数理解析研究所講究録
第 1939 巻 2015 年 209-214

ファジィ集合値写像の導写像について

弘前大学 大学院 理工学研究科　金 正道 (Masamichi KON)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

金沢学院大学 経営情報学部　桑野 裕昭 (Hiroaki KUWANO)
Faculty of Business Administration and Information Science,
Kanazawa Gakuin University

概 要

レベル集合を用いてファジィ集合値写像の導写像を定義し、その性質を調べる。通常の集合をファジィ集合と区別したい場合はクリスプ集合とよぶことにする。ファジィ集合値写像の導写像は、クリスプ集合値写像の導写像のファジィ版である。

1 準備

ファジィ集合値写像の導写像を考えるときに必要になるクリスプ集合値写像の導写像について [4] に従って準備する。その後、ファジィ集合に関する準備をする。

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して、$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, [a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},]a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ とする。

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \mathcal{CK}(\mathbb{R}^n)$ をそれぞれ $\mathbb{R}^n$ のすべての閉集合, 凸集合, 閉凸集合の集合とする。

集合 $C \subset \mathbb{R}^n$ が錐であるとは、$\mathbf{0} \in C$ かつ任意の $\boldsymbol{x} \in C, \lambda \geq 0$ に対して $\lambda \boldsymbol{x} \in C$ となるときをいう。

1.1 集合値写像の導写像

まず、集合値写像の導写像を定義する。

定義1－1（[4] の定義3.4）$S \subset \mathbb{R}^n$ とし、$\boldsymbol{x}_0 \in S$ とする。ベクトル $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^n$ は、$\boldsymbol{x}_0$ に収束する点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset S$ および正の実数列 $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ が存在して $\lim_{k \to \infty} t_k(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{d}$ が成立するとき、S の $\boldsymbol{x}_0$ における接ベクトルとよばれる。S の $\boldsymbol{x}_0$ における接ベクトル全体からなる集合を S の $\boldsymbol{x}_0$ における接錐といい、$T(S; \boldsymbol{x}_0)$ とかく。

定義１－１の意味での接錐はコンティンジェント錐ともよばれる。接錐について詳しくは例えば [1, 4] 参照。

各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に集合 $F(\boldsymbol{x}) \subset \mathbb{R}^m$ を対応させる写像 F を $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への集合値写像といい、$F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ と表す。

集合値写像 $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ に対して

$$\mathrm{Graph}(F) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \boldsymbol{y} \in F(\boldsymbol{x})\}$$

を F のグラフという。

定義１－２（[4] の定義 4.8）集合値写像を $F : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ とし、$(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) \in \mathrm{Graph}(F)$ とする。このとき、各 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$DF(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{u}) = \{\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m : (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \in T(\mathrm{Graph}(F); (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0))\}$$

によって定義される集合値写像 $DF(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0) : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ を F の $(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)$ におけるコンティンジェント導写像という。

定義１－２より

$$\mathrm{Graph}(DF(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)) = T(\mathrm{Graph}(F); (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0))$$

である。

1.2 ファジィ集合

次に、ファジィ集合値写像の導写像を考えるときに必要になるファジィ集合のレベル集合に関する性質を調べる。

$\mathbb{R}^n$ 上のファジィ集合 $\widetilde{s}$ とそのメンバーシップ関数を同一視し、その同一視されたメンバーシップ関数も $\widetilde{s} : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ と表す。$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上のすべてのファジィ集合の集合とする。

$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ と $\alpha \in [0, 1]$ に対して $\widetilde{s}$ の α-レベル集合は

$$[\widetilde{s}]_\alpha = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \widetilde{s}(\boldsymbol{x}) \geq \alpha\}$$

と定義される。

クリスプ集合 $S \subset \mathbb{R}^n$ に対して、S の指示関数は各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$c_S(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \boldsymbol{x} \in S \\ 0 & \text{if } \boldsymbol{x} \notin S \end{cases}$$

である $c_S : \mathbb{R}^n \to \{0, 1\}$ と定義される。

$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ は

$$\widetilde{s} = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{[\widetilde{s}]_\alpha}$$

と表現でき、分解定理として知られている（例えば、[2] 参照）。

$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が閉であるとは、$\widetilde{s}$ が上半連続であるときをいう。$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が閉であるための必要十分条件は、$[\widetilde{s}]_\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n), \alpha \in]0, 1]$ となることである。

$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が凸であるとは

$$\widetilde{s}(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{y}) \geq \widetilde{s}(\boldsymbol{x}) \wedge \widetilde{s}(\boldsymbol{y}) \quad \text{for } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in [0,1]$$

のときをいう。すなわち、$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ が凸であるとは $\widetilde{s}$ が準凹関数であるときをいい、$\widetilde{s}$ が凸であるための必要十分条件は $[\widetilde{s}]_\alpha \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n), \alpha \in]0,1]$ となることである。

$\mathcal{CF}(\mathbb{R}^n), \mathcal{KF}(\mathbb{R}^n), \mathcal{CKF}(\mathbb{R}^n)$ をそれぞれ $\mathbb{R}^n$ 上のすべての閉ファジィ集合, 凸ファジィ集合, 閉凸ファジィ集合の集合とする。

$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ がファジィ錐であるとは、$[\widetilde{s}]_\alpha \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in]0,1]$ が錐になるときをいう。

ファジィ集合値写像の導写像を考えるときに必要になるファジィ集合とレベル集合の間の関係を調べるために

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]} : \text{“}S_\alpha \subset \mathbb{R}^n, \alpha \in]0,1]\text{” and “}S_\beta \supset S_\gamma \text{ for } \beta, \gamma \in]0,1] \text{ with } \beta < \gamma\text{”}\}$$

と定義し、$M : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ を各 $\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$M(\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]}) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{S_\alpha}$$

と定義する。$\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ と $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$M(\{S_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]})(\boldsymbol{x}) = \sup_{\alpha \in]0,1]} \alpha c_{S_\alpha}(\boldsymbol{x}) = \sup\{\alpha \in]0,1] : \boldsymbol{x} \in S_\alpha\}$$

と表せる。ただし、$\sup \emptyset = 0$ とする。また、分解定理は、$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ に対して

$$\widetilde{s} = M(\{[\widetilde{s}]_\alpha\}_{\alpha \in]0,1]})$$

と表せる。

2　ファジィ集合値写像の導写像

本節では、レベル集合を用いてファジィ集合値写像の導写像を定義し、その性質を調べる。

次の定義２－１は、定義１－１のファジィ版である。

定義２－１　$\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とし、$\boldsymbol{x}_0 \in [\widetilde{s}]_1$ とする。このとき

$$\widetilde{T}(\widetilde{s}; \boldsymbol{x}_0) = M(\{T([\widetilde{s}]_\alpha; \boldsymbol{x}_0)\}_{\alpha \in]0,1]})$$

を $\widetilde{s}$ の $\boldsymbol{x}_0$ におけるファジィ接錐またはファジィコンティンジェント錐という。

$S \subset \mathbb{R}^n$ と $\boldsymbol{x}_0 \in S$ に対して

$$\widetilde{T}(c_S; \boldsymbol{x}_0) = c_{T(S;\boldsymbol{x}_0)}$$

となるので、ファジィ接錐はクリスプ接錐の拡張になっている。

次の命題２－２は、[4] の定理 3.7 のファジィ版である。

命題２－２ $\widetilde{s} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ とし、$\boldsymbol{x}_0 \in [\widetilde{s}]_1$ とする。このとき、次が成り立つ。

(i) $\widetilde{T}(\widetilde{s};\boldsymbol{x}_0)$ は閉ファジィ錐になる。

(ii) $\widetilde{s} \in \mathcal{KF}(\mathbb{R}^n)$ ならば、$\widetilde{T}(\widetilde{s};\boldsymbol{x}_0)$ は閉凸ファジィ錐になる。

ファジィ集合値写像 $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ と $\alpha \in]0,1]$ に対してクリスプ集合値写像 $F_\alpha : \mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ を各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$F_\alpha(\boldsymbol{x}) = [\widetilde{F}(\boldsymbol{x})]_\alpha$$

と定義する。

次の定義２－３は、クリスプ集合値写像のグラフのファジィ版である。

定義２－３ ファジィ集合値写像を $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ とする。$\widetilde{F}$ のファジィグラフ $\mathrm{Graph}(\widetilde{F}) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ を各 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ に対して

$$\mathrm{Graph}(\widetilde{F})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \widetilde{F}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y})$$

と定義する。

定義２－３より

$$[\mathrm{Graph}(\widetilde{F})]_\alpha = \mathrm{Graph}(F_\alpha), \quad \alpha \in]0,1]$$

となる。

クリスプ集合値写像を $F:\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ とし、ファジィ集合値写像 $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ を各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\widetilde{F}(\boldsymbol{x}) = c_{F(\boldsymbol{x})}$ と定義する。このとき

$$\mathrm{Graph}(\widetilde{F}) = c_{\mathrm{Graph}(F)}$$

となるので、ファジィ集合値写像のファジィグラフはクリスプ集合値写像のグラフの拡張になっている。

次の定義２－４は、定義１－２のファジィ版である。

定義２－４ ファジィ集合値写像を $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ とし、$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \in [\mathrm{Graph}(\widetilde{F})]_1$ とする。このとき

$$\mathrm{Graph}(D\widetilde{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)) = \widetilde{T}(\mathrm{Graph}(\widetilde{F});(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0))$$

となるファジィ集合値写像 $D\widetilde{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0):\mathbb{R}^n \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ を $\widetilde{F}$ の $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ におけるファジィコンティンジェント導写像という。

定義２－４より、各 $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$D\widetilde{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{u})(\boldsymbol{v}) = \mathrm{Graph}(D\widetilde{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0))(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \widetilde{T}(\mathrm{Graph}(\widetilde{F});(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0))(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$$

となる。

クリスプ集合値写像を $F:\mathbb{R}^n \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ とし、$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in \mathrm{Graph}(F)$ とする。ファジィ集合値写像 $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n\to\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ を各 $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対して $\widetilde{F}(\boldsymbol{x})=c_{F(\boldsymbol{x})}$ と定義する。このとき、$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in[\mathrm{Graph}(\widetilde{F})]_1$ となり

$$\mathrm{Graph}(D\widetilde{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0))=c_{\mathrm{Graph}(DF(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0))}$$

となるので、ファジィ集合値写像のファジィコンティンジェント導写像はクリスプ集合値写像のコンティンジェント導写像の拡張になっている。

命題２－５ ファジィ集合値写像を $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n\to\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ とし、$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in[\mathrm{Graph}(\widetilde{F})]_1$ とする。このとき、任意の $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$D\widetilde{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{u})=M(\{DF_\alpha(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{u})\}_{\alpha\in]0,1]})$$

となる。

ファジィ集合値写像 $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n\to\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ が閉-値, 凸-値, 閉凸-値であるとは、任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ に対してそれぞれ $\widetilde{F}(\boldsymbol{x})\in\mathcal{CF}(\mathbb{R}^m),\widetilde{F}(\boldsymbol{x})\in\mathcal{KF}(\mathbb{R}^m),\widetilde{F}(\boldsymbol{x})\in\mathcal{CKF}(\mathbb{R}^m)$ であるときをいう。

命題２－６ ファジィ集合値写像を $\widetilde{F}:\mathbb{R}^n\to\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ とし、$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\in[\mathrm{Graph}(\widetilde{F})]_1$ とする。このとき、次が成り立つ。

(i) $D\widetilde{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0):\mathbb{R}^n\to\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ は閉-値になる。

(ii) $\mathrm{Graph}(\widetilde{F})\in\mathcal{KF}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m)$ ならば $D\widetilde{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0):\mathbb{R}^n\to\mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ は閉凸-値になる。

3 結論

本稿では、クリスプ集合値写像の導写像のファジィ版として、ファジィ集合のレベル集合を用いてファジィ集合値写像の導写像を定義し、その性質を調べた。

ファジィ集合値写像の導写像に関して得られた結果は、すべてのファジィ集合（特に、所謂サポート有界でないファジィ集合）を扱っているという意味で非常に一般的な結果である。ファジィ集合値写像の導写像は、最適値がファジィ集合として出力される数理モデルに対して、入力またはパラメータに関する感度分析を考える場合に必要かつ重要な概念になる。そのような場合に、得られた一連の結果が有用であると期待できる。

参考文献

[1] M. S. Bazaraa, J. J. Goode and M. Z. Nashed, On the cones of tangents with applications to mathematical programming, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 13, 1974, pp.11-19.

[2] D. Dubois, W. Ostasiewicz and H. Prade, Fuzzy sets: history and basic notions, in *Fundamentals of Fuzzy Sets* (D. Dubois and H. Prade, Eds.) (Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000), pp.21-124.

[3] M. Florenzano and C. L. Van, *Finite Dimensional Convexity and Optimization*, (Springer-Verlag, Berlin, 2001).

[4] T. Maeda, *Multiobjective Decision Making Theory and Economic Analysis* (in Japanese), (Makino-Syoten, Japan, 1996).

[5] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970).

[6] R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Variational analysis*, (Springer-Verlag, New York, 1998).

[7] T. Tanino, Theory and applications of set-valued mappings – Part 1: fundamental properties of set-valued mappings – (in Japanese), Japan Society for Fuzzy and Systems, Vol. 13, 2001, pp.11-19.

[8] T. Tanino, Theory and applications of set-valued mappings – Part 2: derivatives of set-valued mappings and applications to optimization – (in Japanese), Japan Society for Fuzzy and Systems, Vol. 13, 2001, pp.146-154.

[9] T. Tanino, Theory and applications of set-valued mappings – Part 3: applications of set-valued mappings to dynamical systems, game theory and so on – (in Japanese), Japan Society for Fuzzy and Systems, Vol. 13, 2001, pp.234-242.

[10] Y. Yoshida, M. Yasuda, J. Nakagami and M. Kurano, A limit theorem in dynamic fuzzy systems with a monotone property, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 94, 1998, pp.109-119.