数理解析研究所講究録
第 1939 巻 2015 年 215-227

双対 ー 動的 vs フェンシェル ー

長崎県立大学経済学部　植野 貴之 (Takayuki Ueno)
Faculty of Economics, University of Nagasaki
秋田県立大学システム科学技術学部　木村 寛 (Yutaka Kimura)
Faculty of System Science and Technology, Akita Prefectural University
九州大学　岩本 誠一 (Seiichi Iwamoto)
Professor Emeritus, Kyushu University

概 要

1 変数の最小化問題

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \text{minimize} \quad (c-x)^2 + x^2 \quad \text{subject to} \quad \text{(i)} \quad x \in R^1$$

は双対理論を展開する上で実に示唆に富んでいる。「**動的**双対」は問題 (P_1) を出発点として美しい双対性を導いている。そこでは「フィボナッチ**相補**双対性」および「黄金**相補**双対性」が成り立っていた。本論文では第 2 の双対というべき「**フェンシェル**双対」によって、(P_1) から双対を展開する。

ここでは任意の自然数 n に対して、n 変数 (主) 問題 (P_n) は双対問題 (D_n) との間に「フィボナッチ**一致**双対性」が成り立つことを示す。すなわち、主問題はフィボナッチ最小解をもち、双対問題はフィボナッチ最大解もち、最小解と最大解は一致している : 最小点 = 最大点、最小値 = 最大値。また、無限変数の問題対では「黄金**一致**双対性」が成り立つことがわかる。

1　はじめに

最近、主問題

$$(\mathrm{P}_1) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[(x_{k-1} - x_k)^2 + x_k^2 \right] \\ \text{subject to} & \text{(i)} \ \ x \in R^n, \ \ \text{(ii)} \ \ x_0 = c \end{array}$$

と双対問題

$$(\mathrm{D}_1) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left[\mu_k^2 + (\mu_k - \mu_{k+1})^2 \right] - 2\mu_n^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \ \ \mu \in R^n \end{array}$$

の間には多くの興味ある関係があることがわかってきた [3,5–19]。それは両問題の最適解 (最適点と最適値) の間の三位一体の関係である。すなわち、有限変数問題の対ではフィボナッチ相補双対性 (Fibonacci complementary duality, FCD) であり、無変数問題の対

では黄金相補双対性 (Golden complementary duality, GCD) である。この双対は**動的双対** (dynamic dual) といわれている [14]。

本論文では、主問題 (P_1) のもう一つの双対を考えて、第二の双対問題 (D_2) を導入して、 (P_1) と (D_2) の最適解の間の関係を導く。この第二の双対を**フェンシェル双対** (Fenchel dual) という。

そのために、まず、基本定理であるフェンシェルの双対定理を証明する。これは凸集合の分離定理による。さらに、この双対定理を用いて、主問題 (P_1) から (第二) 双対問題 (D_2) を導く。

そして、$n = 1,\ 2,\ 3, \ldots$ の各 n について n 変数の主問題から n 変数の双対問題を導く。さらに、主問題と (第二) 双対問題の最適解がフィボナッチになって、完全に一致していることを示す。すなわち、両問題は**共通なフィボナッチ最適解** (common Fibonacci optimal solution) をもっていることがわかる。

2 フェンシェル双対

凸関数 $f : R^n \to R^1$ および 凹関数 $g : R^n \to R^1$ の共役関数 $f^*,\ g_* : R^n \to R^1$ はそれぞれ次で定義される。

$$f^*(\lambda) \;=\; \underset{x \in R^n}{\mathrm{Max}} \left[(\lambda, x) - f(x) \right] \tag{1}$$

$$g_*(\lambda) \;=\; \min_{x \in R^n} \left[(\lambda, x) - g(x) \right]. \tag{2}$$

以下では簡単のため、凸関数、凹関数および共役関数は R^n 上で定義され、最大値、最小値は存在すると仮定する。

2.1 双対定理

定理 2.1 (Fenchel duality theorem [2,4,20]) 関数 $f : R^n \to R^1$ は凸で、$g : R^n \to R^1$ は凹とする。このとき、等式

$$\min_{x \in R^n} \left[f(x) - g(x) \right] \;=\; \underset{\lambda \in R^n}{\mathrm{Max}} \left[g_*(\lambda) - f^*(\lambda) \right] \tag{3}$$

が成り立つ。

2.2 双対問題

以下では、定数 $c (\in R^1)$ を含む目的関数の最小化 (主) 問題を考え、その双対問題を導く。さて、主問題は n 変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の最小化問題

$$\begin{array}{lll} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left[(x_{k-1} - x_k)^2 + x_k^2 \right] \\ (\mathrm{P_n}) & \text{subject to} & \text{(i)}\ \ x \in R^n \\ & & \text{(ii)}\ \ x_0 = c \end{array}$$

である。この双対問題は既に**動的双対** (dynamic duality) によって導いた [14]。ここでは**フェンシェル双対** (Fenchel duality) によって、双対問題を導く。

さて、目的関数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n}\left[(x_{k-1}-x_k)^2 + x_k^2\right] \tag{4}$$

は、

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \qquad h(x) = -\sum_{k=1}^{n}(x_{k-1}-x_k)^2 \quad (x_0 = c) \tag{5}$$

とすれば、「凸関数 − 凹関数」の型

$$f(x) = g(x) - h(x) \tag{6}$$

に表されることに注意しよう。したがって、定理 2.1 より

$$\min_{x\in R^n} f(x) = \operatorname*{Max}_{\lambda\in R^n}\left[\,h_*(\lambda) - g^*(\lambda)\,\right] \tag{7}$$

が成り立つ。このとき、共役関数 g^*, h_* は簡単のため、λ でなく 2 倍した 2λ を用いて、次のように定義しておく。

$$g^*(\lambda) = \operatorname*{Max}_{x\in R^n}\left[\,2(\lambda, x) - g(x)\,\right] \tag{8}$$

$$h_*(\lambda) = \min_{x\in R^n}\left[\,2(\lambda, x) - h(x)\,\right]. \tag{9}$$

このように定義しても定理 2.1 も等式 (7) もそのまま成り立つことに注意しよう。

補題 2.1 (Conjugate functions) *(5) の g, h の共役関数は次になる。*

$$g^*(\lambda) = (\lambda, \lambda) = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \tag{10}$$

$$\begin{aligned} h_*(\lambda) &= 2(b,\ A^{-1}\lambda) - \left(\lambda,\ A^{-1}\lambda\right) \\ &= 2c\sum_{k=1}^{n}\lambda_k - \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{l=k}^{n}\lambda_l\Big)^2. \end{aligned} \tag{11}$$

ここに λ, b は n-ベクトル

$$\lambda = (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,\ \lambda_n), \quad b = (c,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

で、A^{-1} は $n\times n$ 3重正定値行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列である [1]：

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}.$$

3 最適解

3.1 1変数

1変数の目的関数

$$f(x) = (c-x)^2 + x^2$$

は

$$g(x) = x^2, \quad h(x) = -(c-x)^2$$

とすれば、「凸関数 − 凹関数」の型

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

に表される。このとき、共役関数 g^*, h_* は

$$\begin{aligned} g^*(\lambda) &= \operatorname*{Max}_{x\in R^1} \left[2\lambda x - x^2 \right] \\ &= \lambda^2 \qquad \hat{x} = \lambda \\ h_*(\lambda) &= \min_{x\in R^1} \left[2\lambda x + (c-x)^2 \right] \\ &= 2c\lambda - \lambda^2 \qquad \check{x} = c - \lambda. \end{aligned}$$

よって

$$h_*(\lambda) - g^*(\lambda) \;=\; 2c\lambda - (\lambda^2 + \lambda^2)$$

になる。

したがって、1 変数問題の主と双対は

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \begin{array}{l} \text{minimize} \quad (c - x_1)^2 + x_1^2 \\[2ex] \text{subject to} \quad \text{(i)} \quad x_1 \in R^1 \end{array}$$

$$(\mathrm{D}_1) \qquad \begin{array}{l} \text{Maximize} \quad 2c\lambda_1 - (\lambda_1^2 + \lambda_1^2) \\[2ex] \text{subject to} \quad \text{(i)} \quad \lambda_1 \in R^1 \end{array}$$

になる。

主問題 (P_1) は

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{2}c \text{ のとき、最小値 } m_1 = \frac{1}{2}c^2$$

をもつ。双対問題 (D_1) は

$$\lambda_1^* = \frac{1}{2}c \text{ のとき、最大値 } M_1 = \frac{1}{2}c^2$$

をもつ。最小点は最大点に一致し、最小値は最大値に等しい：

$$\hat{x}_1 = \lambda_1^*, \quad m_1 = M_1.$$

すなわち、両問題の最適解は一致している。

(P_1) の最小値 m_1 は最小点 $\hat{x}_1$ を用いて表すと、

$$m_1 = c(c - \hat{x}_1)$$

である。(D_1) の最大値 M_1 は最大点 λ_1^* で表すと、

$$M_1 = c\lambda_1^*$$

である。よって、

$$c(c - \hat{x}_1) \;=\; c\lambda_1^* \quad \text{i.e.} \quad c - \hat{x}_1 \;=\; \lambda_1^*.$$

したがって

$$\hat{x}_1 + \lambda_1^* \;=\; c$$

が成り立っている。これは

$$1 + 1 \;=\; 2$$

に他ならない。

3.2　2変数

2変数 $x = (x_1, x_2)$ の目的関数

$$f(x) \;=\; (c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2$$

は

$$g(x) \;=\; x_1^2 + x_2^2, \quad h(x) \;=\; -\left[\,(c - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2\,\right]$$

とすれば、「凸関数 − 凹関数」の型

$$f(x) \;=\; g(x) - h(x)$$

に表される。このとき、共役関数 g^*, h_* は

$$\begin{aligned} g^*(\lambda, \mu) \;&=\; \underset{(x,y)\in R^2}{\mathrm{Max}} \left[\,2\lambda x + 2\mu y - (x^2 + y^2)\,\right] \\ &=\; \lambda^2 + \mu^2 \\ & \quad \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \\ h_*(\lambda, \mu) \;&=\; \min_{(x,y)\in R^2} \left[\,2\lambda x + 2\mu y + (c - x)^2 + (x - y)^2\,\right] \\ &=\; 2c(\lambda + \mu) - [\,(\lambda + \mu)^2 + \mu^2\,] \\ & \quad \begin{pmatrix} \breve{x} \\ \breve{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - (\lambda + \mu) \\ c - (\lambda + 2\mu) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

この最小点の階差は次になる：

$$\begin{pmatrix} c - \breve{x} \\ \breve{x} - \breve{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \mu \end{pmatrix}.$$

よって

$$h_*(\lambda, \mu) - g^*(\lambda, \mu) \;=\; 2c(\lambda + \mu) - [\,(\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + (\lambda^2 + \mu^2)\,]$$

になる。

したがって、2変数問題の主と双対は

$$(\mathrm{P}_2) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & (c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad x \in R^2 \end{array}$$

$$(\mathrm{D}_2) \qquad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c(\lambda_1 + \lambda_2) - \left[\,(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_2^2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\,\right] \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad \lambda \in R^2 \end{array}$$

になる。

主問題 (P_2) は

$$(\hat{x}_1,\, \hat{x}_2) = \frac{c}{5}(2,\, 1) \text{ のとき、最小値 } m_2 = \frac{3}{5}c^2$$

をもち、双対問題 (D_2) は

$$(\lambda_1^*,\, \lambda_2^*) = \frac{c}{5}(2,\, 1) \text{ のとき、最大値 } M_2 = \frac{3}{5}c^2$$

をもつ。最小点と最大点は一致し、最小値と最大値は等しい：

$$(\hat{x}_1,\, \hat{x}_2) = (\lambda_1^*,\, \lambda_2^*), \quad m_2 = M_2.$$

すなわち、両問題の最適解は一致している。

(P_2) の最小値 m_2 は最小点 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ を用いて表すと、

$$m_2 = c(c - \hat{x}_1)$$

である。(D_2) の最大値 M_2 は最大点 $(\lambda_1^*,\, \lambda_2^*)$ で表すと、

$$M_2 = c(\lambda_1^* + \lambda_2^*)$$

である。よって、

$$c(c - \hat{x}_1) \;=\; c(\lambda_1^* + \lambda_2^*) \quad \text{i.e.} \quad c - \hat{x}_1 \;=\; \lambda_1^* + \lambda_2^*.$$

したがって

$$\hat{x}_1 + \lambda_1^* + \lambda_2^* \;=\; c$$

が成り立っている。これは

$$2 + 2 + 1 \;=\; 5$$

に他ならない。

3.3　3変数

3変数 $x = (x_1, x_2, x_3)$ の目的関数

$$f(x) \;=\; (c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2$$

は

$$g(x) \;=\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad h(x) \;=\; -\left[\, (c - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 \,\right]$$

とすれば、「凸関数 − 凹関数」の型

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

に表される。このとき、共役関数 g^*, h_* は

$$\begin{aligned} g^*(\lambda,\mu,\nu) &= \underset{(x,y.z)\in R^3}{\mathrm{Max}} \left[2\lambda x + 2\mu y + 2\nu z - (x^2+y^2+z^2) \right] \\ &= \lambda^2+\mu^2+\nu^2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} h_*(\lambda,\mu,\nu) &= \underset{(x,y.z)\in R^3}{\min} \left[2\lambda x + 2\mu y + 2\nu z + (c-x)^2 + (x-y)^2 + (y-z)^2 \right] \\ &= 2c(\lambda+\mu+\nu) - \left[(\lambda+\mu+\nu)^2 + (\mu+\nu^2) + \nu^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \breve{x} \\ \breve{y} \\ \breve{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-(\lambda+\mu+\nu) \\ c-(\lambda+2\mu+2\nu) \\ c-(\lambda+2\mu+3\nu) \end{pmatrix}.$$

この最小点の階差は次になる：

$$\begin{pmatrix} c-\breve{x} \\ \breve{x}-\breve{y} \\ \breve{y}-\breve{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda+\mu+\nu \\ \mu+\nu \\ \nu \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{aligned} & h_*(\lambda,\mu,\nu) - g^*(\lambda,\mu,\nu) \\ &= 2c(\lambda+\mu+\nu) - \left[(\lambda+\mu+\nu)^2 + (\mu+\nu^2) + \nu^2 + (\lambda^2+\mu^2+\nu^2) \right] \end{aligned}$$

になる。

したがって、3変数問題の主と双対は

$$(\mathrm{P}_3) \quad \begin{array}{l} \text{minimize} \quad (c-x_1)^2 + x_1^2 + (x_1-x_2)^2 + x_2^2 + (x_2-x_3)^2 + x_3^2 \\ \text{subject to} \quad \text{(i)} \quad x \in R^3 \end{array}$$

$$(\mathrm{D}_3) \quad \begin{array}{l} \text{Maximize} \quad 2c(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) - \left[(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 + (\lambda_2+\lambda_3)^2 + \lambda_3^2 \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + (\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) \right] \\ \text{subject to} \quad \text{(i)} \quad \lambda \in R^3 \end{array}$$

になる。

主問題 (P_3) は

$$\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3) = \frac{c}{5}(5,\ 2,\ 1) \text{ のとき、最小値 } m_3 = \frac{8}{13}c^2$$

をもち、双対問題 (D_3) は

$$\lambda^* = (\lambda_1^*,\ \lambda_2^*,\ \lambda_3^*) = \frac{c}{13}(5,\ 2,\ 1) \text{ のとき、最大値 } M_3 = \frac{8}{13}c^2$$

をもつ。最小点は最大点に一致し、最小値は最大値に等しい：

$$\hat{x} = \lambda^*, \quad m_3 = M_3.$$

すなわち、両問題の最適解は一致している。

(P_3) の最小値 m_3 は最小点 $(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3)$ を用いて表すと、

$$m_3 = c(c - \hat{x}_1)$$

である。(D_3) の最大値 M_3 は最大点 $(\lambda_1^*,\ \lambda_2^*,\ \lambda_3^*)$ で表すと、

$$M_3 = c(\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*)$$

である。よって、

$$c(c - \hat{x}_1) = c(\lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*) \quad \text{i.e.} \quad c - \hat{x}_1 = \lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^*.$$

したがって

$$\hat{x}_1 + \lambda_1^* + \lambda_2^* + \lambda_3^* = c$$

が成り立っている。これは

$$5 + 5 + 2 + 1 = 13$$

に他ならない。

3.4　n 変数

さて、n 変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の目的関数

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \left[(x_{k-1} - x_k)^2 + x_k^2\right]$$

は

$$g(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2, \qquad h(x) = -\sum_{k=1}^{n} (x_{k-1} - x_k)^2$$

とすれば、「凸関数 − 凹関数」の型

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

に表される。このとき、共役関数 g^*, h_* は

$$\begin{aligned} g^*(\lambda) &= \operatorname*{Max}_{x\in R^n}\left[2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} h_*(\lambda) &= \min_{x\in R^n}\left[\,2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k + \sum_{k=1}^{n}(x_{k-1} - x_k)^2\,\right] \\ &= 2c\sum_{k=1}^{n}\lambda_k - \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{l=k}^{n}\lambda_l\Big)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \breve{x}_1 \\ \breve{x}_2 \\ \breve{x}_3 \\ \vdots \\ \breve{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \\ c - \big(\lambda_1 + \sum_{k=2}^{n} 2\lambda_k\big) \\ c - \big(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \sum_{k=3}^{n} 3\lambda_k\big) \\ \vdots \\ c - \sum_{k=1}^{n} k\lambda_k \end{pmatrix}.$$

この最小点の階差は次になる：

$$\begin{pmatrix} c - \breve{x}_1 \\ \breve{x}_1 - \breve{x}_2 \\ \breve{x}_2 - \breve{x}_3 \\ \vdots \\ \breve{x}_{n-1} - \breve{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \\ \sum_{k=2}^{n}\lambda_k \\ \sum_{k=3}^{n}\lambda_k \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

よって

$$h_*(\lambda) - g^*(\lambda) \;=\; 2c\sum_{k=1}^{n}\lambda_k - \Big[\sum_{k=1}^{n}\big(\sum_{l=k}^{n}\lambda_l\big)^2 + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\Big]$$

になる。

したがって、n 変数問題の主と双対は

$$(\mathrm{P_n})\quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left[(x_{k-1}-x_k)^2 + x_k^2\right] \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ x \in R^n \\ & \text{(ii)}\ \ x_0 = c \end{array}$$

$$(\mathrm{D_n})\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & \displaystyle 2c\sum_{k=1}^{n}\lambda_k - \Big[\sum_{k=1}^{n}\big(\sum_{l=k}^{n}\lambda_l\big)^2 + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\Big] \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ \lambda \in R^n \end{array}$$

になる。

主問題 (P_n) は

$$\hat{x} = (\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_{n-1},\ \hat{x}_n\ ) = \frac{c}{F_{2n+1}}(\ F_{2n-1},\ F_{2n-3},\ \ldots,\ F_3,\ F_1\ )$$

のとき、最小値

$$m_n \;=\; \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}c^2$$

をもち、双対問題 (D_n) は

$$\lambda^* = (\ \lambda_1^*,\ \lambda_2^*,\ \ldots,\ \lambda_{n-1}^*,\ \lambda_n^*\ ) = \frac{c}{F_{2n+1}}(\ F_{2n-1},\ F_{2n-3},\ \ldots,\ F_3,\ F_1\ )$$

のとき、最大値

$$M_n \;=\; \frac{F_{2n}}{F_{2n+1}}c^2$$

をもつ。最小点は最大点に一致し、最小値は最大値に等しい：

$$\hat{x} = \lambda^*, \quad m_n = M_n.$$

すなわち、両問題の最適解は一致している。

最小値 m_n は最小点 $\hat{x}$ を用いて表すと、

$$m_n = c(c - \hat{x}_1)$$

である。最大値 M_n は最大点 λ^* で表すと、

$$M_n = c\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^*$$

である。よって、

$$c(c-\hat{x}_1) = c\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^* \quad \text{i.e.} \quad c-\hat{x}_1 = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^*.$$

したがって

$$\hat{x}_1 + \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^* = c$$

が成り立っている。これはフィボナッチ数列 $\{F_n\}$ が

$$F_{2n-1} + \sum_{k=1}^{n}F_{2n-2k+1} = F_{2n+1}$$

を満たすことに他ならない。

参考文献

[1] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[2] J.M. Borwein and A.S. Lewis, *Convex Analysis and Nonlinear Optimization Theory and Examples*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[3] D. Brown, ダ・ヴィンチ・コード(上・下) (越前敏弥訳), 角川書店, 2004; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.

[4] W. Fenchel, *Convex Cones, Sets and Functions*, Princeton Univ. Dept. of Math, NJ, 1953.

[5] 岩本誠一, 動的計画論, 九大出版会, 1987.

[6] S. Iwamoto, Cross dual on the Golden optimum solutions,「経済の数理解析」, 京大数理研講究録 1443, 2005 年 7 月, pp. 27–43.

[7] S. Iwamoto, The Golden trinity — optimility, inequality, identity —,「経済の数理解析」, 京大数理研講究録, 2006 年 5 月, pp. 1–14.

[8] S. Iwamoto, The Golden optimum solution in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA05), Yokohama Publishers, Yokohama, 2007, pp. 199–205.

[9] 岩本 誠一, 黄金最適解を鑑賞する—— 経済数学へのプレリュード (V) ——, 経済学研究・別冊 (九大経済学会), 第 12 号, 2006 年 4 月, pp. 39–43.

[10] 岩本 誠一, 最適化「ダ・ヴィンチ・コード」 —— 経済数学へのプレリュード (VI) ——, 経済学研究・別冊 (九大経済学会), 第 13 号, 2007 年 4 月, pp. 45–52.

[11] 岩本 誠一, ダ・ヴィンチ・コードは最適か?, 数理経済学研究センター会報, 第 37 号, 2009 年 9 月, pp. 1–9.

[12] 岩本誠一, 最適経路 — フィボナッチから黄金へ —, 「不確実性下における意思決定問題」, 京大数理研講究録 1734, 2011 年 3 月, pp. 196–204.

[13] S. Iwamoto, On Fibonacci identities, *preprint.*

[14] 岩本 誠一, 最適化の数理 II ベルマン方程式 (Mathematics for Optimization II Bellman Equation), 数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」, 知泉書館, 2013 年 11 月, 451p.

[15] 岩本 誠一, 吉良 知文, 植野 貴之, ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 第 2・3 号, 2009 年 10 月, pp.1–22.

[16] S. Iwamoto and A. Kira, The Fibonacci complementary duality in quadratic programming, Ed. W. Takahashi and T. Tanaka, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007 Taiwan), Yokohama Publishers, Yokohama, March 2009, pp. 63–73.

[17] S. Iwamoto and M. Yasuda, "Dynamic programming creates the Golden Ratio, too," *Proc. of the Sixth Intl Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2004)*, Ballarat, Australia, December, 2004.

[18] S. Iwamoto and M. Yasuda, Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes, Ed. S. Elaydi, K. Nishimura, M. Shishikura and N. Tose, Advanced Studies in Pure Mathematics 53, June 2009, Advances in Discrete Dynamic Systems, pp. 77–86. Proceedings of The International Conference on Differential Equations and Applications (ICDEA2006), Kyoto University, Kyoto, Japan, July, 2006.

[19] A. Kira and S. Iwamoto, Golden complementary dual in quadratic optimization, Modeling Decisions for Artificial Intelligence, Proceedings of the Fifth International Confernece (MDAI 2008), Sabadell (Barcelona), Catalonia, Spain, October 30-31, 2008, Eds. V. Torra and Y. Narukawa, Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp. 191–202.

[20] R.T. Rockafeller, *Conjugate Duality and Optimization*, SIAM, Philadelphia, 1974.