

ランダム複素力学系におけるランダム性誘起現象

角 大輝 (Sumi, Hiroki)

大阪大学・大学院理学研究科・数学専攻

E-mail: sumi@math.sci.osaka-u.ac.jp

http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~sumi/

2014 年 7 月 22 日

1 導入と動機

ここでは、ランダム複素力学系 (リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ 上の多項式写像や有理写像らによるランダム力学系) を考える。

ランダム複素力学系を考える動機:

- 力学系理論を研究する一つの動機は自然界を記述すること。
- 自然界ではランダム項が多くある。
- 力学系のうち、ポピュラーで大事なものの一つが \mathbb{R} 上の多項式力学系である。多項式力学系では、 \mathbb{R} 上の初期値のみならず、 \mathbb{C} 上の初期値も考えると理解が深まり、かつ理論も深くなる。(これが複素力学系の動機の一つ。)

以上のアイデアを統合して、ランダム複素力学系を考えてみることにする。

ランダム複素力学系を考える他の動機:

- 複素多項式 $f(z)$ の根を見つけるためのニュートン法。この場合は有理関数 $R(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ の $\hat{\mathbb{C}}$ 上で力学系を考えることになる。コンピュータを使う場合、エラー項を考慮し、有理関数のランダム力学系を考えることに意味があると思われる。
- 複素多様体上の正則自己同型群の作用 (代数幾何学、低次元トポロジー、パンルヴェ方程式など)。

2 従来の複素力学系のおさらい

ランダム複素力学系に入る前に、次数 2 以上の有理関数 f の反復合成による従来の複素力学系の結果をみておく。 $J(f)$ を、 $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ の力学系に関する、初期値鋭敏性を持つ初期値の集合とする。 $J(f)$ を f のジュリア集合 という。正確に述べると、まず、

$$F(f) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid z \text{ のある近傍 } U \text{ が存在して写像列 } \{f^n : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{n=1}^{\infty} \text{ が } U \text{ 上で同程度連続}\}$$

とおく。ここで、 U から $\hat{\mathbb{C}}$ への写像族 $\{g_\lambda : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{\lambda \in \Lambda}$ が U 上で同程度連続とは、

- 任意の $x \in U$ と任意の $\epsilon > 0$ に対し、ある $\delta > 0$ が存在して、 $y \in U$ かつ $d(y, x) < \delta$ なる任意の y と任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $d(g_\lambda(y), g_\lambda(x)) < \epsilon$ となる

ときをいう。 $F(f)$ を f のファトウ集合という。そして、

$$J(f) := \hat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$$

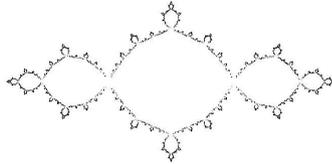
とおいて、これを f のジュリア集合というのである。

次の事実が知られている。

定理 2.1 ([M]). f を次数 2 以上の有理関数とする。このとき $J(f)$ は $\hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト部分集合で、 $J(f)$ は非可算個の点を含む。さらに、 $f(J(f)) = f^{-1}(J(f)) = J(f)$ で、 $f: J(f) \rightarrow J(f)$ は Devaney の意味でカオス的。つまり、

- (a) 初期値鋭敏性を持つ初期値が $J(f)$ に稠密にあり、
- (b) $J(f)$ に稠密な軌道が存在し、
- (c) 周期点が $J(f)$ に稠密に存在する。

図 1 $f(z) = z^2 - 1$ のジュリア集合



定理 2.2. (Mañé,[Ma]) $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ を次数 2 以上の有理関数とする。このとき、

$$\dim_H(\{z \in J(f) \mid \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|Df^n(z)\| > 0\}) > 0$$

である。ただしここで、 \dim_H は球面距離に関するハウスドルフ次元を表し、有理関数 $g: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ と $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し $Dg(z)$ で g の z における複素微分写像 $T_z \hat{\mathbb{C}} \rightarrow T_{g(z)} \hat{\mathbb{C}}$ ($T_z \hat{\mathbb{C}}$ は $\hat{\mathbb{C}}$ の z における複素接ベクトル空間) を表し、 $\|Df^n(z)\|$ は f^n の z における複素微分写像の球面距離に関するノルムを表す。(正則写像の微分の取り扱いに不慣れな方のために注意すると、一般に、有理関数 $g: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ と $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対して、 $\|Dg(z)\|$ とは、

- g を $S^2 \rightarrow S^2$ の C^1 級写像と思い、 g の、 z での実微分写像 (S^2 の z での実接ベクトル空間 $T_{z, \mathbb{R}} S^2$ から $T_{g(z), \mathbb{R}} S^2$ への線形写像) の、 S^2 の「球面計量」と呼ばれるあるリーマン計量に関するノルム

と同じになる。) 定理の主張から特に、リアプノフ指数が正となる初期値 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ は、非可算個ある。

また、 f が次数 2 以上の多項式で、そのジュリア集合が連結な場合 (これは f の \mathbb{C} 上での臨界値の軌道が \mathbb{C} において有界であることと同値) には、リアプノフ指数が正となる初期値の集合のハウスドルフ次元は 1 以上であるし、 f がその条件に加えてさらに「双曲的」(つまりある定数 $C > 0, \lambda > 1$ が存在して任意の $n \in \mathbb{N}, z \in J(f)$ に対して $\|Df^n(z)\| \geq C\lambda^n$) であれば、ごく少数の例外の f をのぞきリアプノフ指数が正となる初期値の集合のハウスドルフ次元は、1 より真に大きいこともわかっている (たとえば図 1 の f の場合にそうなる)。

3 ランダム複素力学系

2 次以上の多項式全体を \mathcal{P} とおく。 \mathcal{P} 上の距離 η を $\eta(f, g) := \sup_{z \in \hat{\mathbb{C}}} d(f(z), g(z))$ で決める。ただし d は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の球面距離。 $\mathcal{P}_n := \{f \in \mathcal{P} \mid \deg(f) = n\}$ ($n \geq 2$) とおく。各 \mathcal{P}_n は \mathcal{P} の開かつ閉部分集合で、 \mathcal{P} の連結成分となり、また $\mathcal{P}_n \cong (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^n$ (位相同型、係数によるパラメータづけ) となることに注意。よって \mathcal{P} を、局所的には有限次元となっている複素多様体として扱う。

いま、 \mathcal{P} 上のボレル確率測度 τ を一つとり、毎回確率 τ に応じて写像 $h \in \mathcal{P}$ を選択して $\hat{\mathbb{C}}$ 上の点を動かす $\hat{\mathbb{C}}$ 上の独立同分布ランダム力学系を考える。これは、 $\hat{\mathbb{C}}$ を状態空間とするマルコフ過程で、毎回の「点 $x \in \hat{\mathbb{C}}$ から集合 $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ への遷移確率 $p(x, A)$ 」が $p(x, A) = \tau(\{h \in \mathcal{P} \mid h(x) \in A\})$ となっているようなものを定める。

いまから、従来の複素力学系では起こりえない、ランダム複素力学系特有の現象をいくつかみていく。

なおこの講演では、従来の力学系では起こりえない、ランダム力学系特有の現象を、ランダム性誘起現象 (randomness-induced phenomena) と呼ぶことにする。(雑音誘起現象という言葉だと、一つの決定論的写像の小さい摂動のみを考える印象を与えるので、使わない。)

前節でみたように、次数 2 以上の有理関数 f の力学系では、必ず (ハウスドルフ次元が正の) カオス的部分がある。実は、次数 2 以上の有理関数の列 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ で、 $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ が有理関数全体の空間で相対コンパクトならば、 γ が誘導する写像列 $\{\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1\}_{n=1}^\infty$ の「ジュリア集合」(ある意味での「カオス的部分」) は空でないことが知られている。つまり、ランダム複素力学系においても、一つのサンプルパス (写像列) を固定すれば、そのサンプルパス (写像列) についてのカオス性は必ず現れる。しかし、

(*) 初期値 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ を固定したのちに、ほとんどすべての写像列らを見渡せば、上記とは全く違う景色が見えてくる。

本稿では、上の視点 (*) でランダム力学系と従来の力学系を対比し、ランダム複素力学系と従来の複素力学系の違う部分をクローズアップしようとするものである。(もちろん、サンプルパスごとのカオス性を議論する研究は大いにあり、それも面白いので、本稿の著者は、サンプルパスごとの研究と、上の (*) の視点での研究と両方をすべきである、と主張しているのみです。)

実際、次がわかる。以下では、距離空間 X 上のボレル確率測度全体を $\mathfrak{M}_1(X)$ とおき、 X 上のボレル確率測度で台がコンパクトなもの全体を $\mathfrak{M}_{1,c}(X)$ とおく。

主定理 3.1 ([Su1, Su2]). (ほとんどのランダム多項式力学系では高々可算個の点を除きカオス的部分がない) Y を \mathcal{P} の「良い」複素部分多様体とする (「良い」の定義は述べないが、定理の後で「良い」複素部分多様体の例をいくつか挙げる)。このとき、ほとんどの $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ について、 τ の定める $\hat{\mathbb{C}}$ 上のランダム力学系では、次の (1)(2) が起こる。

- (1) 高々可算個の点以外の全ての初期点 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ について、 $(\otimes_{n=1}^\infty \tau)$ に関して) ほとんど全ての多項式列に対する z でのリアプノフ指数は負。
- (2) 任意の初期点 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、システムの推移作用素 M_τ の随伴写像 $M_\tau^* : \mathfrak{M}_1(\hat{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathfrak{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ の反復合成による δ_z の軌道は M_τ^* で周期的な $\hat{\mathbb{C}}$ 上の確率測度のサイクルに近づく。つまり、システムの作用による $\hat{\mathbb{C}}$ 上の任意の確率測度の $\mathfrak{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ における軌道はシステムの作用に関して周期的な確率測度に近づく。

(主定理の言葉遣いの厳密な定義 (I)(II)(III)(IV))

(I) 主定理の「良い複素部分多様体 Y 」の定義と例：定義を後回しにして、まず、「良い複素部分多様体 Y の例」を挙げる。

- (a) $Y = \mathcal{P}$.
 (b) $Y = \{z^2 + c \mid c \in \mathbb{C}\}$.
 (c) $Y = \{az(1-z) \mid a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.
 (d) $f \in \mathcal{P}$ とし、 $f(z_0) = 0$ ならば $f'(z_0) \neq 0$ とする。
 このとき、 $Y = \{z + af(z) \in \mathcal{P} \mid a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$.

なお、上の (a)(b) の場合では、主定理の (1) の主張の「高々可算個の点以外の」を除ける。

それでは、「良い複素部分多様体」の正確な定義を与える。まず、 \mathcal{P} の閉部分集合 Y が「 \mathcal{P} の良い複素部分多様体」とは、 $Y = \mathcal{P}$ であるか、または、以下の条件 (N1)(N2)(N3) がすべて成り立つ時をいう。

(N1) Y は \mathcal{P} の連結複素閉部分多様体で、1 点集合ではない。

(N2)

$$S_0(Y) := \{z \in \mathbb{C} \mid f \mapsto f(z) \text{ は } Y \text{ 上で定数関数である}\}$$

とおき、

$$S(Y) := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcap_{(f_1, \dots, f_n) \in Y^n} (f_1 \circ \dots \circ f_n)^{-1}(S_0(Y))$$

とおくとき (注意: $S(Y)$ は (i) より有限集合になる)、任意の $z \in S(Y)$ に対して、 Y 上の関数

$$g \mapsto g'(z) \in \mathbb{C}$$

(ここで $g'(z)$ は g の z における通常の複素微分係数を表す) が Y 上非定数か、あるいは恒等的に 0 となる。

(N3) Y は「退化族」ではない。ここで、(N1)(N2) を満たす Y が退化族であるとは、次のときをいう。

- * $S(Y)$ のある空でない部分集合 L が存在して、任意の $f \in Y$ に対して $f(L) \subset L$ であり、かつ、任意の $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ と任意の $z \in L$ に対し、 $(\otimes_{n=1}^{\infty} \tau)$ についてほとんどすべての $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in Y^{\mathbb{N}}$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D(\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1)(z)\| = 0$$

となる。

(II) 主定理の、「ほとんどの $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ について」という言葉を数学的に厳密にいうと、まず、 $\mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ の位相 \mathcal{O} を、 $\mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ の点列 $\{\mu_n\}$ と $\mu \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ について、「 $\mu_n \rightarrow \mu (n \rightarrow \infty)$ 」となることと、次の 2 つの条件が同時に成り立つことが同値になるようなものとする。

- 任意の有界連続関数 $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $\int \varphi(x) d\mu_n(x) \rightarrow \int \varphi(x) d\mu(x) (n \rightarrow \infty)$.
- Y の空でないコンパクト集合全体のハウスドルフ距離について、 $\text{supp} \mu_n \rightarrow \text{supp} \mu (n \rightarrow \infty)$.

上記のもと、定理の主張の「ほとんどの $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ についての $\hat{\mathbb{C}}$ 上のランダム力学系で \dots 」とは、 $\mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ の、上の位相 \mathcal{O} についてのある稠密開部分集合 A が存在して、任意の $\tau \in A$ に対し、 τ が定めるランダム力学系で定理の (1)(2) が起こる、という意味である。

(III) 主定理の (2) の文章を正確に述べると、以下である。

ある定数 $C_\tau < 0$ と \hat{C} のある部分集合 B_τ で $\hat{C} \setminus B_\tau$ が高々可算であるものが存在して (C_τ, B_τ は τ に依存)、任意の $z \in B_\tau$ に対し、次が成り立つ。

- $Y^{\mathbb{N}}$ のある部分集合 $D_{\tau,z}$ で $(\otimes_{n=1}^{\infty} \tau)(D_{\tau,z}) = 1$ なるものが存在して、任意の $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in D_{\tau,z}$ に対して、多項式列 γ の z でのリアプノフ指数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D(\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1)(z)\|$$

が存在して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|D(\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1)(z)\| \leq C_\tau < 0$$

となる。

(IV) 主定理の、「 $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ の定めるランダム力学系の推移作用素 M_τ とその随伴写像 M_τ^* 」について正確な定義を与えておく。まず、リーマン球面上の複素数値連続関数全体を $C(\hat{C})$ とかき、*sup norm* $\|\varphi\| = \sup_{z \in \hat{C}} |\varphi(z)|$ を考えることによって $C(\hat{C})$ をバナッハ空間と思う。そして、 τ の定めるランダム力学系の推移作用素 $M_\tau : C(\hat{C}) \rightarrow C(\hat{C})$ を、

$$M_\tau(\varphi)(z) = \int_Y \varphi(h(z)) d\tau(h), \text{ ただし } \varphi \in C(\hat{C}), z \in \hat{C}$$

で定める。そして、 M_τ の随伴写像 $M_\tau^* : \mathfrak{M}_1(\hat{C}) \rightarrow \mathfrak{M}_1(\hat{C})$ を、

$$M_\tau^*(\mu) = \int (\mu \circ h^{-1}) d\tau(h), \text{ ただし } \mu \in \mathfrak{M}_1(\hat{C})$$

で定める。ここで $\mu \circ h^{-1}$ とは、 $A \mapsto \mu(h^{-1}(A))$ で定める \hat{C} 上の確率測度のことである。

なお主定理の (1)(2) は、いずれも従来の複素力学系では決して起こりえない。(ランダム性誘起現象。)

主定理の注意 1:

- 従来の複素力学系ではカオス的な部分のハウスドルフ次元が必ず正だが、主定理とその適用例はほとんどのランダム多項式複素力学系においてカオス的な部分が (高々可算個の点の集合を除き) ないということを主張している。(ランダム性誘起現象。)
- もしカオスが消滅しても、極限状態では複数個のアトラクタが存在しうるので、「安定だが多様性を失わない」システムを記述しうる。

この場合、本当に複雑性は何もないのか？ いや、違う！！ (あとで説明。)

主定理の証明の概要:

補題 3.2. Y を \mathcal{P} の「良い」複素部分多様体とする。このとき、ほとんどの $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ についての $\hat{\mathbb{C}}$ 上のランダム力学系では、次の (i)(ii)(iii)(iv) が起こる。

(i) $\text{supp } \tau$ の有限個の元の合成全体を G_τ とおく。すなわち、

$$G_\tau = \{f_1 \circ \cdots \circ f_n \mid n \in \mathbb{N}, f_j \in \text{supp } \tau \ (j = 1, \dots, n)\}$$

とおく。この G_τ は写像の合成を積とする半群であることに注意。このとき、 G_τ の極小集合は、有限個のみ存在する。(1個は必ずある。) ここで、 $\hat{\mathbb{C}}$ の空でない部分集合 L が G_τ の極小集合であるとは、「 L は $\hat{\mathbb{C}}$ のコンパクト部分集合で、任意の $z \in L$ に対し

$$\overline{\bigcup_{g \in G_\tau} \{g(z)\}} = L$$

となる」ときをいう。

(ii) G_τ の $\hat{\mathbb{C}}$ 上の作用に関して、鋭敏でない穏やかな初期値の集合を $F(G_\tau)$ とかく。すなわち、

$$F(G_\tau) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid z \text{ のある近傍 } U \text{ が存在して写像族 } \{g : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{g \in G_\tau} \text{ は } U \text{ 上で同程度連続}\}$$

とおく。これを G_τ のファトウ集合という。

このとき、 G_τ の極小集合 L で $F(G_\tau)$ と交わるものは、吸引的 (L のある近傍でリアプノフ指数が負)。

(iii) G_τ の任意の極小集合 L で $F(G_\tau)$ と交わらないものについて、 L は $\hat{\mathbb{C}}$ の有限個の点よりなる集合である。また、

$$J(G_\tau) := \hat{\mathbb{C}} \setminus F(G_\tau)$$

とおき (これを G_τ のジュリア集合という)、かつ

$$J_{\text{ker}}(G_\tau) := \bigcap_{g \in G_\tau} g^{-1}(J(G_\tau))$$

とおく (これを G_τ の核ジュリア集合という) と、 G_τ の任意の極小集合 L で $F(G_\tau)$ と交わらないものについて、

$$L \subset J_{\text{ker}}(G_\tau)$$

となる。(注意: 実は、主定理の仮定のもと、ほとんどの $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ について、 $J_{\text{ker}}(G_\tau)$ が高々有限個の点からなる集合となることが示せて、そのことから、上が従う。なお、 Y がさらに良い条件 (たとえば $Y = \mathcal{P}$ など) を満たせばほとんどの $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ について

$$J_{\text{ker}}(G_\tau) = \emptyset$$

となって、この補題 (よって主定理) の証明を完成させるのは、もう少し楽になる (その場合は [Su1, Su2] で扱われている)。しかし、一般には $J_{\text{ker}}(G_\tau)$ は空でなく、そのことが、解析を難しくさせている。いずれにしても、核ジュリア集合

$$J_{\text{ker}}(G_\tau)$$

に着目することが、ポイントである。さらにいうと、主定理の仮定のもと、 $\text{int}(\text{supp } \tau)$ が空でないならば、

$$J_{\text{ker}}(G_\tau) \subset S(Y)$$

なので、もし

$$S(Y) = \emptyset$$

ならば (たとえば $Y = P$ のとき)、ほとんどの $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ について、 $J_{\ker}(G_\tau) = \emptyset$ となることが示せるので、上に述べたように、少しだけ証明が楽になる。しかし、主定理の仮定のもと、一般には、 $S(Y)$ は空でなく、このことがやはり主定理の証明の難しいところである。)

- (iv) 任意の初期点 $z \in \hat{C}$ について、ほとんど全ての多項式列についての軌道は G_τ の極限集合の和集合 (コンパクト集合) に近づく。

主定理の注意 1 (再掲) :

- 従来の複素力学系ではカオス的な部分のハウスドルフ次元が必ず正だが、主定理はほとんどのランダム多項式複素力学系においてカオス的な部分が (高々可算個の点のところを除いて) ない
ということを主張している。(ランダム性誘起現象。)
- もしカオスが消滅しても、極限状態では複数個のアトラクタが存在しうるので、「安定だが多様性を失わない」システムを記述しうる。

この場合、本当に複雑性は何もないのか? いや、違う!! (あとで説明。)

主定理の注意 2: \hat{C} 上の複素数値連続関数全体を $C(\hat{C})$ とおく。(sup ノルムをいれる。)

$\tau \in \mathfrak{M}_1(P)$ についてのランダム力学系について、その推移作用素 $M_\tau : C(\hat{C}) \rightarrow C(\hat{C})$ とは、

$$M_\tau(\varphi)(z) = \int_P \varphi(h(z)) d\tau(h) \quad (\text{ただし } \varphi \in C(\hat{C}), z \in \hat{C})$$

で決められる作用素のことである。

一つの $\varphi \in C(\hat{C})$ と一つの単調増大列 $\{n_j\} \subset \mathbb{N}$ に対し、 $\psi = \lim_{j \rightarrow \infty} M_\tau^{n_j}(\varphi)$ が存在するとき、それを一つの

極限状態関数 (limit state function)

という。

ある状況下では極限状態関数 $\psi : \hat{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は、次を満たす。

- $\psi : \hat{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は \hat{C} 上連続だが、
- ψ は \hat{C} の 細いフラクタル集合の上のみで変化する。

そのような $\psi : \hat{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は「 \mathbb{R} 上の特異関数」(悪魔の階段など) の複素平面上版と考えられる。

この場合、 $\psi : \hat{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は C^1 級でない。

以下で、例を挙げて上記のことを説明する。

例 3.3 ([Su1]). (悪魔の階段、ルベークの特異関数、およびそれらの複素平面上版) まず、悪魔の階段の説明から入る。これは実直線 (または実直線に $\pm\infty$ を付加したコンパクト距離空間 $\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \cong [0, 1]$ 上のランダム力学系の話である。 \mathbb{R} 上の関数 $g_1(x) = 3x$ と $g_2(x) = 3x - 2$ をとり、初期値 $x_0 \in \mathbb{R}$ をとったあと、毎回、確率 $1/2$ ずつで g_1 または g_2 を選択して点を動かしていくような \mathbb{R} 上の (独立同分布) ランダム力学系を考える。そして「初期値 $x \in \mathbb{R}$ から出発して可算無限回点を動かす試行をする (サイコロをふって偶数の目がでたら g_1 、奇数の目が出たら g_2 を選択して点を動かすと決めておいて、これを可算無限回行う) ときの、 n 回後の点 x_n が $+\infty \in \hat{\mathbb{R}}$ に収束する確率」を $D_{+\infty}(x)$ とおく。この関数 $D_{+\infty} : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 1]$ (またはそれを $[0, 1]$ に制限したもの) を悪魔の階段と呼ぶ。悪魔の階段 $D_{+\infty}$ は、境界条件付き関数方程式

$$\frac{1}{2}D_{+\infty}(g_1(x)) + \frac{1}{2}D_{+\infty}(g_2(x)) = D_{+\infty}(x), \quad D_{+\infty}|_{[-\infty, 0)} = 0, \quad D_{+\infty}|_{(1, +\infty]} = 1$$

を満たし、さらに

- $D_{+\infty} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ は連続で、
- $D_{+\infty}$ は「カントールの三進集合」と呼ばれる細いフラクタル集合の上のみで変化し (正確には、 $D_{+\infty}$ の変化点の集合、つまり $D_{+\infty}$ が局所定数にならない点の集合がカントールの三進集合と一致する)、
- 単調性を持つ (この場合、正確には、 $a \leq b$ ならば $D_{+\infty}(a) \leq D_{+\infty}(b)$ となる)。

今度は、 \mathbb{R} 上で $h_1(x) = 2x$, $h_2(x) = 2x - 1$ とおき、 $0 < p < 1$ とし、初期値 $x_0 \in \mathbb{R}$ をとったあと、毎回、確率 p で h_1 を選択し、確率 $1 - p$ で h_2 を選択して点を動かしていくような、 \mathbb{R} 上 (正確には $\hat{\mathbb{R}}$ 上) のランダム力学系を考える。悪魔の階段と同じように、「初期値 $x \in \mathbb{R}$ から出発して可算無限回点を動かす試行をするときの、 n 回後の点 x_n が $+\infty \in \hat{\mathbb{R}}$ に収束する確率」を $L_p(x)$ とおく。 $p \in (0, 1)$, $p \neq \frac{1}{2}$ のとき、この関数 $L_p : \hat{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 1]$ (またはそれを $[0, 1]$ に制限したもの) をパラメータ p に対するルベークの特異関数と呼ぶ。ルベークの特異関数 L_p は、境界条件付き関数方程式

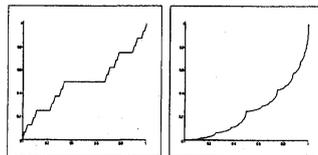
$$pL_p(h_1(x)) + (1 - p)L_p(h_2(x)) = L_p(x), \quad L_p|_{[-\infty, 0)} = 0, \quad L_p|_{(1, +\infty]} = 1$$

を満たし、さらに

- $L_p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ は連続で、
- L_p の変化点の集合は $[0, 1]$ と一致し、
- L_p は $[0, 1]$ のルベーク測度に関してほとんどすべての点で微分が出来てその微係数は 0 で、
- $[0, 1]$ 上で狭義単調性を持つ ($a, b \in [0, 1]$, $a < b$ ならば $L_p(a) < L_p(b)$ となる)

という特異性を持つ。(悪魔の階段やルベークの特異関数についての通常の定義は [YHK] などにある。[YHK] などの本での悪魔の階段とルベークの特異関数の定義は、上記のものとは見かけ上は異なるが、上のように、ランダム力学系を用いて再解釈することが可能である。(この解釈自体が本稿の著者による独自のものである。))

図 2 (左から右へ) 悪魔の階段とルベークの特異関数のグラフ。



さて、上記のこの複素平面上版を考える。まず、 $z \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し $\alpha_1(z) = z^2 - 1$, $\alpha_2(z) = \frac{z^2}{4}$ とおき、 $f_1 = \alpha_1 \circ \alpha_1$, $f_2 = \alpha_2 \circ \alpha_2$ とおく。そして、初期値 $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ をとったあと、毎回、確率 $1/2$ ずつで f_1 または f_2 を選択して点を動かしていくような、 $\hat{\mathbb{C}}$ 上のランダム力学系を考える。初期値 $z_0 \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、「可算無限回点を動かす試行をするとき、 n 回後の点 z_n が $\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ に $n \rightarrow \infty$ のもとで収束する確率、すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ となる確率」を $T_\infty(z_0)$ と書くとき、関数 $T_\infty : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow [0, 1]$ は、次を満たす。

- $T_\infty : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow [0, 1]$ は連続。
- T_∞ は境界条件付き関数方程式

$$\frac{1}{2}T_\infty(f_1(z)) + \frac{1}{2}T_\infty(f_2(z)) = T_\infty(z), \quad T_\infty \text{ は原点中心のある円板で } 0, \infty \in \hat{\mathbb{C}} \text{ のまわりで } 1$$

を満たす (注意; これは、 T_∞ がいま考えているランダム力学系の推移作用素 M で不変である境界条件を満たす、ということと同値)。

- ∞ の小さい近傍で 1, 0 の小さい近傍で 0 となっているような連続関数 $\varphi : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ を持ってくると、 $T_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n(\varphi)$ (in $C(\hat{\mathbb{C}})$) となる。つまり、 T_∞ は考えているランダム力学系の極限状態関数の一つである。
- T_∞ の変化点の集合は、多項式半群

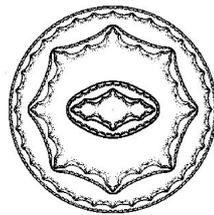
$$G = \langle f_1, f_2 \rangle = \{f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_n} \mid n \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_n \in \{1, 2\}\}$$

のジュリア集合 $J(G)$ と一致し、かつ $J(G)$ のハウスドルフ次元は 2 未満 (よって特に 2 次元面積は 0) で、 $J(G)$ は「細い」フラクタル集合である。

- $T_\infty : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow [0, 1]$ はある種の「単調性」を持つ。

上のような関数 T_∞ は悪魔の階段やルベグの特異関数の複素平面上版と考えられ、「悪魔のコロシウム」と呼ばれる。

図3 $G = \langle f_1, f_2 \rangle$ のジュリア集合、ただし、 f_1 は $z^2 - 1$ の 2 回合成、 f_2 は $z^2/4$ の 2 回合成。 $J_{\ker}(G) = \emptyset$ かつ $\dim_H(J(G)) < 2$.



よって、 $\hat{\mathbb{C}}$ 上の C^1 級関数全体を $C^1(\hat{\mathbb{C}})$ と書くとき ($C^1(\hat{\mathbb{C}})$ に C^1 ノルムを入れてバナッハ空間と思う)、上記の例 3.3 のなかの「悪魔のコロシウム」が出てくるランダム複素力学系においては、

システムがたとえ一見カオス的でなく $C^0(\hat{\mathbb{C}})$ に穏やかに作用していても、システムは $C^1(\hat{\mathbb{C}})$ に穏やかに作用しない (システムは $C^1(\hat{\mathbb{C}})$ にカオス的に作用する) ことがある。

図4 悪魔のコロシウム $T_\infty : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow [0, 1]$ のグラフ。 T_∞ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上で連続で、 T_∞ の変化点の集合は図3の $J(G)$ と一致する。つまり、 T_∞ は $J(G)$ という非常に細かいフラクタル集合の上のみで変化する。悪魔の階段やルベークの特異関数の複素平面上版。

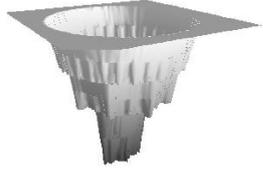
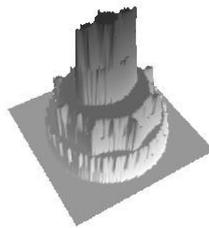


図5 図4 を上下さかさまにしたもの。 A “fractal wedding cake”.



より正確には、上の状況では、ある $\alpha_0 \in (0, 1)$ が存在して、次を満たす：

- 任意の $\alpha \in (0, \alpha_0)$ について、システムは $\hat{\mathbb{C}}$ 上の α -ヘルダー連続関数の空間 $C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$ (α -ヘルダーノルムを入れたバナッハ空間) に穏やかに作用するが、
- 任意の $\alpha \in (\alpha_0, 1)$ について、システムはバナッハ空間 $C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$ に穏やかに作用しない (またはカオス的に作用)。

よって、ランダム (複素) 力学系に関しては、

カオスと秩序の間にグラデーションのようなもの

が存在する。(上の α_0 はシステムに依存する量で、そのグラデーションの具合をはかる量。) このことに関し、 T_∞ などの極限状態関数の各点でのヘルダー指数に関するマルチフラクタル解析を [JS] で行っている。(ある点での極限状態関数のヘルダー指数が β ならば、上の α_0 は $\alpha_0 \leq \beta$ を満たすこととなる。極限状態関数の各点でのヘルダー指数は、カオスと秩序の間のグラデーション (の局所的なもの) に深く関係する量であると思われる。)

なお、例 3.3 において、悪魔の階段やルベークの特異関数が現れる $\hat{\mathbb{R}}$ 上のランダム力学系においても、上の話の $\hat{\mathbb{C}}$ を $\hat{\mathbb{R}}$ に置き換えたことが成り立っている。

また、悪魔のコロシウムは複素平面上の話であったが、上の例では実多項式の (複素平面上での) ランダム力学系であり、複素平面上の話を実軸上に制限して考えれば、2つの実多項式による \mathbb{R} 上のランダム実力学

系を考えていることになる。このようにして、もともと、実ランダム力学系の話であったものを、初期値を複素平面全体に広げて、視覚的に、かつ数学的により深くとらえることが可能になっていると考える。

4 ランダム複素力学系における他のランダム性誘起現象

まず一つの有理関数の反復による従来の複素力学系の結果をみておく。 f を次数 2 以上の有理関数とする。 f が双曲的または拡大的とは、 $f: J(f) \rightarrow J(f)$ の力学系が拡大的なとき、すなわち、「ある定数 $C > 0, \lambda > 1$ が存在して、任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $z \in J(f)$ に対し、

$$\|Df^n(z)\| \geq C\lambda^n$$

となる」ときをいう。次の定理が知られている。

定理 4.1. f が次数 2 以上の有理関数で、双曲的とする。このとき、 $\delta = \dim_H(J(f))$ とおくと、 δ -次元ハウスドルフ測度 H^δ について、

$$0 < H^\delta(J(f)) < \infty$$

となる。

双曲性の概念はランダム複素力学系でも定義がなされている ([MSU1, Su1, Su3])。双曲的ランダム多項式力学系においては、従来の複素力学系における双曲的多項式力学系では絶対に起こらない新しい現象 (ランダム性誘起現象) がサンプルパスの力学系において多数起こることが発見されてきている。それを紹介する。まず次の定義を述べる。

定義 4.2. 有理関数の列 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$ に対し、

$$F_\gamma := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid z \text{ のある近傍 } U \text{ が存在して写像列 } \{\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1 : U \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{n=1}^\infty \text{ は } U \text{ 上で同程度連続}\}$$

とおき、

$$J_\gamma := \hat{\mathbb{C}} \setminus F_\gamma$$

とおいて、有理関数列 γ のジュリア集合と呼ぶ。

最近になって、次の驚くべき結果が M. Urbański らによって示された。

定理 4.3. ([MSU1]). \mathcal{P} の元らによる大概の双曲的 *i.i.d.* ランダム多項式力学系においては、ほとんどすべての多項式列 γ について、

$$H^\delta(J_\gamma) = 0, \quad \text{ただし } \delta = \dim_H(J_\gamma)$$

となる。

また、従来の複素力学系における次の結果

定理 4.4. 次数 2 以上の有理関数 f について、 f が双曲的ならば、 $J(f)$ のハウスドルフ次元とパッキング次元は一致する。

に対して、[MSU1] の著者らによる次の結果も非常にエキサイティングである。

定理 4.5 ([MSU2]). \mathcal{P}_2 を次数 2 の多項式全体の空間とする。 $(\mathcal{P}_2)^{\mathbb{N}}$ に l^∞ 位相を入れる。すなわち、 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots) \in (\mathcal{P}_2)^{\mathbb{N}}$ と $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots) \in (\mathcal{P}_2)^{\mathbb{N}}$ に対して、 $d_\infty(\alpha, \beta) := \sup\{\eta(\alpha_j, \beta_j) \mid j \in \mathbb{N}\}$ で $(\mathcal{P}_2)^{\mathbb{N}}$ に距離 d_∞ を導入し、それによる位相を考える。このとき、 $(\mathcal{P}_2)^{\mathbb{N}}$ のある空でない開集合 Ω が存在して、任意の $\gamma \in \Omega$ に対し、 γ による写像列 $\{\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1\}_{n=1}^\infty$ は「双曲的」で、かつ、 J_γ のハウスドルフ次元とパッキング次元は異なる。

もう一つ、ランダム複素多項式力学系におけるランダム性誘起現象を紹介する。

\mathbb{C} の単純閉曲線 ρ は、 ρ の各点における「ゆがみ具合」が ρ の点の位置によらず一様に上から押さえられているときに擬円 (quasicircle) であるという。

従来の複素力学系については、J-C. Yoccoz らによる次の結果が知られている。

定理 4.6 ([CJY]). f を次数 2 以上の多項式とする。このとき、次の 2 つの状況 (a)(b) が同時に起こることはない。

- (a) $J(f)$ は単純閉曲線だが、擬円ではない。
- (b) $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$ の ∞ を含む連結成分 $A(f)$ は、ジョン領域である (つまり、おおざっぱにいうと、 $J(f)$ の各点は、 $A(f)$ から、「簡単に」到達できる)。

これに対して、本稿の著者は、次を示した。

定理 4.7 ([Su3]).

- (1) \mathcal{P} の元らによる双曲的 *i.i.d.* ランダム多項式力学系で、その臨界値軌道の閉包と \mathbb{C} との共通部分が \mathbb{C} で有界なものを 3 つのクラスに分類することができる。
- (2) その 3 つのクラスのうちの一つに属するランダム多項式力学系では、ほとんどすべての多項式列 γ について、次の (a)(b) が同時に起こる。
 - (a) $J(f)$ は単純閉曲線だが、擬円ではない。
 - (b) $\hat{\mathbb{C}} \setminus J(f)$ の ∞ を含む連結成分 $A(f)$ は、ジョン領域である。
- (3) 双曲的な $f, g \in \mathcal{P}$ で、 $J(f)$ は擬円となっており、 $J(g)$ は擬円でないものを持ってきて、 f, g をランダムに選択するランダム力学系が双曲的 *i.i.d.* ランダム多項式力学系で、その臨界値軌道の閉包と \mathbb{C} との共通部分が \mathbb{C} で有界となっておれば、そのランダム多項式力学系において、上記の (a)(b) が同時に起こる。(よってたとえば、図 3 の f_1, f_2 を f, g としてランダム力学系を作れば、この状況になる。)

上記の定理は、ランダム複素力学系におけるランダム性誘起現象である。

最後に、ランダム多項式力学系に近い、「多項式列による力学系」における、M. Comerford による注目すべき結果を挙げる。まず、従来の多項式力学系においては、「ジュリア集合上での力学系の変形」は、「ない」と予想されている。正確にいうと、「2 次以上の多項式 f について、 $J(f)$ 上の f -不変ベルトラム微分は 0 に限る」という予想である。(注意：この予想が肯定的に解かれると、「 \mathcal{P} において、双曲的なものが稠密である」という大予想が肯定的に解かれることになる。) これに対して、M. Comerford の結果は、次のものである。

定理 4.8 ([C]). ある 2 次多項式の列 $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots) \in (\mathcal{P}_2)^{\mathbb{N}}$ が存在して、 J_γ は 2 次元面積が正であり、かつ、 J_γ 上での $\{\gamma_n \circ \dots \circ \gamma_1\}_{n=1}^\infty$ の「変形」を許す。正確には、任意の n について、 $\alpha^n := (\gamma_n, \gamma_{n+1}, \dots)$ と

おくと、 J_{α^n} 上の 0 でないベルトラミ微分 μ_n が存在して、

$$(\gamma_n)^*(\mu_{n+1}) = \mu_n$$

となる。

この結果は、力学系の変形の視点においても、従来の複素力学系とランダム複素力学系がかなり異なることを示唆している可能性がある。

5 議論と今後の方向

- (1) 自然界を記述するという目的のためには従来の一つの写像の反復合成の話だけでいいのか？もしそうでないならば、どのくらいランダム力学系が必要か？なお、一つの写像の反復合成の力学系では決して現れない、ランダム力学系特有の現象（ランダム性誘起現象）が多く発見されていることに注意。ランダム性誘起現象はシステムの中の多様な写像の相互作用によって起こる。
- (2) ランダム（複素）力学系に関しては、カオスと秩序の間に一種のグラデーションがある。カオスについての新しい概念を考えなくてはならないかもしれない。例えば、次を考えるのはどうだろうか：(i) カオスと非カオスの間のグラデーションの具合を測る量（上の α_0 のようなもの）。(ii) どの関数空間にシステムは穏やかに作用し、どの関数空間にシステムは「カオス的に」作用するのか？カオス的に作用する関数空間において、一つの関数の軌道のノルムの増大度や、システムの作用素の n 回合成の作用素ノルムの増大度はどうか？
- (3) 大概のランダム複素多項式力学系においてはカオスの部分が一切消滅して極限状態への移行は指数関数的に速い。しかし、システムの作用が 1 億年後におだやかになってくるとしても、最初の 100 万年は「カオス的に」作用しているかもしれない。極限状態への収束スピードの「定数」が問題になってくる。この定数の評価が必要である。そして、有限時間の複雑性に関する新しい概念が必要である。時間の関数である、複雑性に関する新しい量が必要であろう。
例えば、ある関数空間（バナッハ空間） B にシステムの推移作用素 M の反復合成が作用する状況で、ある一つの $\varphi \in B$ に対する $M^n(\varphi)$ のノルムの大きさや、 M^n の減衰部分の作用素ノルムの大きさは時間 n の関数であるが、それでもって有限時間の複雑性を見ることはできないだろうか？
- (4) \mathbb{R} 上の実多項式ランダム力学系では、数値実験によって雑音誘起カオスが観察されている ([MT, Sa])。多項式でない関数によるランダム力学系では雑音誘起秩序が観察されている ([MT, Sa])。これらの数学的背景は何か？（30 年以上未解決。）初期値を複素数にまで拡げてランダム複素力学系によるアプローチはできないか？
- (5) サンプルパスの（写像列の）力学系でのランダム性誘起現象をもっと見つけれられないか。それらを統括的に調べることをおし進めたい。なお、ランダム複素力学系においては、さきに述べたように、サンプルパスの（写像列の）力学系でのランダム性誘起現象は多く見つかってきているが、実ランダム力学系では、今までのところ、思ったほど発見されていない（話題にのぼっていない）ように思われる。

参考文献

- [CJY] L. Carleson, P. Jones, J-C. Yoccoz, *Julia and John*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 25 (1994), no. 1, 1–30.
- [C] M. Comerford, *Non-Autonomous Julia Sets with Invariant Sequences of Measurable Line Fields*, J. Difference Equ. Appl. 19 (2013), no. 4, 585-604.
- [JS] J. Jaerisch and H. Sumi, *Hoelder regularity of limit state functions in random complex dynamical systems*, RIMS Kokyuroku of this volume.
- [MSU1] V. Mayer, B. Skorulski, M. Urbański, *Distance Expanding Random Mappings, Thermodynamical Formalism, Gibbs Measures and Fractal Geometry*, Lecture Notes in Mathematics 2036, Springer, 2011.
- [MSU2] V. Mayer, B. Skorulski, M. Urbański, *Regularity and irregularity of fiber dimension of non-autonomous dynamical systems*, Annales Academia Scientiarum Fennica Mathematica Vol. 38, 2013, 1-26
- [MT] K. Matsumoto and I. Tsuda, *Noise-induced order*, J. Statist. Phys. 31 (1983) 87-106.
- [Ma] R. Mañé, *The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps*, Dynamical systems, Valparaiso 1986, 86-117, Lecture Notes in Math., 1331, Springer, Berlin, 1988.
- [M] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable 3rd ed.*, Annals of Mathematics Studies 160, Princeton University Press, 2006.
- [Sa] Y. Sato, "Noise-induced phenomena in one-dimensional maps," RIMS Kokyuroku, No. 1688, p137-143, 2010, in Japanese.
- [Su1] H. Sumi, *Random Complex Dynamics and Semigroups of Holomorphic Maps*, Proc. London Math. Soc. (2011) 102(1), pp 50–112. (一部は本稿に関係.)
- [Su2] H. Sumi, *Cooperation Principle, Stability and Bifurcation in Random Complex Dynamics*, Adv. Math. 245 (2013), 137-181. (一部は本稿に関係.)
- [Su3] H. Sumi, *Dynamics of Postcritically Bounded Polynomial Semigroups III: classification of Semi-hyperbolic Semigroups and Random Julia Sets Which are Jordan Curves but Not Quasicircles*, Ergodic Theory Dynam. Systems, (2010), 30, No. 6, 1869–1902.
- [Su4] H. Sumi, *Rational Semigroups, Random Complex Dynamics and Singular Functions on the Complex Plane*, survey article, Selected Papers on Analysis and Differential Equations, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 230, 2010, 161–200. (日本数学会雑誌「数学」61, (2) 2009, 133-161 論説の英訳と補足.)
- [Su5] H. Sumi, *Random Complex Dynamics and Devil's Coliseum*, preprint 2011, <http://arxiv.org/abs/1104.3640>.
- [YHK] 「フラクタルの数理」岩波講座応用数学、山口昌哉、畑政義、木上淳著、岩波書店、1993.