問題である。このような問が興味を持たれている理由は次の二つの結果による所が大きい。共に、位相幾何的な不変量が、(ある意味で) 組合せ論的構造で統制できることを示している。

- 単体的配置の複素化補集合が  $K(\pi, 1)$  空間である (Deligne [3]).
- 複素超平面配置補集合のコホモロジー環の組合せ論的表示 (Orlik-Solomon [4]).

また [9, 10] にはじまる寺尾による自由配置に関する一連の研究も、代数的構造が組合せ論的構造と密接に関係していることを示す一例としてあげられる。しかし一方、Rybnikov によって、複素超平面配置の補集合の基本群は組合せ論的には決定できないという反例が構成された [6].

---

\*北海道大学 Email: yoshinaga@math.sci.hokudai.ac.jp

繰り返しになるが、複素超平面配置の補集合のコホモロジー環は組合せ論的に決定できるが、基本群などのホモトピー型についてはそうではないことが分かっている。ではそれらの間でどこまで組合せ論的に決定できるのか？というの自然な問題であり、多くの研究がある。とりわけ、(階数 1 の) 局所係数コホモロジーがよく研究されている。局所系が注目される一つの動機は、青本和彦による高次元超幾何関数の理論 ([1]) との関係であるが、他にも局所係数コホモロジーは Milnor fiber のホッジ構造、被覆空間のベッチ数、基本群の Alexander 多項式など様々な数学的対象と関係している。しかし未だに Orlik-Solomon や Rybnikov のような決定的な結果は得られていない。というのも、局所係数コホモロジーの定義にはそもそも基本群の情報が必要なので、局所係数コホモロジーの計算をするためには、既に組合せ論的に決定できないことが分かっている基本群を経由しないといけないからである。どちらかと言うと、局所係数コホモロジーは組合せ論的に決定できるのではないかと期待されているのだが、そのためには基本群を経由せずに局所係数コホモロジーを表示する方法を見出さなければならない。

筆者は以前から「極小セル分割」と呼ばれる、超平面配置の補集合の効率のよいセル分割の構造とその応用を研究している。最近、共鳴バンドという実構造に付随した対象を導入し、それを利用して Milnor fiber のコホモロジーの固有空間分解 ([16])、局所係数コホモロジー ([17])、青本複体のコホモロジー (M. Torielli 氏との共同研究 [11])、等を計算する方法を考案し、それらの応用を研究している。共鳴バンド法は、現時点で唯一の「基本群を経由していないように見える」計算方法であり、組合せ論的決定性に対しても役に立つと期待している。

本稿の目的は、局所係数コホモロジーの計算法に関して、既存の計算法と共鳴バンド法を比較することである ([17])。局所係数コホモロジーの計算は、基本的には、ある巨大な行列の階数の計算に帰着される。既存の計算方法では、行列のサイズが

$$(\text{基本群の極小な生成元の個数}) \times (\text{基本群の極小な関係式の個数})$$

というものだったのが、共鳴バンド法を使うと、劇的に小さくなる (サイズは局所系に依存するのだが、どんな場合でも、かなり小さくなる)。そのため、これまではコンピュータ頼みだった計算が、手計算でも届くようになった。

以下、§2 では直線配置と局所系に関する記号の準備をする。§3 では局所係数コホモロジーの計算に関する“既存の方法”の一例として、ねじれ極小複体を紹介する。§4 では共鳴バンド法を使った計算法を紹介する。§5 では上記二つの方法の比較、今後の課題を述べる。

## 2 準備：直線配置と局所系

実直線配置  $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_n\}$  とは,  $\mathbb{R}^2$  内の有限個の (アフィン) 直線の集合のことである. その定義方程式を  $Q_{\mathcal{A}}(x, y) = \prod_{i=1}^n \alpha_i$ , とする. ただし,  $\alpha_i$  は直線  $H_i$  を定める一次式である. 以下では,

$\mathcal{A}$  は少なくとも一つ交点を持つ

と仮定する. この仮定は,  $\mathcal{A}$  の  $n$  本の直線が全て平行である場合を除外する仮定である.  $\mathcal{A}$  の錐 (coning)  $c\mathcal{A}$  とは, 次の式で定義される,  $\mathbb{R}^3$  内の (原点を通る)  $n+1$  枚の平面の集合である,

$$Q_{c\mathcal{A}}(x, y, z) = z^{n+1} Q\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right).$$

ここで, 一枚追加された平面  $\{z=0\} \in c\mathcal{A}$  はもとの超平面配置の無限遠直線  $H_\infty$  に対応する. 錐  $c\mathcal{A}$  はまた実射影平面  $\mathbb{RP}^2$  上の直線配置とみなすこともできる.

$\mathcal{A}$  の複素化補集合とは, 以下の空間である.

$$M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{Q_{\mathcal{A}} = 0\} = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{Q_{c\mathcal{A}} = 0\}$$

本稿では  $\mathcal{A}$  は常に  $\mathbb{R}^2$  内の直線配置を表し,  $c\mathcal{A}$  は  $\mathbb{RP}^2$  上の直線配置とみなす.

複素化補集合  $M(\mathcal{A})$  上の階数 1 の局所系  $\mathcal{L}$  を考える. 局所系  $\mathcal{L}$  は, 定義より, 群準同型 (指標)

$$\pi_1(M(\mathcal{A}), *) \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

によりさだまる. ここで  $\mathbb{C}^*$  はアーベル群なので, この写像はホモロジー群からの準同型  $H_1(M(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathbb{C}^*$  とみなしてもよい. ホモロジー群  $H_1(M(\mathcal{A}))$  は, 各  $H_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) のまわりをまわる meridian で生成される階数  $n$  の自由アーベル群なので, 局所系  $\mathcal{L}$  は指標トーラスの点  $(q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$  によって定まる. ただし,  $q_i \in \mathbb{C}^*$  は  $H_i$  をまわる meridian に沿ったモノドロミーである. 無限遠直線  $H_\infty$  の周りのモノドロミー  $q_\infty$  は次のように定まっていることに注意する.

$$q_\infty = (q_1 q_2 \cdots q_n)^{-1}.$$

指標トーラスの点  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$  に付随して得られる局所系を  $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}$  とする.

以下局所系を扱う際に重要となる共鳴条件を定義する. そのために記号の準備をする. 一般に部分集合  $X \subset \mathbb{RP}^2$  に対して,  $\mathcal{A}_X = \{H \in c\mathcal{A} \mid H \supset X\}$  は  $X$  を含む直線全体の集合で,  $q_X = \prod_{H \in \mathcal{A}_X} q_H$  はそれらの直線のモノドロミーの積である.

**Definition 2.1.** (1) 直線  $H \in c\mathcal{A}$  が *resonant* であるとは,  $q_H = 1$  が満たされることである.

(2) 点  $X \in \mathbb{RP}^2$  が *multiple point* であるとは, 少なくとも三本の  $c\mathcal{A}$  の直線が  $X$  を通ることである.

(3) Multiple point  $X$  が *resonant point* であるとは,  $q_X = 1$  を満たすこととする.

さらに,  $q_{ijk} := q_i q_j q_k$ ,  $q_{ijk}^{1/2} := q_i^{1/2} q_j^{1/2} q_k^{1/2}$  などの略記法を使う.

### 3 ねじれ極小複体

本節では局所係数コホモロジーを計算する一般的な方法を紹介する.

局所係数コホモロジーを計算するには(等価と思われる)いくつかの方法がある. よく使われているのは Suciú 氏によるもので, 基本群の表示から Fox 微分を使って得られる行列の階数を計算するものである [2, 8, 7]. 以下では極小セル分割 [12, 13, 14, 15] に基づく方法を述べる. この方法では, 実構造 (chamber) を主に使っており, 基本群の情報は表には現れないが, 極小セル分割における 2次元の貼りつけ写像の情報を実構造の言葉だけで書き換えたものなので, 両者はほぼ等価な情報を使っているといえる. 実際, 得られる行列も同じサイズ (行 = 生成元の個数, 列 = 関係式の個数) なので, 計算の複雑さも同程度である. しかし後者の極小セル分割に基づくものは, 以下のセクションで述べる共鳴バンドを使った簡約化が可能である.

まず, 実補集合  $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H$  の連結性分を chamber と呼び, chamber 全体の集合を  $\text{ch}(\mathcal{A})$  で表す. Chamber  $C \in \text{ch}(\mathcal{A})$  が有界 (bounded) であるとは, その面積が有限であることを意味する. 同様に, 非有界 (unbounded) chamber とは, 面積が無限の chamber のことである. 非有界 chamber  $U \in \text{ch}(\mathcal{A})$  に対して, その opposite unbounded chamber  $U^\vee$  が定まる (詳細は [14, Definition 2.1] 参照. 直観的な説明は, 以下の Figure 1 を見て頂ければ分かるかと思えます).

$\mathcal{F}$  を generic な旗

$$\mathcal{F} : \emptyset = \mathcal{F}^{-1} \subset \mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}^1 \subset \mathcal{F}^2 = \mathbb{R}^2,$$

とする. ただし,  $\mathcal{F}^k$  は  $k$ -次元アフィン部分空間である.

**Definition 3.1.**  $k = 0, 1, 2$  に対して, chamber の部分集合  $\text{ch}_{\mathcal{F}}^k(\mathcal{A}) \subset \text{ch}(\mathcal{A})$  を以下で定める.

$$\text{ch}_{\mathcal{F}}^k(\mathcal{A}) := \{C \in \text{ch}(\mathcal{A}) \mid C \cap \mathcal{F}^k \neq \emptyset, C \cap \mathcal{F}^{k-1} = \emptyset\}.$$

これにより, chamber の集合の分割  $\text{ch}(\mathcal{A}) = \text{ch}_{\mathcal{F}}^0(\mathcal{A}) \sqcup \text{ch}_{\mathcal{F}}^1(\mathcal{A}) \sqcup \text{ch}_{\mathcal{F}}^2(\mathcal{A})$  が得られる. 実はこの分割には幾何学的な意味があり, 各  $k = 0, 1, 2$  に対して, それぞれベッチ数が現れることが分かっている  $|\text{ch}_{\mathcal{F}}^k(\mathcal{A})| = b_k(M(\mathcal{A}))$ .

ここでさらに旗  $\mathcal{F}$  に仮定をおく.

- $\mathcal{F}^1$  は  $\mathcal{A}$  の交点たちを分離しない,
- $\mathcal{F}^0$  は  $n$  点  $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}^1$  を分離しない.

これらの条件は、直観的には、部分空間たちが十分に無限遠の近くにあることを意味している. このような仮定の下、座標  $x_1, x_2$  を  $\mathcal{F}^0$  を原点  $(0, 0)$  とし、 $\mathcal{F}^1$  は  $x_1$ -軸 ( $x_2 = 0$ ), となるようにし、さらに  $\mathcal{A}$  の全ての交点たちが上半平面  $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 > 0\}$  に含まれ、 $n$  個の交点  $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}^1$  が半直線  $\{(x_1, 0) \mid x_1 > 0\}$  に含まれるようにする.

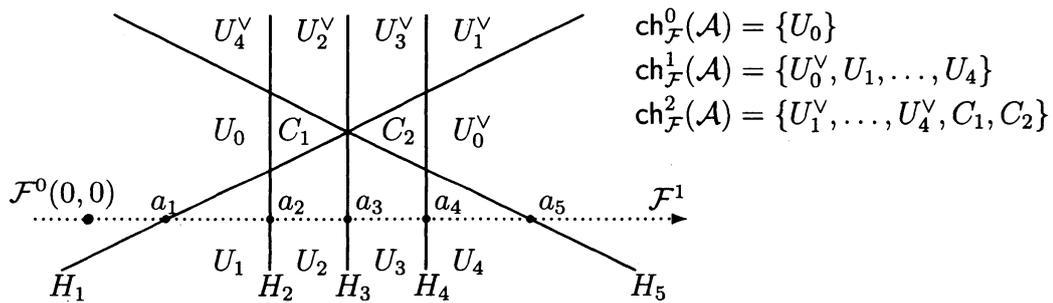
以上の設定のもと、交点  $H_i \cap \mathcal{F}^1$  の座標を  $(a_i, 0)$  とおく. 必要であれば、直線  $H_i \in \mathcal{A}$  の番号付けと、定義方程式  $\alpha_i$  に  $(-1)$  をかけることで、次のように仮定しても一般性を失わない.

- $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ,
- 原点  $\mathcal{F}^0$  は各  $i$  に対して、 $H_i$  の負の半空間  $H_i^- = \{\alpha_i < 0\}$  に含まれる.

さらに、 $\text{ch}_0^{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) = \{U_0\}$ ,  $\text{ch}_1^{\mathcal{F}}(\mathcal{A}) = \{U_1, \dots, U_{n-1}, U_0^{\vee}\}$  とおく. ただし、 $U_p \cap \mathcal{F}^1$  が开区間  $(a_p, a_{p+1})$  ( $p = 1, \dots, n-1$ ) と一致するよう仮定する. 言いかえると(より正確には)  $U_0, U_1, \dots, U_{n-1}$  and  $U_0^{\vee}$  は以下の不等式で定まる chamber である.

$$\begin{aligned}
 U_0 &= \bigcap_{i=1}^n \{\alpha_i < 0\}, \\
 U_p &= \bigcap_{i=1}^p \{\alpha_i > 0\} \cap \bigcap_{i=p+1}^n \{\alpha_i < 0\}, \quad (p = 1, \dots, n-1), \\
 U_0^{\vee} &= \bigcap_{i=1}^n \{\alpha_i > 0\}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

これらの概念の具体例は Figure 1 を見よ.



$\mathcal{L}$  を  $M(\mathcal{A})$  上の階数 1 の局所系とする. 既に述べたように,  $\mathcal{L}$  は  $n$  個の (0 でない) 複素パラメータ ( $H_i$  の周りのモノドロミー)  $q_i \in \mathbb{C}^*$ ,  $i = 1, \dots, n$  で決まる. 後で使うので, 各  $i$  に対して, 平方根  $q_i^{1/2} \in \mathbb{C}^*$  を固定しておく.

**Definition 3.2.** (1) 二つの chamber  $C, C' \in \text{ch}(\mathcal{A})$  に対して, それらを分離する直線全体の集合を  $\text{Sep}(C, C')$  であらわす.

(2) 二つの chamber  $C, C' \in \text{ch}(\mathcal{A})$  に対して, 複素数  $\Delta(C, C') \in \mathbb{C}$  を

$$\Delta(C, C') := \prod_{H_i \in \text{Sep}(C, C')} q_i^{1/2} - \prod_{H_i \in \text{Sep}(C, C')} q_i^{-1/2}.$$

で定める.

ここで局所係数コホモロジーを計算する複体  $(\mathbb{C}[\text{ch}_{\mathcal{F}}^{\bullet}(\mathcal{A})], d_{\mathcal{L}})$  を定める.

(i) 写像  $d_{\mathcal{L}} : \mathbb{C}[\text{ch}_{\mathcal{F}}^0(\mathcal{A})] \rightarrow \mathbb{C}[\text{ch}_{\mathcal{F}}^1(\mathcal{A})]$  を以下で定義する.

$$d_{\mathcal{L}}([U_0]) = \Delta(U_0, U_0^{\vee})[U_0^{\vee}] + \sum_{p=1}^{n-1} \Delta(U_0, U_p)[U_p].$$

(ii) 写像  $d_{\mathcal{L}} : \mathbb{C}[\text{ch}_{\mathcal{F}}^1(\mathcal{A})] \rightarrow \mathbb{C}[\text{ch}_{\mathcal{F}}^2(\mathcal{A})]$  を以下で定義する.

$$d_{\mathcal{L}}([U_p]) = - \sum_{\substack{C \in \text{ch}_{\mathcal{F}}^2(\mathcal{A}) \\ \alpha_p(C) > 0 \\ \alpha_{p+1}(C) < 0}} \Delta(U_p, C)[C] + \sum_{\substack{C \in \text{ch}_{\mathcal{F}}^2(\mathcal{A}) \\ \alpha_p(C) < 0 \\ \alpha_{p+1}(C) > 0}} \Delta(U_p, C)[C], \quad (\text{for } p = 1, \dots, n-1),$$

$$d_{\mathcal{L}}([U_0^{\vee}]) = - \sum_{\alpha_n(C) > 0} \Delta(U_0^{\vee}, C)[C].$$

具体例では例えば次のような行列を扱うことになる.

**Example 3.3.**  $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_5\}$  と旗  $\mathcal{F}$  を Figure 1 の通りとする. この時, 上の写像は次のような行列で表される.

$$d_{\mathcal{L}}([U_0]) = ([U_1], [U_2], [U_3], [U_4], [U_0^{\vee}]) \begin{pmatrix} q_1^{1/2} & -q_1^{-1/2} \\ q_{12}^{1/2} & -q_{12}^{-1/2} \\ q_{123}^{1/2} & -q_{123}^{-1/2} \\ q_{1234}^{1/2} & -q_{1234}^{-1/2} \\ q_{12345}^{1/2} & -q_{12345}^{-1/2} \end{pmatrix},$$

$$d_{\mathcal{L}}([U_1], [U_2], [U_3], [U_4], [U_0^{\vee}]) = ([U_1^{\vee}], [U_2^{\vee}], [U_3^{\vee}], [U_4^{\vee}], [C_1], [C_2])$$

$$\times \begin{pmatrix} q_{12345}^{1/2} - q_{12345}^{-1/2} & 0 & 0 & 0 & -(q_1^{1/2} - q_1^{-1/2}) \\ q_{125}^{1/2} - q_{125}^{-1/2} & -(q_{15}^{1/2} - q_{15}^{-1/2}) & 0 & q_{1345}^{1/2} - q_{1345}^{-1/2} & -(q_{134}^{1/2} - q_{134}^{-1/2}) \\ q_{1235}^{1/2} - q_{1235}^{-1/2} & 0 & -(q_{15}^{1/2} - q_{15}^{-1/2}) & q_{145}^{1/2} - q_{145}^{-1/2} & -(q_{14}^{1/2} - q_{14}^{-1/2}) \\ 0 & 0 & 0 & q_{12345}^{1/2} - q_{12345}^{-1/2} & -(q_{1234}^{1/2} - q_{1234}^{-1/2}) \\ q_{12}^{1/2} - q_{12}^{-1/2} & -(q_1^{1/2} - q_1^{-1/2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(q_5^{1/2} - q_5^{-1/2}) & q_{45}^{1/2} - q_{45}^{-1/2} & -(q_4^{1/2} - q_4^{-1/2}) \end{pmatrix}.$$

これらの写像から cochain complex が得られ, 局所係数コホモロジーが計算できることが知られている. (証明は [12, 13, 14])

**Theorem 3.4.** 上の設定のもと,  $(\mathbb{C}[\text{ch}_{\mathcal{F}}^{\bullet}(\mathcal{A})], d_{\mathcal{L}})$  は cochain complex となり,

$$H^k(\mathbb{C}[\text{ch}_{\mathcal{F}}^{\bullet}(\mathcal{A})], d_{\mathcal{L}}) \simeq H^k(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}).$$

上の Example 3.3 では, 局所係数コホモロジーの次元の計算が, 実質的に  $5 \times 6$  行列の階数の計算に帰着されたことが分かる.

もうひとつ例を見ておく.

**Example 3.5.**  $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_6\}$  と旗  $\mathcal{F}$  を, Figure 2 の直線配置とする. この時,

$$d_{\mathcal{L}}([C_0]) = a_1 \cdot [C_1] + a_{12} \cdot [C_2] + a_{123} \cdot [C_3] + a_{1234} \cdot [C_4] + a_{12345} \cdot [C_5] + a_{123456} \cdot [C_6],$$

ただし, ここで  $a_{ijk} = q_{ijk}^{1/2} - q_{ijk}^{-1/2}$  等の略記号を使った. またもう一つの写像  $d_{\mathcal{L}} : \mathbb{C}[\text{ch}_{\mathcal{F}}^1(\mathcal{A})] \rightarrow \mathbb{C}[\text{ch}_{\mathcal{F}}^2(\mathcal{A})]$  は以下のように表示される.

$$d_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} [C_1] \\ [C_2] \\ \vdots \\ [C_6] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_4 & 0 & 0 & a_{1245} & 0 & a_{123456} & a_{12456} & 0 \\ -a_4 & 0 & 0 & -a_{45} & -a_{145} & 0 & 0 & -a_{1456} & 0 \\ a_{34} & a_{234} & a_{1234} & a_{345} & a_{1345} & a_{12345} & 0 & a_{13456} & a_{123456} \\ -a_3 & -a_{23} & -a_{123} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 & -a_{13} & -a_{123} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -a_{13} & -a_{123} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [D_1] \\ [D_2] \\ \vdots \\ [D_9] \end{pmatrix}.$$

(執筆の都合上, 前の例の転置の表示をしている.)

この例では, 局所係数コホモロジーの次元は,  $6 \times 9$  行列の階数の計算に帰着される.

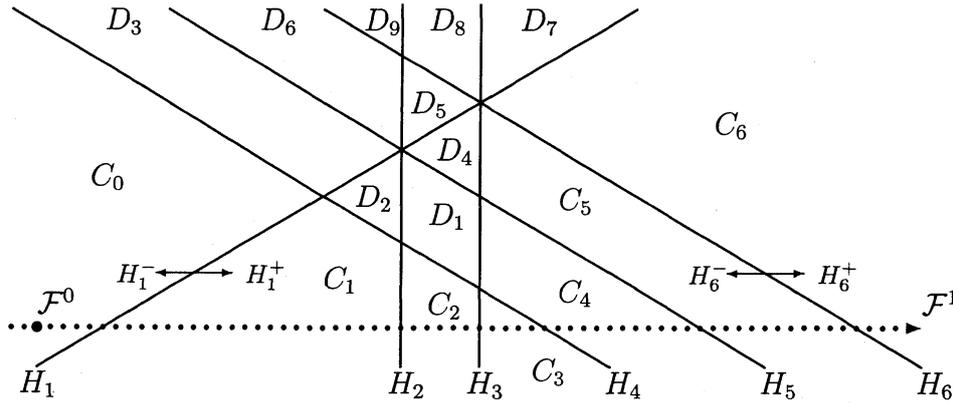


Figure 2: Example 3.5

## 4 共鳴バンド法

本セクションでは、ある簡単な仮定の下、前節で紹介した cochain complex の計算が著しく簡略化されることを紹介する。必要な仮定は、無限遠直線での non-resonance

$$q_\infty \neq 1 \quad (2)$$

である。以下これを仮定する。

**Definition 4.1.** バンド  $B$  とは、隣り合った平行線  $H_i$  and  $H_{i+1}$  に挟まれた領域のことである。(バンドはその中の chamber の和集合とみなしても良い。)

各バンド  $B$  は、両端に二つの unbounded chambers を含んでいる。それらを  $U_1(B), U_2(B) \in \text{ch}(\mathcal{A})$  とする。この選択は二通りあり、どちらでも計算には問題ないのだが、一つ標準的な選択を固定するために、 $U_1(B) \in \text{ch}_{\mathcal{F}}^1(\mathcal{A}), U_2(B) \in \text{ch}_{\mathcal{F}}^2(\mathcal{A})$  とする。 $U_1(B)$  と  $U_2(B)$  は互いに opposite chambers である。

**Definition 4.2.** バンド  $B$  が  $\mathcal{L}$ -resonant であるとは、

$$\Delta(U_1(B), U_2(B)) = 0.$$

を満たすこととする。 $\mathcal{L}$ -resonant なバンド全体の集合を  $\text{RB}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$  で表す。

$\mathcal{L}$ -resonant なバンド  $B \in \text{RB}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$  に対して、定常波と呼ばれる元  $\nabla_i(B) \in \mathbb{C}[\text{ch}(\mathcal{A})]$  ( $i = 1, 2$ ) を以下で定める。

$$\nabla_i(B) = \sum_{\substack{C \in \text{ch}(\mathcal{A}), \\ C \subset B}} \Delta(U_i(B), C) \cdot [C]. \quad (3)$$

上の定義において、 $i = 1, 2$  の違いは高々符号にしか影響しない。

**Proposition 4.3.**  $\nabla_2(B) = \pm \nabla_1(B)$ .

というわけで, 以下では簡単のため,  $i = 1$  だけを考え,  $\nabla(B) := \nabla_1(B)$  とする.

主結果は, 局所係数コホモロジーの次元が, 定常波の間の線形関係式の個数に他ならないということである. 正確には,  $B \mapsto \nabla(B)$  を線形写像

$$\nabla : \mathbb{C}[\text{RB}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})] \longrightarrow \mathbb{C}[\text{ch}(\mathcal{A})]. \quad (4)$$

に拡張したものを考える. 実はこの写像の像は, bounded chamber だけに support を持つベクトルであることも  $\mathcal{L}$ -resonance の定義からすぐ分かる. 主結果は以下である.

**Theorem 4.4.** 上で述べたように,  $q_{\infty} \neq 1$  と仮定する. この時,

$$\text{Ker}(\nabla : \mathbb{C}[\text{RB}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})] \longrightarrow \mathbb{C}[\text{ch}(\mathcal{A})]) \simeq H^1(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}).$$

証明は [17] を参照.

ここで例を見てみる. Figure 1 の直線配置では, バンドが

- $B_1$ :  $H_2$  と  $H_3$  で挟まれた領域,
- $B_2$ :  $H_3$  と  $H_4$  で挟まれた領域,

の二つしかないことが分かる. これらが  $\mathcal{L}$ -resonance となるための必要十分条件は,  $q_{15} = 1$  であることが分かる. つまり,  $q_{15} \neq 1$  (かつ  $q_{\infty} \neq 1$ ) なら, 直ちに  $H^1(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}) = 0$  が分かる (なぜなら, 共鳴バンドがないので,  $\mathbb{C}[\text{RB}_{\mathcal{L}}(\mathcal{A})] = 0$  となるから). また,  $q_{15} = 1$  が成立する場合は,

$$d_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} [B_1] \\ [B_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1^{1/2} - q_1^{-1/2} & 0 \\ 0 & q_5^{1/2} - q_5^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [C_1] \\ [C_2] \end{pmatrix}$$

となるので, 実質的に  $2 \times 2$  対角行列の階数の計算に帰着される.

Figure 2 の直線配置では, バンドが

- $B_1$ :  $H_2$  と  $H_3$  で挟まれた領域,
- $B_2$ :  $H_4$  と  $H_5$  で挟まれた領域,
- $B_3$ :  $H_5$  と  $H_6$  で挟まれた領域,

の三つある. このように共鳴バンドは高々三つで, bounded chamber が4つあるので, 高々 $3 \times 4$ 行列の階数を扱えば良い事が分かる. 具体的に表示すると,

$$d_{\mathcal{L}} \begin{pmatrix} [B_1] \\ [B_2] \\ [B_3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 & 0 & a_{45} & a_{145} \\ a_3 & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [D_1] \\ [D_2] \\ [D_4] \\ [D_5] \end{pmatrix},$$

となる. ただし,  $a_{ijk} = q_{ijk}^{1/2} - q_{ijk}^{-1/2}$  などの略記号をつかった. いずれにしても, 元の行列 (それぞれ  $5 \times 6, 6 \times 9$ ) よりも著しくサイズの小さな行列でよいことが分かる.

## 5 応用と問題

上で見たように, 共鳴バンド法を使うことによって, 局所係数コホモロジーの計算を大幅に簡易化することができる. 一つだけ仮定  $q_{\infty} \neq 1$  が必要であるが, これは本質的ではない. というのも, 全てのモノドロミーが  $q_i = 1$  なら, そもそも局所系が自明となり, 局所係数コホモロジーの次元は  $n$  である. 少なくとも一つの直線  $H_i$  で  $q_i \neq 1$  が成り立っていれば, それを無限遠に置くことで, 共鳴バンド法を使える状況にすることができる.

一つの応用例として, 特性多様体の計算がある. 特性多様体は, cohomology jumping locus と呼ばれ, 点集合としては, 指標トーラスの中で対応する局所係数コホモロジーの次元がジャンプする点を集めてきたものである. Suciu は多くの例に対して特性多様体の計算をする中で ([8, 7]), “Deleted  $B_3$  arrangement” の特性多様体が, “translated component” と呼ばれる, 組合せ論的手法によっては検出が困難な既約性分を持つことを発見した. 論文 [8] を見てもらえば分かる通り, 問題は, 各成分が7変数 Laurent 多項式の  $7 \times 12$  行列の階数が下がるパラメータの集合の記述をすることに帰着される. 具体的な計算はコンピュータで行ったと筆者は個人的に聞いているが, 共鳴バンド法を使えば手計算で同じ結果が確認できる (詳細は [17]).

共鳴バンド法の問題点としては, そもそも実構造を持つ場合にしか使えないことである. 「実数体上定義できる直線配置」というのは, 例えると「代数的数の中で, 実代数的数だけを考える」といっているようなもので, かなり強い制限であり, 多くの興味深い直線配置を排除することになっている. この点を改善するには, 実構造を仮定しない極小セル分割の理解, すなわち [12, 13, 14, 15] の複素版を実行する必要があるように見える. ここ数年, 離散モース理論を使って複素超平面配置の極小性を理解する試みがいくつかのグループで研究されている. 一般の複素超平面配置に対する極小性の理解が進むためには, 平行して様々な離散幾何や組合せ論的課題を解決する必要があるように思われる. 将来の進展を期待したい.

**Acknowledgement.** 講演機会を頂き、研究集会世話人の藤井道彦先生に感謝いたします。講演後に内容に興味を持っていただき、有益な助言、文献等を教えて頂いた齋藤恭司先生、作間誠先生、島田伊知朗先生にも感謝いたします。

## References

- [1] 青本和彦, 喜多通武, 超幾何関数論 (シュプリンガー現代数学シリーズ), 丸善出版 (2012).
- [2] D. C. Cohen, A. Suciu, On Milnor fibrations of arrangements. *J. London Math. Soc.* **51** (1995), no. 2, 105-119.
- [3] P. Deligne, Les immeubles des groupes de tresses généralisés, *Invent. Math.* **17** (1972), 273-302.
- [4] P. Orlik, L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes. *Invent. Math.* **56** (1980), 167-189.
- [5] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren Math. Wiss. **300**, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [6] G. L. Rybnikov, On the fundamental group of the complement of a complex hyperplane arrangement. *Funct. Anal. Appl.* **45** (2011), no. 2, 137-148
- [7] A. Suciu, Fundamental groups of line arrangements: enumerative aspects. *Advances in algebraic geometry motivated by physics (Lowell, MA, 2000)*, 43-79, Contemp. Math., 276, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [8] A. Suciu, Translated tori in the characteristic varieties of complex hyperplane arrangements. *Top. and its appl.* **118** (2002) 209-223.
- [9] H. Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness. I, II. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **27** (1980), no. 2, 293-320.
- [10] H. Terao, Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn formula. *Invent. Math.* **63** (1981), no. 1, 159-179.
- [11] M. Torielli, M. Yoshinaga, Resonant bands, Aomoto complex, and Real 4-nets. arXiv:1404.5014, Preprint, Apr. 22, 2014.

- [12] M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Lefschetz's hyperplane section theorem. *Kodai Math. J.*, **30** (2007) no. 2, 157–194.
- [13] M. Yoshinaga, The chamber basis of the Orlik-Solomon algebra and Aomoto complex. *Arkiv för Matematik*, vol. 47 (2009), 393-407.
- [14] M. Yoshinaga, Minimality of hyperplane arrangements and basis of local system cohomology. To appear in the proceedings of the 5-th Franco-Japanese Symposium on Singularities, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics.
- [15] M. Yoshinaga, Minimal stratifications for line arrangements and positive homogeneous presentations for fundamental groups. *Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology*, 503-533, CRM Series, 14, Ed. Norm., Pisa, 2012.
- [16] M. Yoshinaga, Milnor fibers of real line arrangements. *J. Singul.* **7** (2013), 220-237.
- [17] M. Yoshinaga, Resonant bands and local system cohomology groups for real line arrangements. (arXiv:1301.1888) To appear in Vietnam Journal of Mathematics.