数理解析研究所講究録
第1939巻2015年143-151

目標初期位置に関する推測のある捜索ゲーム

防衛大学校　宝崎　隆祐
Ryusuke Hohzaki
Department of Computer Science,
National Defense Academy
防衛大学校理工学研究科　朱 官植
Kwanshik Joo
Graduate School of Science and Engineering,
National Defense Academy

1　はじめに

捜索ゲームには通常2人のプレイヤーが登場する．捜索者と目標である．いわゆる捜索配分ゲーム (search allocation game, SAG)[15] では，目標は捜索空間内で移動戦略をとり捜索者から逃避しようとし，捜索者は手持ちの捜索資源を空間に投入して目標を発見しようとする．この報告では，捜索開始時の目標初期位置を目標しか知らず，捜索者はそれを推測する，すなわち初期位置が目標の個人情報であるSAGを取り扱っている．実際の捜索活動においては，目標の初期位置はその後の捜索の結果を左右する重要な要素と見なされている．我々は，このSAGを不完備情報ゲームとしてモデル化し，その均衡解を導出する．

捜索問題として，捜索者一方だけの最適捜索資源配分を最初に議論したのはKoopman [26] である．これが，以後最適資源配分問題 [19] と呼ばれる研究分野の発端となった．Koopman問題を連続分割可能な捜索資源や離散資源の最適配分問題として一般化したのが，De Guenin [7] やKadane [23] である．彼らの問題は静止目標を対象にしていたが，移動目標に対する捜索問題は，Pollock [29] やDobbie [3], Hellman [8], Iida [20], Kan [24] らによって行われている．また，それまでの様々な捜索問題を数学的に精緻な定式化群にまとめたのがStone [30] である．移動目標の探知確率最大化問題の数値解法アルゴリズムはBrown [1] やWashburn [32] によって考案された．以上の研究は連続関数に対する凸計画問題，大域的最適化問題に属する問題であるが，捜索者の移動経路に制約がある問題を分枝限定法，緩和法等の離散最適化手法を用いて解いたものにEagle and Yee [5] やHohzaki and Iida [9] の研究がある．

上述した捜索者側だけの一方的な最適化問題は，目標も意思決定者として扱う捜索ゲームへと発展する．捜索ゲームに関するほとんどの研究では，目標は相変わらず捜索空間上を移動する戦略をとるが，捜索者の戦略を捜索資源の配分にとるか，目標と同じく捜索空間上での移動にとるかで，捜索ゲームは捜索配分ゲーム (search allocatio game, SAG）か捜索逃避ゲーム (search-and-evasion game, SAEG）に分類される [6]．SAEGの研究として，Danskin [2], Nakai [27], Kikuta [25]，Washburn [31] やEagle and Washburn [4] の研究がある．SAGの研究としては，静止目標に対する問題をNakai [28] やIidaら [22] が研究しており，移動目標に対してはHohzakiやIidaら

[21, 16] の研究がある．目標移動に関する現実的な制約条件を導入し，より精緻で現実的なSAGモデルを，Hohzaki and Washburn [18] や Hohzaki ら [17, 10] が研究している．一方，それまでせいぜい総量制約ほどしかなかった捜索資源制約に現実的な条件を加味したSAGの研究に，Hohzaki [11, 13] がある．また，それまでの捜索ゲームの研究では目標と捜索者を敵対するプレイヤーとして考え，そのほとんどが非協力2人ゼロ和のモデルを採用していたが， Hohzaki [12, 14] は複数捜索者を協力行動があり得るプレイヤーとして見なし，非ゼロ和や協力ゲームの枠組みを初めて捜索ゲームに持ち込んだ．

さて，捜索ゲームに関する従来研究では基本的には情報完備ゲームのモデルのみが取り扱われてきた．したがって，プレイヤーは捜索空間や時間空間をはじめ，捜索者の利用する捜索資源や目標の初期位置を公開情報として共有するモデルとなっていた．目標が初期時点を認識し，かつ捜索開始が初期時点から時間遅れをもつ場合には，捜索開始時における目標位置は目標の意思によって決定できる事項と考えても良いが，多くの捜索活動でそうであるように，捜索者が捜索を開始し捜索空間がノイジーになって初めて目標が捜索開始を認識する場合には，目標初期位置は目標の意思決定事項ではなく，いわば偶然によって与えられるものとして取り扱うべきである．また，捜索者が捜索を開始するという意思決定を行うに当たっては，例えば探知センサーからの位置情報といった目標存在に関する何らかの情報が誘因としてあるはずである．目標存在情報の不確実性は，センサー技術やそのときの捜索環境などに依存するから，これを確率分布で表現することが合理性である．捜索ゲームにおいて，目標も捜索環境を観測しており，センサー技術も社会に流布している技術だとすれば，上記の確率分布は目標も推測できると考えてよい．もちろん，真の初期位置は目標のみが知る個人情報である．この論文では以上の状況を考え，捜索開始時の目標初期位置が目標だけの個人情報である情報不完備ゲームにより捜索ゲームをモデル化し，ゲームの値やプレイヤーの最適戦略に与える情報の影響を定量的に評価する手法を提案する．

次節ではこの情報不完備ゲームのモデルを構築し，プレイヤーの戦略を定義した上で支払関数を導き，3節では均衡解を導く．数値例については，紙数の関係から省略する．

2 目標の初期位置の不明な捜索ゲーム

ここで取り扱うモデルは，初期の目標位置に関する不完全な情報で始まる同時手番の1段階捜索ゲームである．

(A1) 捜索空間は，離散地理空間 $\boldsymbol{K}=\{1,\cdots,K\}$ と離散時間空間 $\boldsymbol{T}=\{1,\cdots,T\}$ から成る．

(A2) 自然は，目標の初期位置を確率分布 $\{f(k), k\in I_0\}$ （ただし，$I_0\subseteq \boldsymbol{K}$ 及び $\sum_{k\in I_0} f(k)=1$ である）によって決定する．目標，捜索者ともにこの分布を知っている．

(A3) 初期位置 k から出発する目標パスの候補群を P_k とし，目標はその1つを選んで時間とともに捜索空間上を移動する．パス $\omega\in P_k$ による時点 $t\in \boldsymbol{T}$ での目標存在セルを $\omega(t)\in \boldsymbol{K}$ で表す．

(A4) 捜索者は，その探知センサーから目標位置に関する初期分布 $\{f(k), k\in I_0\}$ の情報を取得し，捜索を開始する．

目標を探知するため，時点 τ 以降捜索者は捜索資源を捜索空間内に投入する．この捜索可能

な時間区間を $\widehat{\boldsymbol{T}}=\{\tau,\tau+1,\cdots,T\}$ で表す．時点 t において使用可能な資源量は，連続的に分割可能な $\Phi(t)$ である．

(A5) セル i に目標が存在する場合，そこへの捜索資源量 x の投入により，捜索者は目標を探知確率

$$1-\exp(-\alpha_i x) \tag{1}$$

で発見する．パラメータ α_i は，単位捜索資源の目標探知に関するセル i の探知効率を表す値である．

(A6) 目標は捜索者の探知センサーの性能を知っており，$f(k)$ は両プレイヤーの共有知識である．また捜索者は，目標の運動性能を把握可能であるためパス群 P_k も推定可能であるが，実際の目標初期位置 k については知らないとする．その他の前提やパラメータ値についても，両プレイヤーの共有知識であるものとする．

(A7) ゲームは，目標を探知すると捜索者は利得 1 を得，目標は同量を失う 2 人ゼロ和である．

前提 (A6) が可能であるのは，例えばセンサー技術が世の中に広く知れ渡っており，目標側にもその探知能力が推測できるような場合が考えられる．目標の運動性能なども，時代的技術動向から，両プレイヤーの共有知識となっていると仮定している．前提 (A7) から，問題は目標探知確率を支払関数とする 2 人ゼロ和ゲームである．以下においてその定式化を議論してゆく．

まずプレイヤーの戦略を表現する変数を定義しよう．時点 t でセル i に投入する資源量を $\varphi(i,t)$ とする $\varphi=\{\varphi(i,t),\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\}$ を，捜索者の捜索資源配分戦略とする．初期位置 k の目標をタイプ k の目標と呼ぶこととすると，この目標の純粋戦略は 1 つのパス $\omega\in P_k$ をとることであるが，ここでは，パス ω を選択する確率を $\pi_k(\omega)$ とする混合戦略 $\pi_k\equiv\{\pi_k(\omega),\ \omega\in P_k\}$ を考える．

このとき各戦略の実行可能領域は次のようになる．前提 (A4) から，捜索者の戦略 φ の実行可能領域 Ψ は

$$\Psi\equiv\left\{\varphi\ \middle|\ \sum_{i\in\boldsymbol{K}}\varphi(i,t)\le\Phi(t),\ \varphi(i,t)\ge 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\right\} \tag{2}$$

で，タイプ k の目標の混合戦略 π_k の実行可能領域は

$$\Pi_k\equiv\left\{\{\pi_k(\omega)\}\ \middle|\ \sum_{\omega\in P_k}\pi_k(\omega)=1,\quad \pi_k(\omega)\ge 0,\omega\in P_k\right\} \tag{3}$$

で与えられる．

以下では捜索者の戦略 φ とタイプ k の目標戦略 $\omega\in P_k$ に対する支払関数を考える．時点 t においてこの目標はセル $\omega(t)$ におり，そこに投入する捜索資源量 $\varphi(\omega(t),t)$ が探知に有効な資源である．したがって，(1) 式から，支払関数である探知確率は次式で表される．

$$R_k(\varphi,\omega)=1-\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)\right)$$

これより，φ と目標混合戦略 π_k による期待支払は

$$R_k(\varphi,\pi_k)\ =\ \sum_{\omega\in P_k}\pi_k(\omega)R_k(\varphi,\omega)=\sum_{\omega\in P_k}\pi_k(\omega)\left\{1-\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t)\right)\right\}$$

$$= \quad 1 - \sum_{\omega \in P_k} \pi_k(\omega) \exp\left(- \sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \right) \tag{4}$$

となる．この値をタイプ k の目標は小さくしたい．一方，捜索者は目標初期位置，あるいは目標タイプを分布 $\{f(k), k \in I_0\}$ で推測するしかなく，すべてのタイプの目標の戦略 $\pi \equiv \{\pi_k, k \in I_0\}$ を考慮した次の期待値が，捜索者が最大にしたいと考える期待支払である．

$$\begin{aligned} R(\varphi, \pi) &= \sum_{k \in I_0} f(k) R_k(\varphi, \pi_k) = \sum_{k \in I_0} f(k) \sum_{\omega \in P_k} \pi_k(\omega) \left\{ 1 - \exp\left(- \sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \right) \right\} \\ &= 1 - \sum_{k \in I_0} f(k) \sum_{\omega \in P_k} \pi_k(\omega) \exp\left(- \sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \right) \end{aligned} \tag{5}$$

以上のように，両プレイヤーが戦略を決定する評価尺度が一見異なっている捜索ゲームを以後考え，その均衡解を求めていく．

3　均衡解の導出

式 (4)，(5) から明らかなように，期待利得 $R_k(\varphi, \pi_k)$ を最小にする各々のタイプ k の目標戦略 π_k は，結局は全体の期待利得 $R(\varphi, \pi)$ を最小にすることになるから，捜索者は期待利得 $R(\varphi, \pi)$ のマックスミニ戦略を採用すべきである．π に関する $R(\varphi, \pi)$ の最小化問題は，実行可能性条件 (3) 式から，$\omega \notin \Omega^{+k} \equiv \{\omega \in P_k | R_k(\varphi, \omega) = \min_{p \in P_k} R_k(\varphi, p)\}$ なるパス ω に対しては $\pi_k(\omega) = 0$ とする目標戦略により，

$$\begin{aligned} \min_{\pi} R(\varphi, \pi) &= \sum_{k \in I_0} f(k) \sum_{\omega \in P_k} \pi_k(\omega) R_k(\varphi, \omega) = \sum_{k \in I_0} f(k) \min_{\omega \in P_k} R_k(\varphi, \omega) \\ &= \sum_{k \in I_0} f(k) \min_{\omega \in P_k} \left\{ 1 - \exp\left(- \sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \right) \right\} \end{aligned} \tag{6}$$

と変形できる．これをさらに φ について最大化すると，

$$\begin{aligned} (P_S^0) \qquad & D^* = \max_{\varphi, \{\nu_k\}} \sum_{k \in I_0} f(k) \nu_k \\ s.t. \qquad & 1 - \exp\left(- \sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \varphi(\omega(t), t) \right) \geq \nu_k, \ \omega \in P_k, \ k \in I_0 \\ & \varphi \in \Psi \end{aligned}$$

となる．ここで $\eta_k \equiv -\log(1 - \nu_k)$，すなわち $\nu_k \equiv 1 - \exp(-\eta_k)$ の置き換えをし，$\sum_k f(k) = 1$ に注意すれば，上の問題は次式となる．ただし，両者の最適値の関係は $D^* = 1 - ND^*$ である．

$$(P_S) \qquad ND^* = \min_{\varphi, \eta} \sum_{k \in I_0} f(k) \exp(-\eta_k)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)}\varphi(\omega(t),t) \geq \eta_k,\ \omega\in P_k,\ k\in I_0 \tag{7}$$

$$\sum_{i\in\boldsymbol{K}} \varphi(i,t) = \Phi(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}} \tag{8}$$

$$\varphi(i,t)\geq 0,\ i\in\boldsymbol{K},\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}$$

この問題は凸計画問題であり，汎用的な数値解法により簡単に捜索者の最適戦略 φ^* を導出することができる．

次にタイプ k の目標の最適戦略を求めよう．目標は問題 (P_S) を解くことにより捜索者の最適戦略 φ^* を把握した上で，次式による $R_k(\varphi^*,\pi_k)$ の最小化を図る π_k を取ろうとするであろう．

$$\begin{aligned}\min_{\pi_k} R_k(\varphi^*,\pi_k) &= \min_{\omega\in P_k} R_k(\varphi^*,\omega) = \min_{\omega\in P_k}\left\{1-\exp\left(-\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi^*(\omega(t),t)\right)\right\} \\ &= 1-\exp\left(-\min_{\omega\in P_k}\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi^*(\omega(t),t)\right) = 1-\exp(-v_k^*)\end{aligned}$$

ただし，v_k^* は次の問題の最適値である．

$$v_k^* = \min_{\omega\in P_k}\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi^*(\omega(t),t)$$

上式と (7) 式との比較から，v_k^* は η_k の最適値 η_k^* でもあり，$1-\exp(-\eta_k^*)$ がタイプ k の目標が実現できる最小の探知確率である．また，$\Omega^{+k}\equiv\{\omega\in P_k|\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\alpha_{\omega(t)}\varphi^*(\omega(t),t)=\eta_k^*\}$ とも再定義できる．

問題 (P_S) では，捜索者はその戦略 φ に応じて各タイプ k の目標がとる最適反応によって実現される最小探知確率 $1-\exp(-\eta_k)$ を予想して，それらの期待値を最大にする戦略 φ^* を採用することになる．したがって，φ^* への最適反応による最小探知確率が目標タイプにより異なる場合には，捜索者の期待探知確率 D^* よりも大きくなる目標タイプもあれば，小さくなる目標タイプも存在することになる．

以降では，目標戦略を導出するために期待支払 $R(\varphi,\pi)$ のミニマックス最適化を考える．この場合は，目標戦略 π に対し捜索者は最適反応戦略をとることになるが，その結果が問題 (P_S) を解いて得られる φ^* となるような π を求めたい．さらに，そのような φ^* に対して最適反応である π は，π に関して線形な期待支払関数 $R(\varphi^*,\pi)$ を最小にする $\min_\pi R(\varphi^*,\pi)$ により求めればよい．

前者の問題である π が与えられた場合の最適反応を求める凹最大化問題 $\max_\varphi R(\varphi,\pi)$ $s.t.$ $\varphi\in\Psi$ の最適解 φ の必要十分条件は，Karush-Kuhn-Tucker 条件（KKT 条件）により与えられる．いま，ラグランジュ乗数 $\{\lambda(t),\ t\in\widehat{\boldsymbol{T}}\}$ と $\{\eta(i,t)\geq 0,\ (i,t)\in\boldsymbol{K}\times\widehat{\boldsymbol{T}}\}$ を用いたラグランジュ関数

$$L(\varphi;\lambda,\eta)\equiv R(\varphi,\pi)+\sum_{t\in\widehat{\boldsymbol{T}}}\lambda(t)\left(\Phi(t)-\sum_{i\in K}\varphi(i,t)\right)+\sum_{(i,t)\in K\times\widehat{\boldsymbol{T}}}\eta(i,t)\varphi(i,t)$$

から導出した最適解 φ^* の KKT 条件を整理すると，次のようになる．

もし $\varphi^*(i,t) > 0$ ならば,

$$\alpha_i \sum_{k \in I_0} f(k) \exp(-\eta_k^*) \sum_{\omega \in \Omega_{it}^{+k}} \pi_k(\omega) = \lambda(t) \tag{9}$$

であり，もし $\varphi^*(i,t) = 0$ ならば,

$$\alpha_i \sum_{k \in I_0} f(k) \exp(-\eta_k^*) \sum_{\omega \in \Omega_{it}^{+k}} \pi_k(\omega) \le \lambda(t) \tag{10}$$

ただし，次の記号を用いている.

$$\Omega_{it}^{+k} \equiv \{\omega \in P_k |\ \omega(t) = i,\ \sum_{t' \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t')} \varphi^*(\omega(t'), t') = \eta_k^*\}$$

これらの条件が，すでに得られている捜索計画 φ^* が最適反応となるために目標戦略 π が満たすべき条件である.

上では，ミニマックス最適化の解となるべき最適な目標戦略 $\pi = \{\pi_k, k \in I_0\}$ の満たすべき条件について議論してきた．これらの条件を満たせば，問題 (P_S) によりすでに導出されている最適解 φ^* が π に対する捜索者の最適反応になっており，かつ φ^* に対する目標の最適反応が π となる．これまでの議論から，最適な目標戦略 π^* に関する次のような線形計画問題が作成できる.

$$(P_T) \quad \min_{\pi,\lambda} \sum_{k \in I_0} f(k) \sum_{\omega \in P_k} \pi_k(\omega) \left\{ 1 - \exp\left(- \sum_{t \in \widehat{\boldsymbol{T}}} \alpha_{\omega(t)} \varphi^*(\omega(t), t) \right) \right\}$$

$$s.t. \quad \varphi^*(i,t) > 0 \text{ なる } (i,t) \in \boldsymbol{K} \times \widehat{\boldsymbol{T}} \text{ に対し, } \alpha_i \sum_{k \in I_0} f(k) \exp(-\eta_k^*) \sum_{\omega \in \Omega_{it}^{+k}} \pi_k(\omega) = \lambda(t)$$

$$\varphi^*(i,t) = 0 \text{ なる } (i,t) \in \boldsymbol{K} \times \widehat{\boldsymbol{T}} \text{ に対し, } \alpha_i \sum_{k \in I_0} f(k) \exp(-\eta_k^*) \sum_{\omega \in \Omega_{it}^{+k}} \pi_k(\omega) \le \lambda(t)$$

$$\sum_{\omega \in P_k} \pi_k(\omega) = 1,\ k \in I_0$$

$$\pi_k(\omega) \ge 0,\ \omega \in P_k,\ k \in I_0$$

4 おわりに

これまで様々な捜索活動において，初期の目標存在分布がその後の捜索の帰趨を大きく左右すると言われてきた．その初期位置は目標側の意思により決定されると考える立場が SAG では主流であったが,「はじめに」の節で述べたように，捜索開始を決定するのが捜索者であれば，捜索開始時の目標初期位置は意思決定項目ではなく，情報として取り扱われるべきである．かくして近年ゲーム理論で重要視されている情報の価値についての議論を，捜索における目標初期位置に対して適用したのが本研究である．このとき初期位置は目標側の個人情報となり，捜索者側はそれを探知センサーからの不確実な情報により推測しつつ捜索活動を行うことになる．かくして，本研究で初めて捜索ゲームを目標初期位置に関する個人情報をもつ不完備情報ゲームとしてモデル化し，均衡解を求める手法を提案した．これにより，探知確率の観点から初期位置情報の価値を

定量的に評価できるツールを提案できた．提案手法では捜索者の最適戦略は凸計画問題を解くことにより得られ，目標の最適戦略は線形計画問題により定式化できた．この手法上の特徴と，探知確率を支払とする情報完備の下での SAG がこれまで線形計画問題の範囲内で解くことができたことを考え合わせると，不完備情報を扱う上での解法上の困難さが非線形問題に現れているように思える．

均衡解導出の提案手法を用いた数値例による分析は紙数の関係から割愛したが，そこでは次の特徴が明らかになっている．目標の最適戦略は「拡散的移動」,「捜索不効率セルへの指向」及び「存在の一様分布性」という合理的に思える特徴をもち，捜索者の最適戦略ではそれに対応した捜索資源配分がなされる．また，支払関数である探知確率を用い，本モデルと目標初期位置が公開情報である従来型のモデルを比較すれば，初期位置情報の価値について分析できる．初期位置情報ばかりでなく，問題のパラメータの変化も結果的にはゲームの支払である探知確率に集約されるから，探知確率の観点からのパラメータの重要性も定量的に評価できる．例えば，目標の運動性能から目標パス P_k が変化した場合のゲームの値の比較から，目標の機動性がもつ価値を分析することもできる．

今後の課題としては，時間の増大化とともに目標パス P_k のサイズが指数級数的に増大することを考え，これに抗すべき他の戦略表現を提案すべきである．そのヒントは参考文献 [10] で提案されている目標のマルコフ移動戦略であろうと思われる．それは，目標のタイプ，存在セルや時刻等で把握できる目標状態に依存して，次の時刻での移動セルを選択しようとするものであり，この表現形での均衡解導出手法の提案が必要となる．また，現在は 1 段階ゲームのモデルを採用しているが，捜索活動途中で情報がある場合には繰り返しゲームによる多段階化が必要となる．さらに，少数の目標初期位置の暴露により開始される捜索ゲーム（これをデイタム捜索ゲームと呼ぶ）等の現実的捜索活動へ，ここでのモデルを応用することも興味がある．また，この研究の動機となった目標初期位置だけでなく，捜索に含まれる他の情報に関する不完備情報をもつ捜索ゲームも，ここでの提案手法を拡張させる面白い方向性かと思われる．

参考文献

[1] S.S. Brown, Optimal search for a moving target in discrete time and space, *Operations Research*, **28**, pp.1275–1286, 1980.

[2] J.M. Danskin, A helicopter versus submarine search game, *Operations Research*, **16**, pp.509–517, 1968.

[3] J.M. Dobbie, A two-cell model of search for a moving target, *Operations Research*, **22**, pp.79–92, 1974.

[4] J.N. Eagle and A.R. Washburn, Cumulative search-evasion games, *Naval Research Logistics*, **38**, pp.495–510, 1991.

[5] J.N. Eagle and J.R. Yee, An optimal branch-and-bound procedure for the constrained path moving target search problem, *Operations Research*, **38**, pp.110–114, 1990.

[6] A.Y. Garnaev, *Search Games and Other Applications of Game Theory*, Springer-Verlag, Tokyo, 2000.

[7] J. de Guenin, Optimum distribution of effort: an extension of the Koopman basic theory, *Operations Research*, **9**, pp.1–9, 1961.

[8] O. Hellman, On the optimal search for a randomly moving target, *SIAM J. Appl. Math.*, **22**, pp.545–552, 1972.

[9] R. Hohzaki, Path constrained search problem with reward criterion, *Journal of Operations Research of Japan*, **38**, pp.254–264, 1995.

[10] R. Hohzaki, Search allocation game, *European Journal of Operational Research*, **172**, pp.101–119, 2006.

[11] R. Hohzaki: A search game taking account of attributes of searching resources, *Naval Research Logistics*, **55** (1), 76–90, 2008.

[12] R. Hohzaki: A cooperative game in search theory, *Naval Research Logistics*, **56** (3), 264–278, 2009.

[13] R. Hohzaki: A search game taking account of linear effects and linear constraints of searching resource, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **55** (1), 1–22, 2012.

[14] R. Hohzaki: A nonzero-sum search game with two competitive searchers and a target, *Annals of Dynamic Games*, **12**, 351–373, 2013.

[15] R. Hohzaki, *The Search Allocation Game*, Wiely Encyclopedia of Operations Research and Management Science, 1–10, 2013.

[16] R. Hohzaki and K. Iida, A search game with reward criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **41**, pp.629–642, 1998.

[17] R. Hohzaki, K. Iida and T. Komiya, Discrete search allocation game with energy constraints, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **45**, pp.93–108, 2002.

[18] R. Hohzaki and A. Washburn, An approximation for a continuous datum search game with energy constraint, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **46**, pp.306–318, 2003.

[19] T. Ibaraki and N. Katoh, *Resource Allocation Problems: Algorithmic Approaches*, The MIT Press, London, 1988.

[20] K. Iida, An optimal distribution of searching effort for a moving target (in Japanease), Keiei Kagaku, **16**, pp.204–215, 1972.

[21] K. Iida, R. Hohzaki and S. Furui, A search game for a mobile target with the conditionally deterministic motion defined by paths, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **39**, pp.501–511, 1996.

[22] K. Iida, R. Hohzaki and K. Sato, Hide-and-search game with the risk criterion, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **37**, pp.287–296, 1994.

[23] J.B. Kadane, Discrete search and the Neyman-Pearson lemma, *J. of Math. and Its Appl.*, **22**, pp.156–171, 1968.

[24] Y.C. Kan, Optimal search of a moving target, *Operations Reserch*, **25**, pp.864–870, 1977.

[25] K. Kikuta, A search game with traveling cost, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **34**, pp.365–382, 1991.

[26] B.O. Koopman, The theory of search III: the optimum distribution of searching effort, *Operations Research*, **5**, pp.613–626, 1957.

[27] T. Nakai, A sequential evasion-search game with a goal, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **29**, pp.113–122, 1986.

[28] T. Nakai, Search models wiht Ccntinuous effort under various criteria, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **31**, pp.335–351, 1988.

[29] S.M. Pollock, A simple model of search for a moving target, *Operations Research*, **18**, pp.883–903, 1970.

[30] L.D. Stone, *Theory of Optimal Search*, Academic Press, New York, 1969.

[31] A.R. Washburn, Search-evasion game in a fixed region, *Operations Research*, **28**, pp.1290–1298, 1980.

[32] A.R. Washburn, Search for a moving target: the FAB algorithm, *Operations Research*, **31**, pp.739–751, 1983.