

慣性による球形粒子のマイグレーション  
- 数値シミュレーションによるアプローチ -

関西大学大学院理工学研究科, \*山形大学大学院理工学研究科  
○中川尚人, 加瀬篤志, 大友涼子, \*牧野真人, 板野智昭, 関眞佐子  
Naoto Nakagawa, Atsushi Kase, Ryoko Otomo, Masato Makino, Tomoaki Itano,  
Masako Sugihara-Seki  
Graduate School of Science and Engineering, Kansai University  
\*Graduate School of Science and Engineering, Yamagata University

## 1. 緒言

円管内層流に球形粒子を中立浮遊させると, 粒子は流れに対して垂直方向に移動 (マイグレーション) して, 下流の断面内である特定の動径位置に集まる現象が知られている<sup>(1)</sup>. これは, 慣性の影響によるもので, tubular pinch 効果あるいは Segre-Silberberg 効果と呼ばれている. 同研究室の三浦らは正方形断面をもつ流路を用いて流路断面内の粒子分布の計測を行い, 浮遊粒子が円管とは異なる特徴的な分布を示す結果を報告している<sup>(2)</sup>. Miura et al.<sup>(2)</sup>によれば, 正方形流路内流れ中で中立浮遊する球形粒子は, レイノルズ数( $Re$ )が臨界レイノルズ数( $Re_c \approx 260$ )より低い流れでは正方形断面の各辺の中央付近の 4 点に集まり, 臨界レイノルズ数より高い  $Re$  数の場合にはこれに加えて, 四隅付近の 4 点にも集まるようになる. 流路が長くなると浮遊粒子はこれらの点に集中するようになることから, これらの点は粒子に働く揚力が 0 となる点, すなわち平衡点に対応すると考えられる. 前者 (各辺の中央付近の平衡点) は面心平衡点, 後者 (断面の四隅付近の平衡点) は対角平衡点と呼ばれている.  $Re$  数が増加すると, 面心平衡点は流路中央へ向かう向きに移動し, 対角平衡点は逆に流路中央から離れる向きに移動することも示されている.

Miura et al.<sup>(2)</sup>の実験に対応する数値シミュレーションとして, Chun & Ladd<sup>(3)</sup>による格子ボルツマン法を用いた先行研究が存在し, 正方形流路内流れ中の粒子マイグレーションの研究でしばしば引用されている. しかし, Chun & Ladd<sup>(3)</sup>では,  $Re = 100$  のとき正方形断面内に対角平衡点を含む多くの平衡点が存在することや,  $Re > 500$  で面心平衡点が不安定になることなど, 実験結果と矛盾する結果が導かれている. そこで本研究では, Miura et al.<sup>(2)</sup>の実験に対応する数値シミュレーションを埋め込み境界法を用いて行い, 実験結果が再現できるかを確かめるとともに, 正方形流路内の粒子マイグレーション現象を調べる. 具体的には, 正方形流路内層流に単一の球形粒子を様々な位置から流した場合の粒子運動を数値解析する. 中立浮遊する粒子に対する粒子軌跡の解析と, 主流に対して垂直方向の粒子運動を制限した場合に粒子にはたらく横方向の力 (揚力) の評価を行う. 流路断面内で揚力が 0 となる位置, すなわち粒子の平衡位置を求めて, 実験で得られた粒子分布と比較する.

## 2. 数値解析の方法

圧力差により駆動された正方形断面（1辺の長さ  $D$ ）をもつ流路（長さ  $L$ ）内流れに、直径  $d$  の球形粒子を1個浮遊させ、その周りの流れ場と粒子運動を解析する(Fig. 1). ただし、流体と粒子の密度は等しいものとする. Fig. 1 に示すように、流路の中心軸に沿って  $x$  軸をとり、流路断面の各辺と平行に  $y, z$  軸をとる.  $Re$  数は断面平均流速  $U$ , 流体の動粘性率  $\nu$  を用いて  $Re = UD/\nu$  と定義する.

流体は非圧縮性のニュートン流体とし、速度場の支配方程式は連続の式と Navier-Stokes 方程式である. また、浮遊粒子は流体から受ける力に応じて、ニュートンの運動法則に従って運動する. 本研究では、これらの方程式を梶島<sup>(4)</sup>による埋め込み境界法を用いた手法によって数値解析を行う. 具体的には、流体領域で0, 固体(粒子) 領域で1となるスカラー量  $\alpha$  を用いて、速度場  $\mathbf{u}$  を次のように定義する.

$$\mathbf{u} = (1 - \alpha)\mathbf{u}_f + \alpha\mathbf{u}_p \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{u}_f$  は流体の速度を表し、 $\mathbf{u}_p$  は粒子内部の速度であり、粒子重心の並進速度  $\mathbf{V}$  と回転角速度  $\boldsymbol{\Omega}$  および粒子重心からの位置ベクトル  $\mathbf{R}$  を用いて次式で表される.

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} \quad (2)$$

粒子表面ですべりなし条件を課せば、新たに定義した  $\mathbf{u}$  は、連続の式：

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

および運動方程式：

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla \cdot [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] + \mathbf{f} \quad (4)$$

を満たすことを示すことができる. ここで、 $p$  は圧力、 $\rho$  は流体の密度である. (4)式右辺の  $\mathbf{f}$  は流体と粒子との相互作用力を表し、その値は粒子内部の速度が(2)式と一致するという条件により決定する.

(3), (4)式を部分段階法により時間発展させて解く<sup>(4)</sup>. 境界条件は、流路壁面( $y, z = -D/2, D/2$ )にすべりなし条件を課し、流路の上流と下流( $x=0, L$ )に周期境界条件および一定の圧力差を与える.

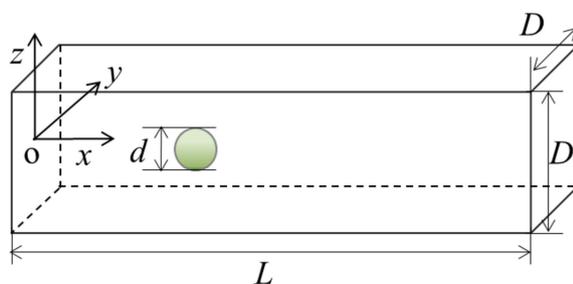


Fig. 1 The configuration of a spherical particle immersed in a pressure-driven flow through square channels.

本研究では、各計算格子の中心位置と粒子中心との距離  $R$  および界面幅  $\xi$  を用いて、 $\alpha$  を次のように定義した。

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( 1 - \tanh \frac{R-d/2}{\xi} \right) \quad (5)$$

粒子運動に対して次の2通りの場合を取り扱う。

(i) 粒子はニュートンの運動法則に従って自由に並進運動および回転運動を行うとして、粒子軌跡の計算を行う。

$$M \frac{dV}{dt} = -\int f dV, \quad I \frac{d\Omega}{dt} = -\int R \times f dV \quad (6)$$

ただし、 $M$  と  $I$  は粒子の質量と重心まわりの慣性モーメントである。

(ii) 粒子は流れ方向 ( $x$  方向) には自由に運動し、自由に回転運動も行うが、流れと垂直方向 ( $y, z$  方向) には動かないものとし、粒子にはたらく揚力  $F = (F_y, F_z)$  を求める。

$$M \frac{dV_x}{dt} = -\int f_x dV, \quad I \frac{d\Omega}{dt} = -\int R \times f dV \quad (7)$$

$$V_y = 0, \quad V_z = 0, \quad F_y = -\int f_y dV, \quad F_z = -\int f_z dV$$

### 3. 計算結果および考察

本数値解析では、Miura et al.<sup>(2)</sup> の実験で用いた  $d = 650\mu\text{m}$ ,  $D = 6.0\text{mm}$  に対応して  $d/D = 1/9$  とし、 $Re = 100 \sim 1000$  の範囲で計算を実行した。また、流路長  $L$ , 界面幅  $\xi$  および計算格子幅  $\Delta$  は  $L/d = 20$ ,  $\xi/d = 0.03$ ,  $\Delta/d = 0.05$  とした。

まず、粒子が  $y$  軸 ( $z$  軸) 上または対角線上にあるときに、粒子に働く揚力を(ii)の方法で計算した結果を示す。Fig. 2 は  $Re = 514$  の場合で、Fig. 2(a) は粒子が  $y$  軸上にあるときの  $F_y$  を、Fig. 2(b) は粒子が対角線上にあるときの揚力の対角線方向成分  $F_r$  を描いたものである。ここで、 $r (= \sqrt{y^2 + z^2})$  は流路中心からの距離を表し、 $F_y, F_r$  とともに十分時間が経過して定常状態に達したのちの値を示している。いずれの図においても、正の値は流路中心から管壁へ向かう力を、負の値は逆に流路中心向きの力を表す。Figs 2(a), (b) とともに、流路中心に近い側は正の値、流路壁に近い側は負の値になっており、その間に揚力が 0 となる点が存在する。この点が平衡点を表し、Fig. 2(a) の場合は面心平衡点、Fig. 2(b) の場合は対角平衡点に対応すると考えられる。実際、Miura et al.<sup>(2)</sup> の実験で得られた面心平衡点と対角平衡点の位置をそれぞれ Figs 2(a), (b) に  $\Delta$  印で示している。これらの位置は本数値解析から得られた結果と良い一致を示している。

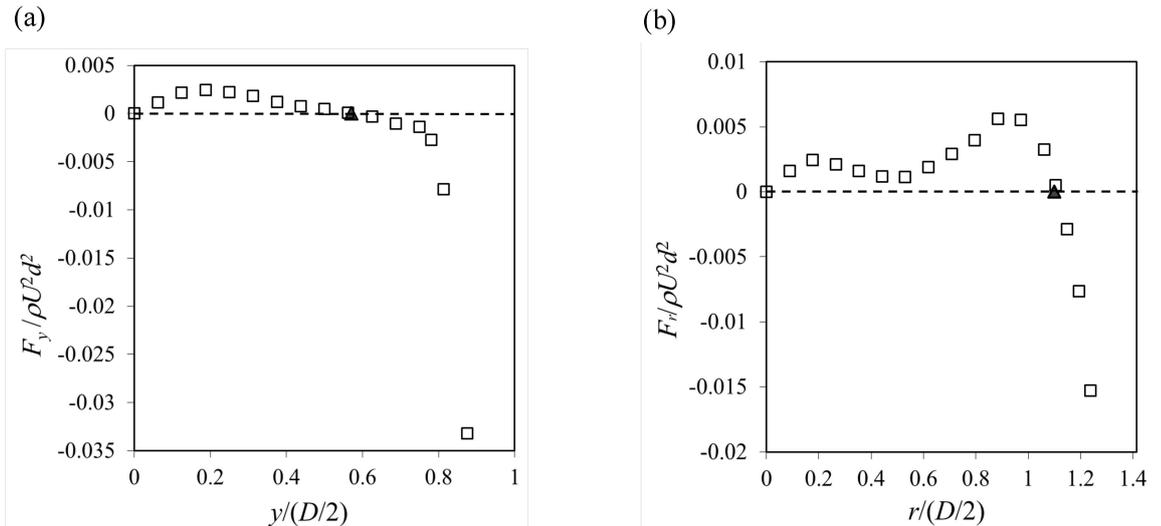


Fig. 2 (a) The lateral force  $F_y$  exerted on a particle which is located on the  $y$ -axis, and (b)  $F_r$  on a particle located on the diagonal at  $Re = 514$ . The triangles show the locations of the channel face equilibrium position and the corner equilibrium position experimentally obtained at  $Re = 514$ <sup>(2)</sup>.

粒子が流路断面内の様々な位置にあるときに働く揚力を, Fig. 3(a)に  $Re = 144$  の場合, Fig. 4(a)に  $Re = 514$  の場合を示す. 対称性から方位角が  $0 \sim 45^\circ$  の範囲で計算した結果を,  $yz$  面の第1象限全体で描いたものである. 各矢印の向きはその位置における揚力の方向を表し, 明暗(濃淡)で揚力の大きさを示した. Figs 3(a), 4(a)では見やすいように  $y, z$  軸を少しずらして表示している. これらの図の実線は(i)の方法で計算した粒子軌跡を  $yz$  面に射影したものである. Figs 3(b), 4(b)はそれぞれ  $Re = 144, 514$  において Miura et al.<sup>(2)</sup>の実験で得られた粒子分布であり, 図中の各点が計測された粒子の中心位置を示す.

既に Fig. 2 で見たように,  $Re = 514$  の場合, Fig. 4(a)の  $y$ (および  $z$ ) 軸上と対角線上に揚力が0となる点があり, それぞれ面心平衡点( $\Delta$ )と対角平衡点( $\square$ )に対応する.  $Re = 144$  の場合も同様に, Fig. 3(a)の  $y$ (および  $z$ ) 軸上と対角線上にそれぞれ面心平衡点と対角平衡点が存在することが分かる. いずれの図においても,  $y$ ( $z$ ) 軸あるいは対角線に沿って, 流路中心に近い側では外向き, 遠い側では内向きの揚力がはたらき, これらはいずれも平衡点に近づく向きであるので, 最初これらの線上にあった粒子は, その線上の平衡点に近づいていくと考えられる. ところが, Fig. 3(a)の場合( $Re = 144$ ), 対角平衡点近くの粒子軌跡が全てこの点から離れていくのが分かる. 従って, 対角平衡点は不安定で, 鞍点であると考えられる. 一方, 粒子軌跡は面心平衡点に漸近しており, この平衡点は漸近安定であると考えられる. この結果は, 対応する  $Re$  数の実験結果 (Fig. 3(b)) において対角平衡点付近では粒子が観察されず, 面心平衡点近傍にのみ粒子が見られたことを説明する. 一方, Fig. 4(a)の場合( $Re = 514$ )には, 粒子軌跡より面心平衡点と対角平衡点の両方とも安定であることが分かる. このことは, 対応する  $Re$  数の実験結果 (Fig. 4(b)) において, 対角平衡点が現れ, 粒子は面心平衡点と対角平衡点の両方の近くに分布するという計測結果と一致している.

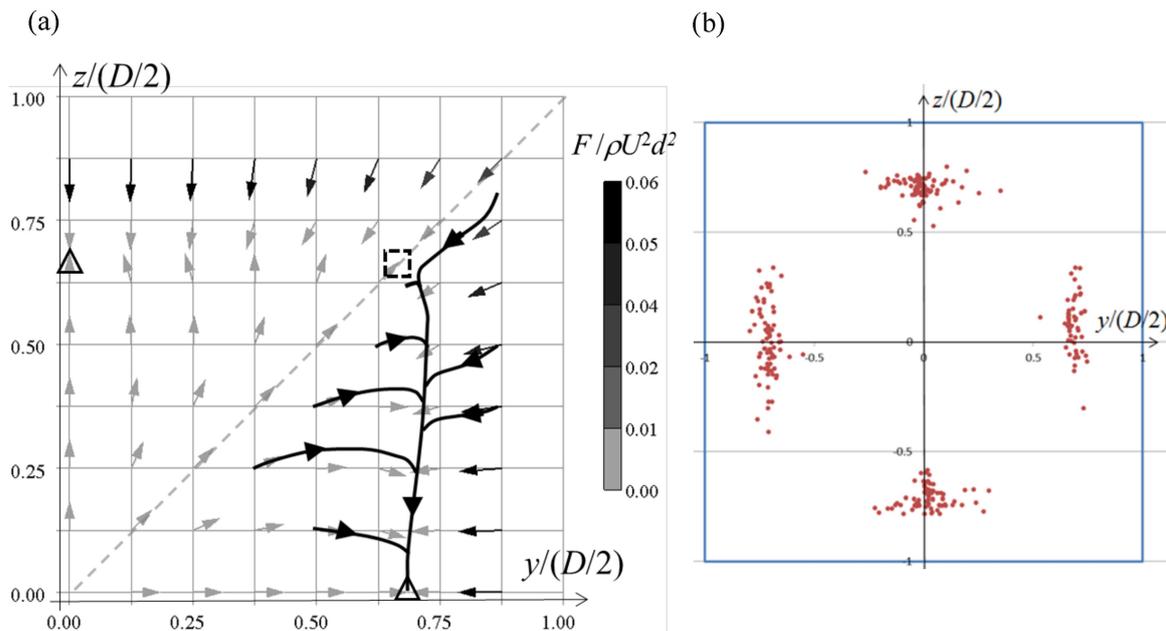


Fig. 3 (a) The map of the lateral force ( $F_y, F_z$ ) exerted on a particle and particle trajectories projected over the cross-section at  $Re = 144$ . Each arrow represents the direction of the lateral force and its magnitude is shown by the gray scale. The triangles represent the channel face equilibrium positions and the square represents the channel corner equilibrium position. (b) The particle distribution obtained experimentally at  $Re = 144$ <sup>(2)</sup>.

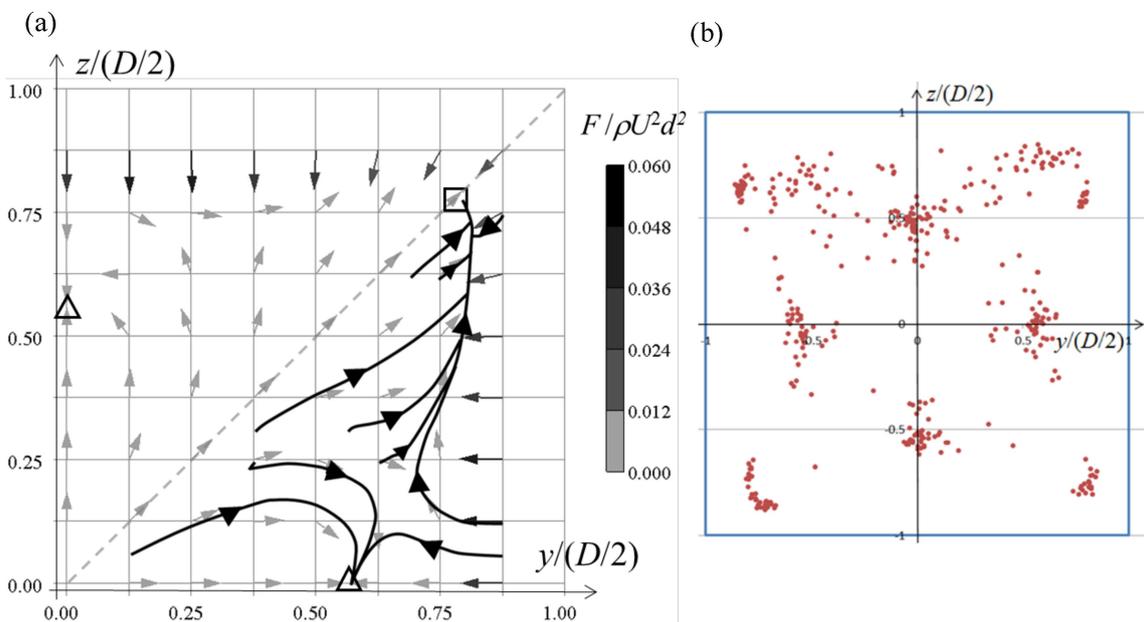


Fig. 4 (a) The map of the lateral force ( $F_y, F_z$ ) exerted on a particle and particle trajectories projected over the cross-section at  $Re=514$ . For additional explanation, see Fig. 3. (b) The particle distribution obtained experimentally at  $Re = 514$ <sup>(2)</sup>.

$Re=144$  と  $514$  の 2 つの場合を例にとって数値解析結果を説明し, Miura et al.<sup>(2)</sup>の実験結果との比較を行ったが, 他の  $Re$  数の場合も同様である. 即ち, 臨界レイノルズ数 ( $Re_c \approx 260$ ) に対して,  $Re < Re_c$  では対角平衡点が不安定となり, 実験において面心平衡点のみが観察される.  $Re > Re_c$  では面心平衡点と対角平衡点の両方ともが安定となり, 実験において両者が観察される. 平衡点の  $Re$  数依存性を調べると,  $Re$  数の増加と共に面心平衡点は流路中央の向きへ, 対角平衡点は流路中央から離れる向きに移動することが示される. 各  $Re$  数に対して得られた平衡点の位置は, Miura et al.<sup>(2)</sup>の実験結果と定量的にもほぼ一致する結果となった.

#### 4. 結言

正方形流路内流れにおいて, 浮遊粒子に作用する揚力の解析と粒子軌跡を調べた. 流路断面の各辺の中央位置と対角線上に揚力が 0 となる平衡点を得られ, これらは実験で観察された面心平衡点と対角平衡点に相当すると考えられ, その位置に一致が見られた. 面心平衡点は常に安定であったが, 対角平衡点は低  $Re$  数において不安定であり, 対角平衡点は臨界  $Re$  数 ( $Re_c$ ) を越えたときのみ観察されることが示された. 現在, 実験では決定が困難である  $Re_c$  の値の評価について解析を進めているところである.

謝辞: 本研究の一部は JSPS 科研費 (25630057) と関西大学先端科学技術推進機構グループ研究費の助成により行われた.

#### 参考文献

- (1) Segre, G. and Silberberg, A. "Behavior of macroscopic rigid spheres in Poiseuille flow." *J. Fluid Mech* **14** (1962), pp.136-157.
- (2) Miura, K., Itano, T., and Sugihara-Seki, M., "Inertial migration of neutrally buoyant spheres in a pressure-driven flow through square channels", *J. Fluid Mech*, **749** (2014), pp. 320-330.
- (3) Chun, B. and Ladd, A.J.C. 2006 "Inertial migration of neutrally buoyant particles in a square duct: An investigation of multiple equilibrium positions." *Phys. Fluids* **18** (2006), 031704.
- (4) 梶島, 瀧口, 浜崎, 三宅, "渦放出を伴う粒子を含む鉛直平板間乱流の構造", 日本機械学会論文集(B編) **66** (2000), pp.120-127.