

# 単一渦近似法と擬2次元での 実験による非対称剥離渦が 2次元物体に及ぼす力の解析

Analysis of force and moment generated  
asymmetric separation vortices from body  
in two-dimensional flow

広島大学理学研究科数理分子生命理学専攻  
大山達之, 飯間信

Graduate School of Science, Hiroshima University  
Tatsuyuki Ooyama and Makoto Iima

## 1 はじめに

流体中での運動, 特に, 自由落下や滑空等の受動的飛翔は, 運動物体と周りの流れの相互作用によって決定される. このとき物体表面から剥離する渦を観察することができる. この剥離渦に起因する非定常な流れにより, 物体形状が単純であっても, 物体の運動の様子は様々な挙動を示す. 落下する円盤に関する研究においては tumbling motion や periodic motion 等大きく 4 つの運動モードが報告されている [1, 2], また球の落下実験では球の速度変化はその運動方程式の理論解とは異なり, 垂直及び水平方向への揺らぎが確認されている [3]. 以上のことから, 物体と流体の相互作用により物体形状が単純であっても運動の様子が様々であることを伺うことができる.

円盤や球より対称性が低い円錐形の落下挙動について, 寺田寅彦が研究を行っている [4]. 寺田は, 椿の花の落下に着想を得, 紙円錐を用いた

解析を行った。円錐が落下する距離と転回確率を実験的に調べ、円錐形物体の形状から考察した回転の数理モデル (式 (1)) を提唱している。

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = A \sin \theta \quad (1)$$

提唱されたモデルは、円錐形の対称性から円錐軸と垂直軸がなす角が  $0, \pi$  の時、円錐形にかかるトルクがゼロになるというモデルである。

しかし、この寺田のモデルは、物体形状のみを物理的に考察したものであるため、流体効果については全く考慮されていない。そこで、我々は寺田のモデルが円錐落下の挙動を再現できるのかを確かめた [5]。寺田の実験に習い、紙円錐を作成し、落下の様子を撮影した。画像解析により、撮影動画から円錐軸と鉛直上向き軸のなす角  $\theta$  に着目した円錐形の回転のデータを抽出した。抽出したデータから推定されるトルク (角加速度) は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = A(\theta - 180)(\theta - 55) \quad (2)$$

となる。

$\theta = 0^\circ, 55^\circ$  の時にトルクがゼロとなる結果が得られた。落下データは試行ごとに、ひっくり返る ( $\theta = 0$  になる) までの時間にばらつきがあったが、 $\theta = 0$  となる時刻を基準とするとデータは重なる。つまり、落下中のトルクの変化に試行ごとの違いはないので、落下挙動自体は普遍的である。時間のズレは初期値のズレによると思われる。得られた関数を使えばその影響を解析することが可能であり、実際、転回確率の幅が初期値のズレの分布として理解できる (式 (2) のモデルに初期角度の揺らぎを仮定することで、寺田が行った円錐の落下距離と転回確率の関係を再現することに成功した)。

また、初期配置を変えるとトルクを推定する関数の形状が大きく変化することが分かった。流れ構造形成を伴う非定常運動は個別性が非常に強く、一般的な指導原理から円錐形落下時のトルクを推定することは困難である。

流体中の運動の挙動を説明するには、物体形状のみを議論するだけでは不十分であり、周りの流れ構造について解析する必要がある。しかし、前述した様に物体周りの流れは、剥離を伴う渦の発生に起因する非定常性のために、理論的取り扱いが容易ではない。

そこで、本研究では、運動直後の剥離渦に注目をし、物体から剥離しつつある渦が物体に及ぼす力やトルクを理論的に解析する事を目的とす

る。そのため物体に斜めに当たる一様流から剥離する剥離渦のダイナミクスを二次元非粘性流体と単一渦近似法により解析する。これまで物体両端で発生する対称な剥離渦に対し二次元非粘性モデルを解析した報告 [6] はあるが、本問題では 2 つの剥離渦の配置は一般に非対称である。

また、理論モデルによって得た結果の確認、剥離渦の実験的観察を行うために石鹸膜を用いた擬二次元流での可視化にも現在取り組んでいる。その現状についても報告をする。

## 2 単一渦近似法による解析

物体が運動を開始後短時間での剥離渦の成長を単一渦近似法 (Single Vortex Approximation) を用い解析する。単一渦近似法とは、物体から巻上る渦層を 1 つの点渦とした近似を行い、以下の条件を課し、点渦の位置、循環を決定する手法である。

(i) 剥離点で Kutta の条件

(ii) 点渦と仮想的渦層にかかる力の総和がゼロ

(i) の条件により、循環が点渦の位置の情報のみで決定され、(ii) の条件により具体的な渦運動の支配方程式が決定される。実際に境界層の剥離が起きると、巻上る渦層から渦度が供給され全体の循環が増す。仮想的渦層とは、点渦の循環が時間とともに増えるようすを再現するために、仮想的においたものである。

### 2.1 問題設定

本解析では、円錐形の二次元モデルとして、楔形の図形を取り扱う。このモデルは中心角を  $\pi$  (図 1 中の  $\theta$  を  $\frac{\pi}{2}$ ) とすると、平板のモデルとなる。考える流体は二次元非粘性非圧縮であるので、複素表示を用いる。この二次元物体に一様流  $Ue^{-i\alpha}$  が当たる状況を設定する。楔形を円に写す正則写像は、

$$z = C(\zeta - 1)^{2(1-\frac{\theta}{\pi})}(\zeta + 1)^{2\frac{\theta}{\pi}}\zeta^{-1} \quad (3)$$

により与えられる。定数  $C$  は剥離点がよどみ点 (流速がゼロとなる点) であることを利用して求めることができ、 $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $a = 2$  ならば  $C = 1$  と

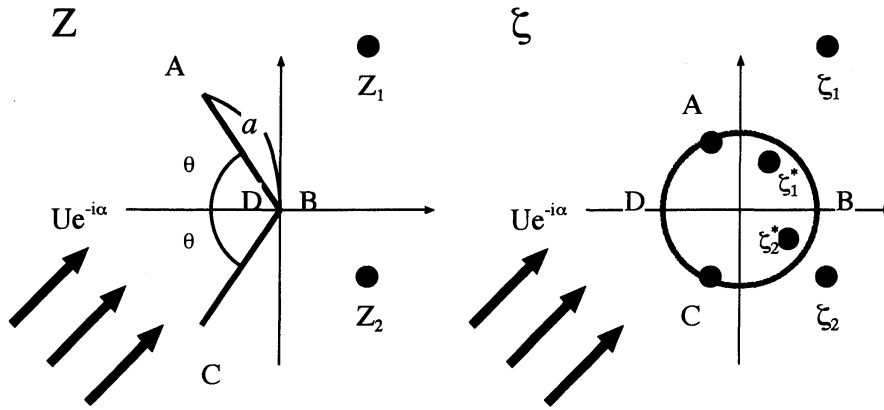


図 1:  $z$ -plane and  $\zeta$ -plane

なる。一般的に直線図形の写像関数を見つけ出すには Schwarz-Christoffel の変換が使われるが、ここでは、流体力学的な考えを応用して、写像関数を求めた。詳しくは、文献 [7] を参照されたい。

剥離点を  $A, C$  に定め、そこから剥離した渦の位置を  $z_{1,2}$  ( $\zeta_{1,2}$ ) とし、それぞれの循環を  $\gamma_{1,2}$  とする。  $\zeta_{1,2}^*$  は Millne-Thomson の円定理から誘起される  $\zeta_{1,2}$  の鏡像である。

二次元物体の対称軸に対し、一様流方向が平行でない場合を考える (図 1 のような状況) ことで、2つの剥離渦 (点渦) の位置、循環が非対称である状況を設定する。剥離渦の位置と循環は単一渦近似法により定める。(i), (ii) の条件を文献 [6] に習い、定式化すると、

条件 (i) は、

$$\frac{df}{d\zeta} = 0 \quad \text{at} \quad \zeta = \zeta_{A,C} \quad (4)$$

条件 (ii) は、

$$\frac{d}{dt}[\gamma_1(\zeta_1 - \zeta_A)] = -\gamma_1 \overline{W_1}, \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}[\gamma_2(\zeta_2 - \zeta_C)] = -\gamma_2 \overline{W_2} \quad (6)$$

となる。

ここで、 $W_j$  は点渦  $z_j (j = 1, 2)$  の複素速度であり、全体の複素速度から自己誘導速度をひいたもので表される。式 (5)、式 (6) が 2 つの渦それぞれの支配方程式となる。これらの式は  $\zeta_1, \zeta_2$  の連立常微分方程式であるため、渦運動を具体的計算することができる。式の導出、数値計算には Mathematica を用いた。

また、物体にかかる力・トルクの計算は運動量・角運動量の保存則を用い、Blasius の公式を非定常流でも対応するように拡張した公式 [8] より求めた。以下の式 (7)、式 (8) で書かれる。

$$F = i\frac{\rho}{2} \oint_C W^2 dz - i\rho \frac{d}{dt} \left( \oint_C \bar{z} d\bar{f} + \oint_B \bar{z} d\Psi \right) \quad (7)$$

$$M_z = -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[ \oint_C W^2 z dz \right] + \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \left[ \frac{d}{dt} \oint_B z \bar{z} df \right] \quad (8)$$

但し、 $\rho$  : 密度、 $W$  : 複素速度、 $f = \Phi + i\Psi$  : 複素速度ポテンシャル、 $C$  : 物体を取り囲む任意の閉曲線、 $B$  : 物体領域である。

### 3 平板の場合

平板の両端から剥離する渦について調べた。パラメータは以下のように設定した。

平板の長さ 4 (図 1 で  $a=2$ )。一様流の大きさ 1 ( $U=1$ )。流体の密度 1 ( $\rho=1$ )。

#### 3.1 検証

単一渦近似法を用いた解析の妥当性を検証するため、剥離する渦が 1 つの場合の揚・抗力と、平板に対し流れが垂直に当たるときの点渦の位置と循環の大きさを調べた。

平板の後端 ( $\alpha > 0$  の場合 A) のみから剥離渦が発生する時、揚・抗力は十分な時間が経つと定常理論の値 (抗力は 0、揚力は  $-4\pi\rho U^2 a \sin\alpha$ ) に収束することが確認された。

流れが平板に垂直に当たる時、つまり、理想的に平板の両端から剥離する 2 つの渦の位置は実軸に対し対称 ( $\bar{z}_1 = z_2$ ) で循環は向きが逆で大きさは等しくなる ( $\gamma_1 = -\gamma_2$ ) とした場合の解析結果を求めると、点渦と剥離点の距離は  $t^{\frac{1}{3}}$  に比例し、循環の大きさは  $t^{\frac{1}{2}}$  に比例する。また、Taneda(1971)

による実験的研究 [9] において、渦と剥離点の距離が運動開始直後では  $t^{\frac{1}{2}}$  に比例することが報告されている。  $t \simeq 0$  では、数値計算結果と解析結果及び実験結果の値がおおむね等しく、計算結果と理論値がよく一致していることが確認できた。

以上の結果から単一渦近似はよい近似を与えていると考えられる。

### 3.2 結果

平板に非対称に当たる流れによる渦運動を計算した結果について示す。平板の対称軸方向と流れ方向がわずかに傾く場合の揚力係数、モーメントを調べた。  $\alpha = \frac{\pi}{36}$  の場合の揚力係数 (図 2 中の実線)・抗力係数 (図 2 中の破線) と平板に働くモーメント (図 3) を示す。

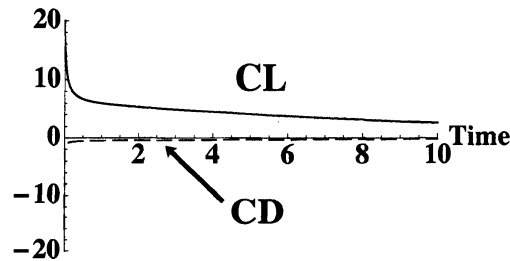


図 2: 揚力係数と抗力係数

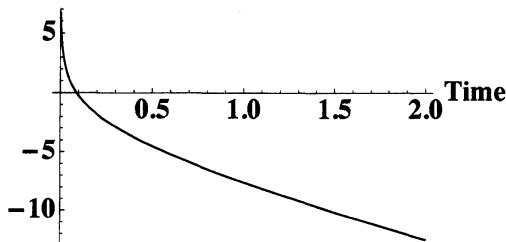


図 3: 平板に働くモーメント

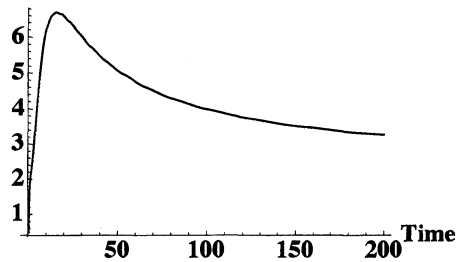


図 4: モーメント (後縁渦剥離のみ)

僅かに対称性が崩れると、定常理論の値とは異なることが分かった。また、剥離渦を後縁のみに課した時のモーメントを図 4 に示す。  $t \simeq 0$  での挙動が大きく違うという結果が得られた。

実際には剥離渦が後方に流されていくと新たな剥離渦が発生するため、本稿の枠組みでは長時間の挙動は現実と一致しない点に注意が必要である。

### 3.3 議論

本研究では剥離直後 ( $t \simeq 0$ ) の挙動を追うために単一渦近似法を用いている。3.1で述べたように実際の剥離の様子と2つの剥離渦を仮定した理論は剥離直後で一致しているため、平板に対し斜めに流れがある場合においても2つの剥離渦を仮定した解析は剥離後しばらくの間は有効であると考えられる。

前縁剥離渦を仮定した場合、後縁剥離渦よりも速度が遅く、剥離直後は物体に近い位置に存在するため物体に及ぼす影響が効いていると考えられるが、どの程度の時間まで有効であるのかを見積もる必要がある。

平板の対称軸に対し、流れの方向が僅かに傾くだけで、定常理論とは異なる結果が得られた。二次元平板の場合、物体両端から剥離する2つの渦の対称性の崩れによる前縁渦の挙動が大きな影響を与えていることが推察される。

単一渦近似法は非粘性流体を仮定しているため、物体表面での境界層は存在せず、厳密な境界層剥離を議論することはできない。2つの剥離渦の力・トルクの計算の際、 $t = 0$ では値は発散することに着目すると、 $t = 0$ での挙動は粘性を考慮する必要があるであろう。

## 4 楔形への拡張

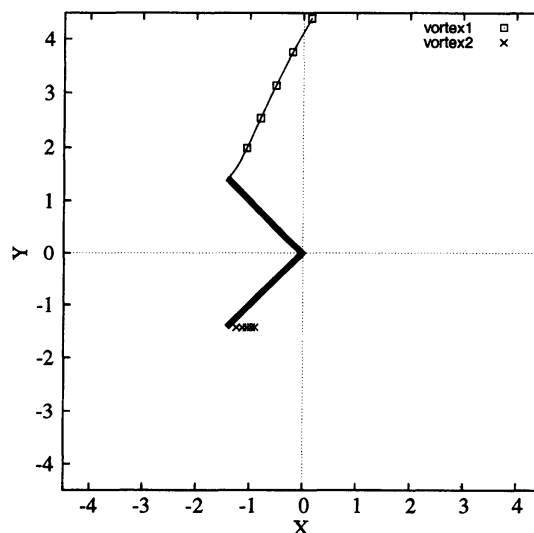


図 5:  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

図1の $\theta$ を $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ とすることで、任意の頂角をもつ楔形の図形となる。式の導出は平板の計算と同様に Mathematica で行い、数値計算は導出した関数を用い、時間発展を4次精度のルンゲ・クッタ法を使用し計算した。 $\theta = \frac{\pi}{4}$ とし、頂角 $90^\circ$ の楔形に一樣流が当たるときの点渦の位置を図5に示す。

楔形の開いている方向からの流れ ( $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ) に関しては、流れの方向が傾くと、前縁の点渦が後縁の点渦に比べ速度が遅くなり、留まっている様子が分かる。

## 5 石鹼膜を用いた実験

上記理論では一点から剥離する渦は一つだけであるが、実際には、一定時間経過すると剥離点からまた新たな剥離渦が現れる。理論モデルの適応範囲を明確にし、再剥離をモデル化する際の検証を可能とする必要がある。そこで現在石鹼膜を用いて作った二次元流による実験を試みている。この実験により新たな剥離渦が現れるまでの様子を明らかにしたいと考えている。

石鹼水は家庭用洗剤の質量比2%となるように作っている。静止状態になる（石鹼膜の揺らぎが止まる）までに時間がかかるために、作った石鹼水にポリビニルアルコール（PVA）を混ぜ粘性をあげる工夫をした。この石鹼水にアルミ粉粒子を混ぜ、粒子の軌跡を追った。

平板を動かし流れと平板が垂直になる場合の様子を図6に示す。無次元時間0.25の時である。

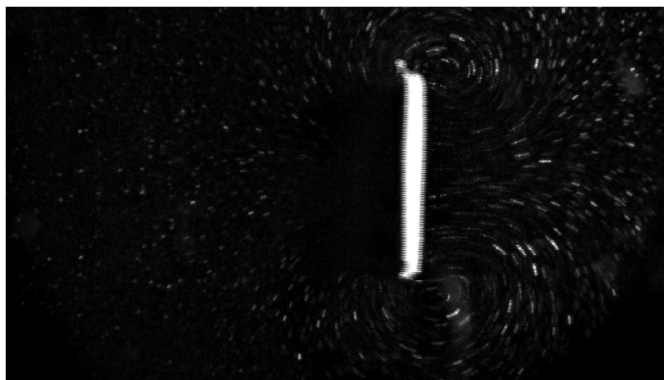


図6: 石鹼膜実験による撮影



今後は、撮影動画の解析をすすめ、石鹼膜実験においても、文献[9, 10]と同様の結果が得られるかを確かめ、理論モデルとの比較を行う予定である。

## 6 結語

物体にの対称軸に対し流れの方向が傾くと、相対的に物体両端にできる非対称な剥離渦構造が剥離直後では物体に影響を及ぼすことが分かった。楔形に関しては、対称軸に対して流れ方向を傾けた時、前縁剥離渦の挙動が、流れに沿う場合と境界付近に留まる場合が見られた。今後は、渦運動（力・トルク）の計算を通して、形状特性について議論をしていきたい。そのため理論モデルを完成させ、楔形における非対称剥離渦の影響を理論、実験の双方からアプローチを行う予定である。

## 謝辞

本研究の一部は科学研究費 (No.25289062) の補助を受けたものである。

## 参考文献

- [1] S. B. Field, M. G. Moore and F. Nori, “Chaotic dynamics of falling disks”, *Nature*, **388**, 252-254 (1997).
- [2] H. Zong, S. Chen and C. Lee, “Experimental study of freely falling thin disk : Transition from planar zigzag to spiral”, *Physics of Fluid*, **23**,011702 (2011).
- [3] 菊地謙次, 今野友博, 市川誠司, 窪田佳寛, 望月修, “水中を落下する球に作用する非定常抵抗の係数”, 日本機会学会論文集B編, Vol.79, No.798, 151-163, (2013).
- [4] T. Terada and T. Utigasaki, “On the Motion of a Peculiar Type of Body Falling through Air - Camellia Flower”, *Scientific papers of the Institute of Physical and Chemical Research*, **20**, 114-127 (1933).

- [5] 大山達之, “空気中を落下する円錐形物体の数理解析”, 平成24年度広島大学総合科学部卒業論文, (2013).
- [6] R. H. Edwards and H. K. Cheng, “The separation vortex in the Weis-Fogh circulation-generation mechanism”, *J. Fluid Mech*, **120**, 463-473 (1982).
- [7] 今井功, “等角写像とその応用”, 岩波書店 (1979).
- [8] 今井功, “流体力学 (前編)”, 裳華房 (1973).
- [9] S. Taneda and H. Honji, “Unsteady Flow past a Flat Plate Normal to the Direction of Motion” *J. Phy. Soc. Jpn*, **30**, 262-272 (1971).
- [10] M. H. Dickinson and K. G. Götz, “Unstetady aerodynamic performance of model wings at low Reynolds numaber”, *J. Exp. Biol*, **174**, 45-64 (1993).