

Random Basin in Dice Roll

佐藤譲*, 松永伸夫

(北海道大学・電子科学研究所 / 理学研究院数学部門)

Yuzuru Sato and Nobuo Matsunaga

(RIES / Department of Mathematics, Hokkaido University)

1 ダイス投げとランダムネス

ダイス投げのランダム性が決定論力学系のベイシン構造の複雑さに由来することはよく知られている。ダイス投げはダイスが床に衝突する度にエネルギーを失っていく区分 Hamilton 系であり, ダイスが 6 面なら 6 つのアトラクターが存在する。以下では Nagler-Ritcher のバーベルモデル [3] を紹介する。このモデルはコイントスなど, 剛体衝突に基づく古典力学的疑似乱数生成系の標準モデルであり, よく研究されている [1, 7].

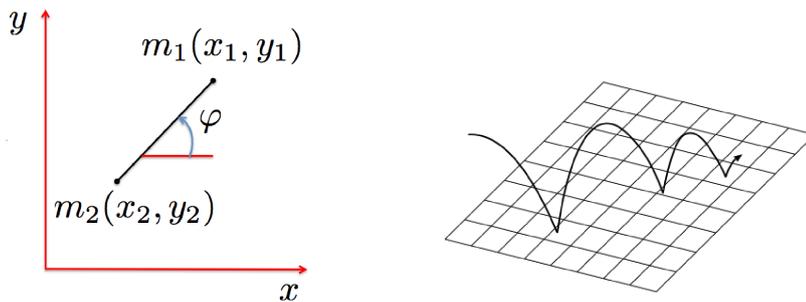


図 1: バーベルモデル: バーベルが床との衝突を繰り返し, エネルギーを失う.

*ysato@math.sci.hokudai.ac.jp

ダイスのモデルとして図1左のような質量のないロッドとその両端にそれぞれ質点を持つ2次元平面 (x, y) 上のバーベルを考える。このバーベルが床 $(y = 0)$ と衝突を繰り返してエネルギーを失い、最終的に静止する過程を考える。この床は、衝突時、衝突した質点の y 方向の速度を減らすパラメーター f を持つ¹ 床の質点1の x 軸からの偏角を φ 、ロッドの長さを $l = 1$ 、バーベルの重心座標を (x, y) 、質点1の座標を (x_1, y_1) 、質点2の座標を (x_2, y_2) とする。質点1、質点2の座標は、重心座標を用いて次のようにかける。

$$x_1 = x + \beta_2 \cos \varphi \quad (1)$$

$$y_1 = y + \beta_2 \sin \varphi \quad (2)$$

$$x_2 = x - \beta_1 \cos \varphi \quad (3)$$

$$y_2 = y - \beta_1 \sin \varphi \quad (4)$$

ここで $\beta_{1,2}$ は質量比で、

$$\beta_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \beta_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1$$

初期条件としてバーベルの重心の初期高度 $y = h_0$ (h_0 は無次元量とする.)、重心の y 方向への初速 \dot{y} 、質点1の床からの傾き φ とバーベルの重心を中心として回転するときの角速度 $\dot{\varphi}$ を与え水平投射する。与えた初期条件から投射されたバーベルは、自由落下と床との衝突を繰り返しながら最終的に倒れて止まる。エネルギー散逸は床との衝突時のみに起こり、空気抵抗と床の水平方向の摩擦は考えない。質点2が質点1の右にある最終状態を0とし質点2が質点1の左にある最終状態を1とする。このモデルの運動を自由落下過程と床との衝突過程の二つの過程に分けて考える。自由落下過程とはバーベルが床と接触していない間、つまり $y_1 > 0$ かつ $y_2 > 0$ を指す。自由落下時のエネルギーは次のようになる。

$$E = \frac{1}{2}\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\beta_1\beta_2\dot{\varphi}^2 + y \quad (5)$$

またこの間、角運動量 $\beta_1\beta_2\dot{\varphi}$ は保存される。自由落下時の運動方程式は以下で与えられる。

$$\ddot{y} = -1, \quad \ddot{\varphi} = 0 \quad (6)$$

¹ $e = 1 - f$ がはねかえり係数である。以下では、便宜上 f を床による減衰と呼ぶこともある。

衝突過程とは、質点のどちらかが床と接触している間、つまり $y_1 = 0$ or $y_2 = 0$ を指す。 $y_1 = 0$ について考えてみる。このとき角度 φ は $\pi < \varphi < 2\pi$ である。 y_1, \dot{y}_1 でエネルギー (5) をかきくだと

$$E = \frac{1}{2} \frac{\beta_1}{\beta_1 + \beta_2 \cos^2 \varphi} \dot{y}_1^2 + \frac{1}{2} \beta_2 (\beta_1 + \beta_2 \cos^2 \varphi) \left(\dot{\varphi} - \frac{\cos \varphi}{\beta_1 + \beta_2 \cos^2 \varphi} \dot{y}_1 \right)^2 - \beta_2 \sin \varphi \quad (7)$$

であり、

$$\dot{\varphi} := \dot{\varphi} - \frac{\cos \varphi}{\beta_1 + \beta_2 \cos^2 \varphi} \dot{y}_1 \quad (8)$$

は衝突中不変の角運動量となっている。これによって次の反発の条件が得られる。

$$(\varphi, \dot{\varphi}) \mapsto (\varphi', \dot{\varphi}') = (\varphi, \dot{\varphi}) \quad (9)$$

さらに y_1 が次に従うと仮定すると

$$\dot{y}_1 \mapsto \dot{y}_1' = -(1-f)\dot{y}_1 \quad (10)$$

(9) と (10) を合わせて次の reflection law が得られる。

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ y_1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ -(1-f)y_1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$(y_1 = y_1' = 0, \quad \pi < \varphi < 2\pi)$$

質点 2 が床と衝突する場合は、 $y_2 = 0$, $0 < \varphi < \pi$ として (5)-(11) の文字と符号を $y_1 \rightarrow y_2$, $\beta_{1,2} \rightarrow \beta_{2,1}$, $\sin \varphi \rightarrow -\sin \varphi$, $\cos \varphi \rightarrow -\cos \varphi$, と置き換えるだけでよい。

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \dot{\varphi} \\ -(1-f)y_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$(y_2 = y_2' = 0, \quad 0 < \varphi < \pi)$$

これで衝突過程の運動についても記述できた [1].

この系のベイシンを調べる場合、エネルギーが散逸して $E < 0.5$ となった時点でバーベルが静止したとみてよい。垂直に立った静止状態のバーベルのエネルギー $E_s = 0.5$ を考えると、 E_s より小さいエネルギーのバーベルは系の最終状態を変え

ることがないからである。つまりこの $E < E_s = 0.5$ が最終状態を決定するための終了条件である。以下では、初期高度 $h_0 = 0.6$, x 方向への初速度 $\dot{x}_0 = v_x$, y 方向への初速度 $\dot{y}_0 = 0$ を固定し, $(\varphi, \dot{\varphi}, f)$ をパラメータとして数値実験を行う。初期エネルギーが $E < 2\pi^2 + 0.6$ ($|\dot{\varphi}| < 2\pi$) のときのベイシンを図2に示す。白色部分は最終状態 0 に対応し, 黒色部分は最終状態 1 に対応する。最終状態 0 に収束するベイシンを β_0 , 最終状態 1 に収束するベイシンを β_1 とよぶ。

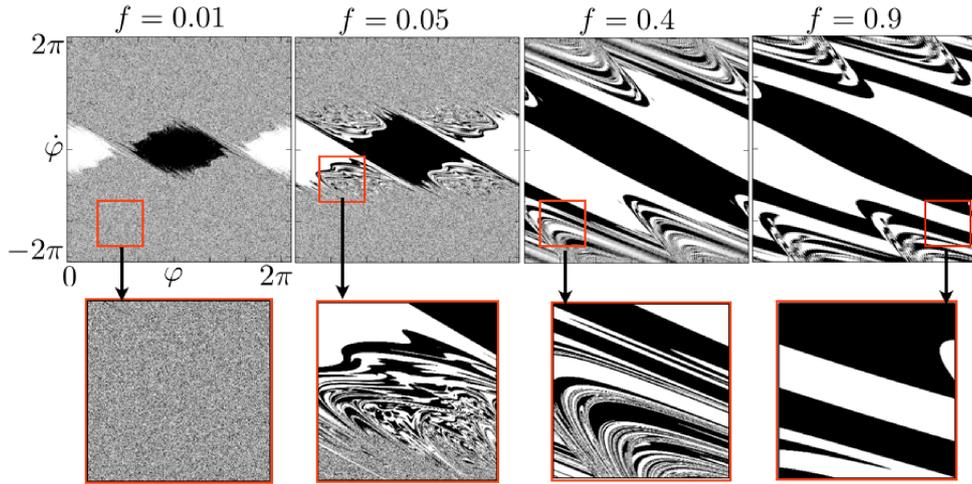


図2: ダイス投げのベイシン構造: $f = (0.01, 0.05, 0.4, 0.9)$ と変化させた時のベイシンで, 赤枠で囲まれた部分はそれぞれのベイシンにおける特徴的構造. $f = 0.01$ の場合, 空間のほぼ全域に粉碎されたベイシンが広がる. $f = 0.9$ のとき, β_0, β_1 の境界は概ね滑らかである.

ここでベイシン境界付近の ε -ball を考える. この ε -ball 内に複数のアトラクターのベイシンが含まれる場合, ε の精度で選ばれた初期値がどのアトラクターに到達するか判らないという意味で, この初期値を ε -uncertain な初期値と呼ぶ. ランダムに初期値を選んだとき, ε -uncertain な初期値が選ばれる確率は境界の ε -ball に位置する位相空間の面積の割合となる. この割合を $g(\varepsilon)$ とすると $g(\varepsilon)$ は次の式で見積もられる [?].

$$g(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha, \quad \alpha = N - D_0 \quad (13)$$

ここで N は位相次元, D_0 は box-counting 次元であり, α は uncertainty exponent と呼ばれる. ベイシン境界がフラクタルでない場合は, $\alpha = 1$ となり, 初期値の精度の上昇に伴って, ε -uncertain な初期値が選ばれる確率は線形に減少する. 一方で

ベイシン境界がフラクタルの場合, $\alpha < 1$ となり, ε -uncertain な初期値が選ばれる確率 $g(\varepsilon)$ を減少させるためには, 指数的に高い初期値精度が必要となる. とくに $\alpha = 0$ の時には, ε -uncertain な初期値が選ばれる確率 $g(\varepsilon)$ が 1 となる. このような系は実験に対する再現性を完全に失う. この多アトラクタ系のアトラクタ選択の初期値鋭敏性は, 単アトラクタ系のカオス軌道の初期値鋭敏性より強い不確定性であるとされる. ある初期値がどのアトラクターに到達するか, という決定問題の不確定性が ε の精度に指数的に影響するという性質は最終状態鋭敏性 (final state sensitivity) と呼ばれ, α がその指標となる [2].

2 ダイス投げの公平性と予測可能性

ここでダイス投げの公平性と予測可能性を定義してみよう [1].

Definition 2.1 (Fairness). 擬似乱数発生器が公平であるとは, そのダイナミクスのもつ n 個の最終状態 F_1, \dots, F_n ($i = 1, \dots, n$) に向かう初期値の集合 $\beta(F_1), \dots, \beta(F_i), \dots, \beta(F_n)$, の測度が等しいということである.

Definition 2.2 (Predictability). ほぼすべての初期値 x_0 の与えられた最終状態内に位置する開集合 $U(x_0 \in U)$ が存在するとき, 擬似乱数発生器は予測可能であるという. 初期値 x_0 は不確かさ ε の集合だと仮定する. B を x_0 を中心とする ε -ball だと考えると, 予測可能の定義は $B \subset U$ である.

コイントスやダイス投げといった古典力学的擬似乱数発生器は, 上の定義に従えば, 各最終状態のベイシン内に ε -ball が含まれるという意味で, 予測可能であるといえる [1]. 反発係数 f を小さくすると ε -uncertain な初期値の割合が増加するが, どの $f(> 0)$ のベイシンにも ε -ball ($\varepsilon > 0$) を含む領域が存在する. 現実的には, 初期値の制御可能な範囲が ε より大きい場合, ε -uncertain set は ε -ball を含むことができないので, 最終状態は「実効的に予測不可能」となる. これがダイス投げのランダムネスの起源である.

3 非一様な床でのダイス投げ

さて次に非一様な床でのダイス投げを考察する. 非一様な床をある確率 p で f が減衰の小さい f_1 , 確率 $1 - p$ で減衰の大きい f_2 であるような床 (14) としてモデル化する². 反発係数 $e = 1 - f$ がランダム変数である以外は, 一様な床の場合と同一設定とする.

$$f = \begin{cases} f_1 = 0.05 & \text{Prob}[f = f_1] = 1 - p \\ f_2 = 0.4 & \text{Prob}[f = f_2] = p \end{cases} \quad (14)$$

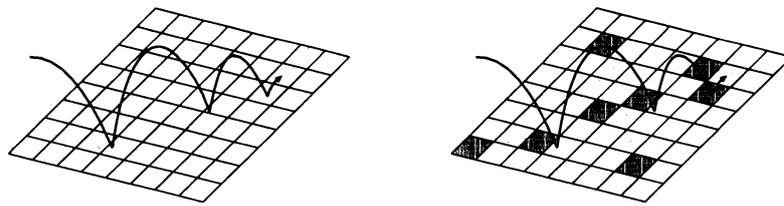


図 3: 一様な床と非一様な床でのダイス投げ: 右図では白色と灰色がそれぞれ f_1 と f_2 に対応しており, p の値に応じて f_1 と f_2 の割合が変化する.

非一様な床のダイスロールは最終状態 0 または 1 をアトラクターとする, 多アトラクターのランダム力学系で記述され, その初期値集合はランダムフラクタルベイスンを構成する. 非一様な床のアンサンブルに対して, ある初期点 x から出発した軌道の最終状態が 0 となる確率を $\rho_0(x)$, 1 となる確率を $\rho_1(x) = 1 - \rho_0(x)$ とする. このランダムベイスンを数値計算により求め, パラメーター p で定まる床のアンサンブルに対応する初期値集合の $\rho_0(x)$ をグレースケールで表示した. 床のアンサンブルは 20, 初期値の範囲は一様な床の場合と同一である. 図 4 より, この系では p の変化に対してベイスンの複雑度の変化が空間的に一様でないことがみてとれる.

ランダムな床でのダイス投げの予測可能性を考えてみよう. ここでは, ダイス投げの予測可能性の測度として平均の uncertainty exponent を導入する. ダイスロールの実験者がベイスン全体の鳥瞰図を持っていないと仮定する. ある非一様な床を i でラベルづけし, N 個の床に対する ε -uncertain な初期値の割合 $g^{(i)}(\varepsilon)$ のアン

²床を任意に設計してよい場合は非自励力学系となるが, ここでは可能な床全体がある分布にしたがう, としてランダム力学系でモデル化する.

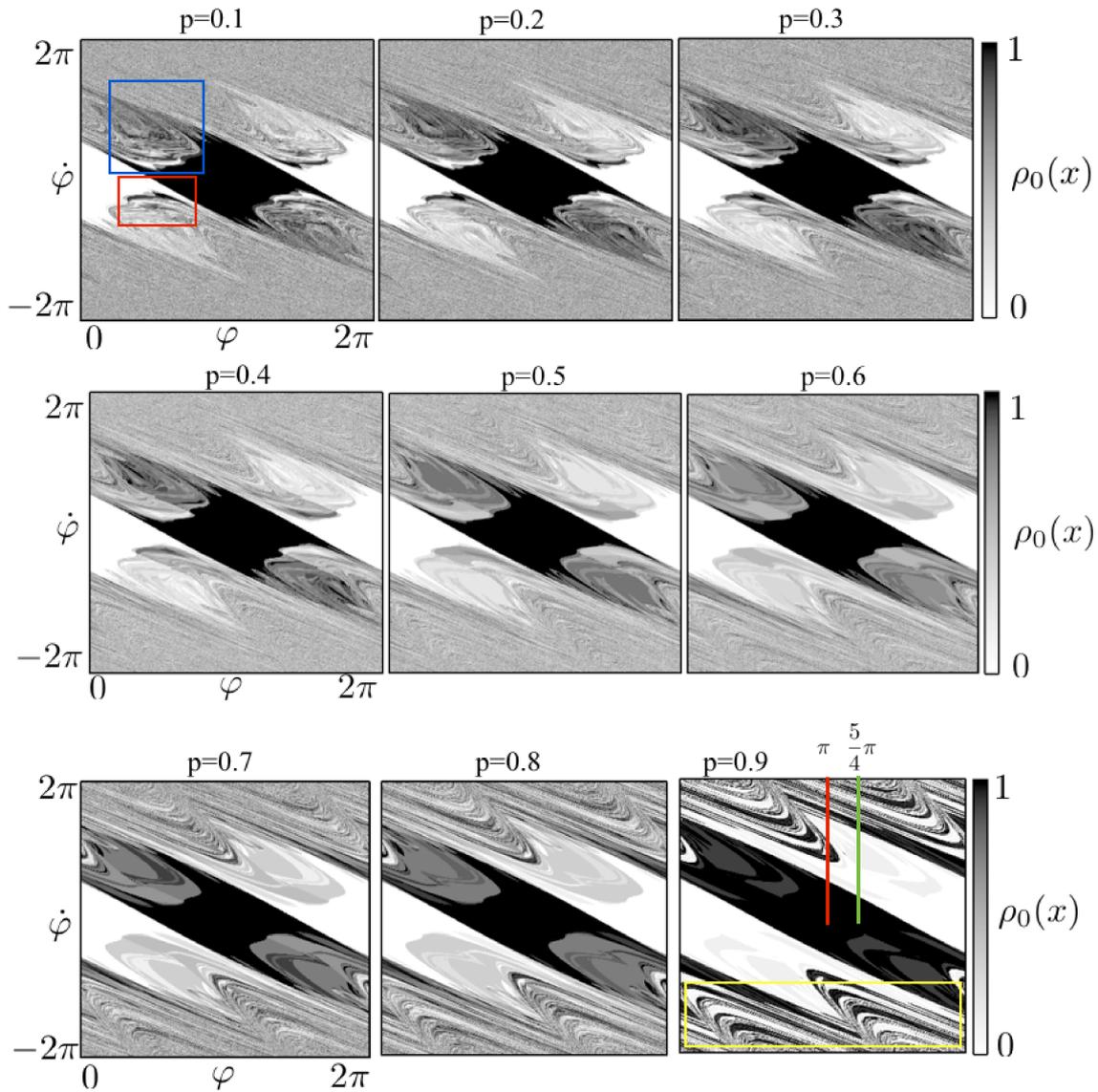


図 4: 非一様な床のダイスロールのベイシン構造 ($p = 0.1, \dots, 0.9$). ランダムに生成した床のアンサンブルは 20. p の値が 0.1 から 0.3 の間では, 空間全体におけるベイシン構造に大きな変化は見られないが, 図の赤枠内に見える certain set が $p = 0.1$ から $p = 0.3$ になるにつれ, 黒から灰色に徐々に近づいているのが確認できる. p の値が 0.7 を超えるとベイシンの構造が大きく変化する.

サンプルに対する平均 $\langle g(\varepsilon) \rangle$ を

$$\langle g(\varepsilon) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g^{(i)}(\varepsilon) \quad (15)$$

であたえる. また $\langle \alpha \rangle$ を同様に uncertainty exponent の平均値とし,

$$\langle \alpha \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha^{(i)}, \quad g^{(i)} \sim \varepsilon^{\alpha^{(i)}} \quad (16)$$

であたえる. Box-counting 次元の床アンサンブルに対する平均を $\langle D_0 \rangle$ とすると, $\langle \alpha \rangle$ との関係は以下で与えられる.

$$\varepsilon^{\langle \alpha \rangle} = 2 - \langle D_0 \rangle \quad (17)$$

平均の Uncertainty exponent $\langle \alpha \rangle$ が大きいほど現象の予測可能性が高い, とひとまず解釈しよう. 図5では比較のために一様な床の減衰 f と, 非一様な床の effective な減衰 $\bar{f} = (1-p)f_1 + pf_2$ を横軸, α と $\langle \alpha \rangle$ を縦軸にとって, 一様な床の結果と非一様な床の結果を同時表示する. 以下では, 床のアンサンブルを $i = 0, 1, \dots, 20$, $p = 0.1, \dots, 0.9$ とし, モンテカルロ法を用いて, ランダムに選んだ 10^4 の初期値を用いて数値計算を行った.

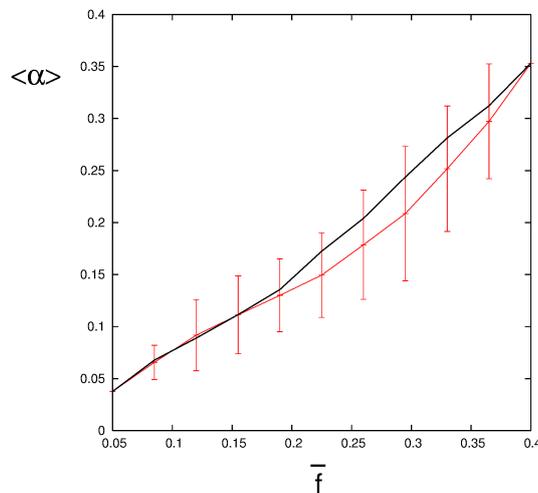


図5: 一様な床 (黒線) と非一様な床 (赤線) の uncertainty exponent $\langle \alpha \rangle$ エラーバーは $\{\alpha^{(i)}\}$ の分散.

図5より非一様な床の予測可能性 $\langle \alpha \rangle$ は床の effective な減衰 \bar{f} を導入することにより非常に良く近似できることがわかる. これはダイス投げがロバストな古典力学

的疑似乱数生成系になっていることを示唆する. また $p = 0.7$ の付近で uncertainty exponent $\{\alpha^{(i)}\}$ の分散が最も大きい. 一般に床 i の選び方によっては一様な床よりも非一様な床のダイス投げの方が, uncertainty exponent $\alpha^{(i)}$ が大きくなることもある. これはダイス投げにおける, イレギュラーや上ぶれの出現頻度に対応するとも考えられる. 例えば $p = 0.7$ のとき, ある特別な床が存在し, その床でのベインシンは図 6(左) であたえられる. このような場合, ランダムな床上でのダイス投げは一様な床上でのダイス投げより「ランダム性」が減少する. ダイス投げのランダム性は系の対称性に依拠しているため, この結果は自然である. この現象を多アトラクタ系の最終状態鋭敏性の文脈での雑音誘起秩序 (Noise-induced order) として分析することも可能かもしれない.

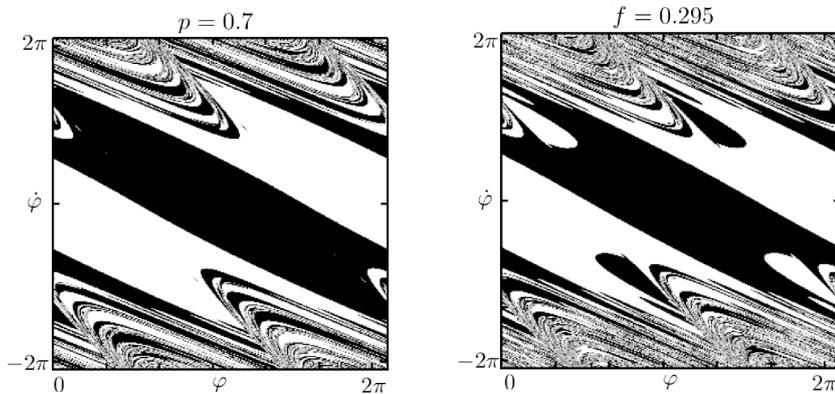


図 6: (左) $p = 0.7$ の時に 20 床中最も uncertainty exponent $\langle \alpha \rangle$ が高かった時のベインシ. (右) $p = 0.7$ に対応する $f = 0.295$ の一様な床のベインシ. 図左のベインシは一様な床の $f = 0.4$ と非常に良く似ている. これは床の系列の最初の数回に f_2 が連続して選ばれるために, その数回でダイスのエネルギーがほとんど失われて, 早々に最終状態の決定に至るからである.

4 まとめ

本稿では非一様な床上でのダイス投げをランダム力学系でモデル化し, ランダムフラクタルベインシを解析した. 一般にランダム力学系に現れるランダムストレンジアトラクタ [4, 5, 6] やランダムフラクタルベインシの物理的な特徴について

は不明なことが多く、具体的なモデルに基づく現象論的解析はランダム非線形現象の理解にとって非常に重要であると考えられる。

現状では、ランダム力学系理論は力学系理論とエルゴード理論の形式的な拡張と体系構築に終始し、諸分野への応用研究例がほとんどないため、数理科学としての迫力に欠ける理論にとどまっている。力学系理論の非線形現象への具体的な応用が、力学系理論自体の数学的発展に貢献したように、本稿で考察したような現象論的考察が、ランダム力学系理論への有意義なフィードバックを起こすことを期待したい。

参考文献

- [1] J. Strzalko, J. Grabski, P. Perlikowski, A. Stefanski, T. Kapitaniak, “Dynamics of Gambling: Origins of Randomness in Mechanical Systems,” Springer-Verlag, (2010).
- [2] J. Aguirre, R.L. Viana, M.A.F. Sanjuan, “Fractal structures in nonlinear dynamics,” *Reviews of Modern Physics*, **81:1**, p333,(2009).
- [3] J. Nagler, and P. Richter, “How random is dice tossing?,” *Phys. Rev.*, **E 78**, 036207, (2008).
- [4] D. Ruelle, “Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors,” *Communications of Mathematical Physics*, **82**, p137-151, (1981).
- [5] K. Lin and L.-S. Young, “Shear-induced chaos,” *Nonlinearity*, **21**, p899-922, (2008).
- [6] M. D. Chekroun, E. Simonnet, and M. Ghil, “Stochastic climate dynamics: Random attractors and time-dependent invariant measures,” *Physica*, **D 240**, p1685-1700, (2011).
- [7] 松永伸夫, 「ダイスロールの再現性」, 北海道大学修士論文, (2014).