

# 無限峰写像とランダム力学系

早稲田大学・先進理工学研究科 中川 正基\*

Masaki Nakagawa

Graduate School of Advanced Science and Engineering,  
Waseda University

## 概要

ランダム化の方法により無限峰写像の統計的側面を明らかにする。ここで言うランダム化とは、無限峰写像をランダム力学系に変換することであり、それにより統計的性質の定量的理解が可能になる。はじめに、ランダム化の方法の基本的な考え方を述べ、一様分布仮説を導入し、ランダム化を定式化する。つぎに応用として、無限峰写像において見られる顕著な性質、Ant-Lion property やオンオフ間欠性、の統計的性質を明らかにする。また、リャプノフ指数への応用も行い、無限峰写像のリャプノフ指数は常に正だが、対応するランダム化写像のリャプノフ指数は常に負になることを指摘する。最後にランダム化の方法の適用条件を一様分布論から考察する。

## 1 はじめに

近年のエルゴード理論は、様々な非双曲力学系の統計的側面を明らかにしてきた。例えば、臨界点を持つ単峰写像の絶対連続なエルゴード的確率不変測度の存在やリャプノフ指数の正值性などである [1, 2]。また、中立不動点を持つ一次元写像には規格化できない絶対連続不変測度 (無限不変測度) が現れ、観測関数の部分和が示す極限分布は Mittag-Leffler 分布であることも明らかにされている [3, 4]。

一方、無限峰写像のエルゴード論的研究は始まったばかりである [5, 6]。素朴に考えると、無限峰写像は非双曲力学系の究極の形であり、最も分析が難しいだろうと思われる。しかし、本論文で紹介する“ランダム化の方法”は、無限峰写像が数値実験において示すさまざまな現象、Ant-Lion property やオンオフ間欠性、の定量的理解を可能にする。本論文ではランダム化の方法の便利さを強調するが、この方法は数値結果を説明する実用的な方法に止まらなないと考えている。一般にランダム力学系理論 [7] は、高次元力学系の一部の変数を確率変数と見なすことによりランダム力学系を作り出す。一方、ランダム化の方法は、無限峰写像の変数の“ある組み合わせ”を確率変数と見なし、さらに数学的に非自明な「一様分布仮説」を設けることで現象を見事に説明する。この仮説の妥当性については一様分布論 [8] からの示唆はあるもののその数学的理解はこれからである。このように、ランダム化の方法は決定論と確率論の関係をめぐる深い問題に繋がっていて、その数学的理解の追求自体に大変意義がある。

本論文は以下のような構成になっている。まず第2節で本論文で扱う2つの無限峰写像、Ant-Lion (AL) map と Arneodo map、を導入する。つぎに第3節で、まずランダム化の基本的な考え方を述べ、一様分布仮説を基にランダム化を定式化する。その後、応用として、AL map の Ant-Lion property や Arneodo map のオンオフ間欠性の統計的性質を明らかにする。また、リャプノフ指数

\*早稲田大学 先進理工学部 応用物理学科 助手

〒 169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 早稲田大学 西早稲田キャンパス 相澤研究室 55N-309A

e-mail: m-nakagawa@aoni.waseda.jp



図 1: 本論文で扱うグラフ: (左) AL map;  $A = 0.9$ , (右) Arneodo map;  $(a, b) = (0.5, 10)$ .

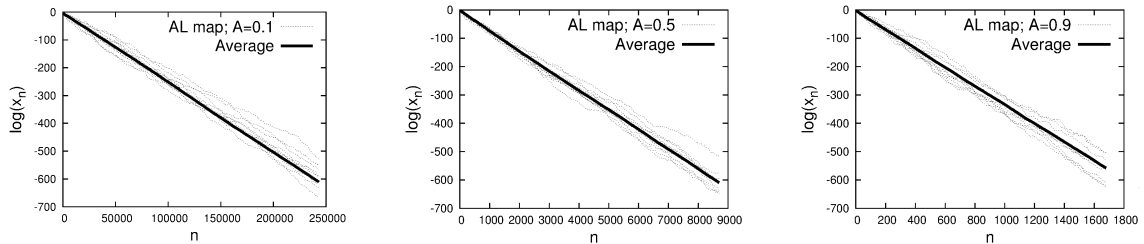


図 2: AL map の軌道; 左から  $A = 0.1, 0.5, 0.9$  の場合. 点線はランダムに選んだ 10 個の初期値に対する軌道  $\log x_n$ , 実線はランダムに選んだ 100 個の初期値に対する平均軌道  $\langle \log x_n \rangle_{x_0}$ .

のパラメーター依存性も調べ、ランダム化写像のリアプノフ指数は常に負であることも見る. 最後に第 4 節で、ランダム化公式で本質的であった一様分布仮説の成立条件を一様分布論から考察し明らかにする.

## 2 モデル

### 2.1 Ant-Lion (AL) map

Ant-Lion (AL) map は以下の式で定義される.

$$x_{n+1} = x_n + Ax_n \sin(\pi/x_n), \quad x_0 \in (0, 1), \quad (1)$$

ここで  $A \in (0, 1)$  はパラメーターである. グラフを図 1(左) に示す.

この写像は元々、近可積分ハミルトン系における KAM トーラス近傍の非常に遅い運動 (よどみ運動) をモデル化する目的で提案された [9]. 本論文では、この写像について、以下で説明する Ant-Lion (AL) property に焦点を当てる.

AL-property とは非常に奇妙な力学特性である. 図 2 に示すように、AL map の軌道はほとんどすべてが指数関数的に特異反発点  $x_* = 0$  に収束する. このような、大域的な安定性と局所的な不安定性が共存する力学特性を AL-property と呼ぶ [10]. “Ant-Lion” とは昆虫のアリジゴクのこと (軌道  $x_n$  がアリジゴクの巣に捕まったアリの軌跡 (行きつ戻りつしながら徐々に巣の中心に落ちていく様子) に似ているところから来ている. AL-property を反映して有限時間リアプノフ指数

$$\lambda_n \equiv \left\langle \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |T'(x_k)| \right\rangle_{x_0}, \quad (2)$$

は時間  $n$  に比例して増大する (図 3).

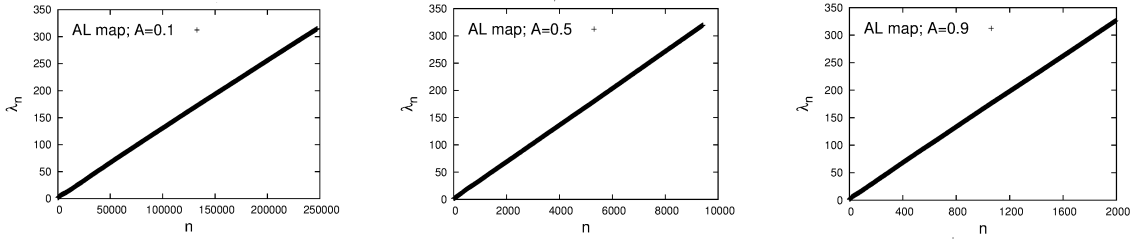


図 3: AL map の有限時間リャプノフ指数; 左から  $A = 0.1, 0.5, 0.9$  の場合.

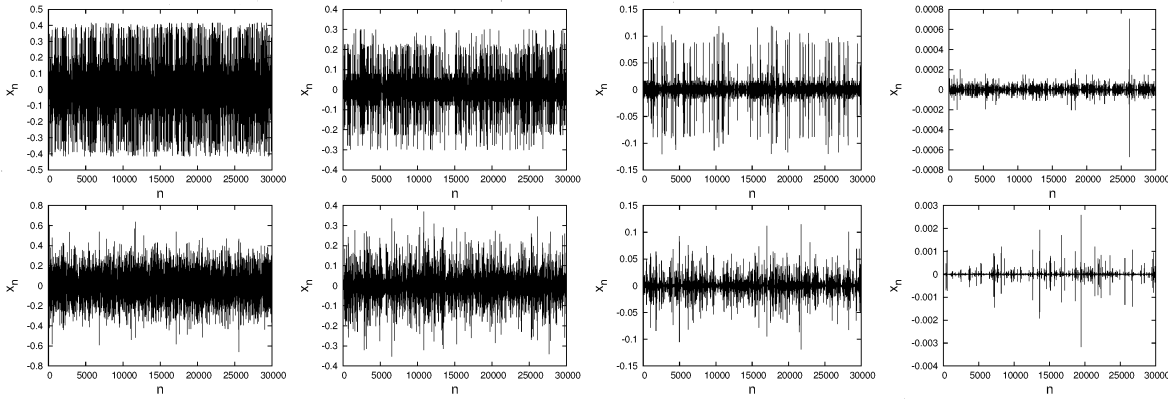


図 4: Arneodo map の軌道; (上段) すべて  $b = 10$ , (下段) すべて  $b = 100$ .  $a$  の値は上下段共通で, 左から  $a = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95$  である.

一般に, 散逸的なエルゴード変換には絶対連続な確率不変測度は存在せず, 絶対連続な“無限”不変測度が可算無限個存在することが知られている [11]. AL map も散逸エルゴード変換に属するので, エルゴード性について次のようなことが成り立つと予想される:

AL map は区間  $(0, x_{\max}(A)] \subset (0, 1)$  においてエルゴード的であり,  
ルベーグ測度に関して絶対連続な無限不変測度を可算無限個持つ.

ここで  $x_{\max}(A)$  はパラメーター  $A$  に依存するエルゴード的な鉢の右端を表す (詳細は [10]). AL map の絶対連続な無限不変測度については文献 [10] において調べた. 本論文ではエルゴード的鉢  $(0, x_{\max}(A)]$  における軌道  $x_n$  の振る舞いに注目する.

## 2.2 Arneodo map

Arneodo map は以下の式で定義される.

$$x_{n+1} = x_n |x_n|^{a-1} \sin(b \log(1/|x_n|)), \quad x_0 \in (-1, 1), \quad (3)$$

ここで  $a \in (0, 1)$ ,  $b > 0$  はパラメーターである. グラフは図 1(右) に示されている.

Arneodo map は元々, 常微分方程式系のサドル・フォーカス点におけるカオスの発生条件を導く過程で現れた [12, 13, 5]. はじめに Shilnikov がサドル・フォーカス点近傍から二次元無限峰写像を, 次に Arneodo etc. が  $x_n > 0$  だけで定義された式 (3) を導いた. 最終的に Pacifico etc. が  $|x_n| < 1$  に拡張し, 写像力学系として定義した. 一次元無限峰写像の導出は Arneodo etc. に依るところが多いため Arneodo map と名付けた. 式 (3) で定義した Arneodo map はオリジナルのものから本質的と思われる 2 つのパラメーターだけを残している. オリジナルの Arneodo map では,

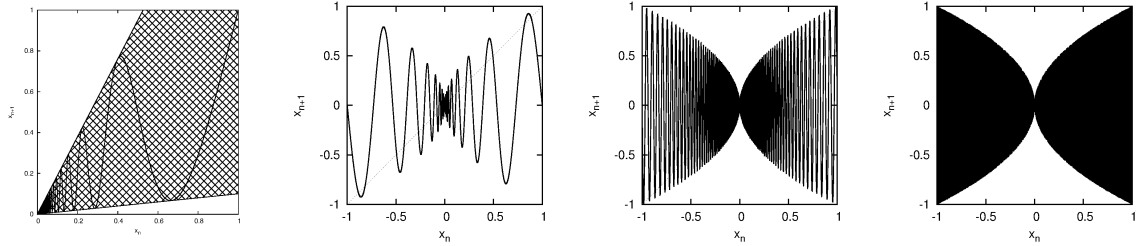


図 5: ランダム化のイメージ: 左から AL map;  $A = 0.9$ , Arneodo map;  $b = 10, 100, 1000$  ( $a$  は  $0.5$  で共通).



図 6: 様々な包絡線を持つ区分線形写像: (左) 式 (10);  $A = 0.8$  の場合, (右) 式 (11);  $B = 4$  の場合.

ある正測度のパラメータ領域で正のリアプノフ指数をもち [5], 絶対連続なエルゴード的確率不変測度が存在することが証明されている [6].

これまで指摘されてこなかったことだが, Arneodo map はオンオフ間欠性 [14, 15, 16, 17] を示す. 図 4 に示すように,  $a \approx 1$  で長いラミナー状態と短いバースト状態を不規則に繰り返す.  $a \rightarrow 1$  で間欠性は強くなり,  $1$  を越えると軌道  $x_n$  は特異反発点  $x_* = 0$  に収束するようになる. これまでオンオフ間欠性の数理モデルは, 確率微分方程式やランダム力学系でしか知られていなかった. 無限峰写像という, 一次元の純粋な決定論的力学系からオンオフ間欠性が得られるということは, 物理分野の間欠性研究において新しい知見となるであろう [18].

### 3 ランダム化とその応用

この節ではランダム化の基本的な考え方を述べ, 一様分布仮説を導入してランダム化を定式化する. 応用として, AL map の AL-property や Arneodo map のオンオフ間欠性の統計的性質を明らかにする. さらにリアプノフ指数の考察も行い, 無限峰写像に対応するランダム化写像のリアプノフ指数は常に負であることを指摘する.

#### 3.1 ランダム化公式

無限峰写像のランダム化とは, 直感的に言えば, 図 5 のようにグラフの包絡線で囲まれた部分を黒く塗りつぶし, 次のステップはその範囲から確率的に選択されると考えることである. この手続きを式で言えば, 写像に含まれる周期関数の位相の部分を独立な確率変数列  $\{y_n\}$  で置き換えることである. その結果得られるランダム力学系を, ランダム化写像と呼ぶことにする. 例えば, AL map のランダム化写像は,

$$x_{n+1} = x_n + Ax_n \sin(\pi/x_n) \xrightarrow{\text{ランダム化}} z_{n+1} = z_n + Az_n \sin(2\pi y_n), \quad (4)$$

であり, Arneodo map のランダム化写像は,

$$x_{n+1} = x_n |x_n|^{a-1} \sin(b \log(1/|x_n|)) \xrightarrow{\text{ランダム化}} z_{n+1} = z_n |z_n|^{a-1} \sin(2\pi y_n), \quad (5)$$

である. ここで確率変数  $y_n$  の分布を決めるために次のような仮説を設ける.

**一様分布仮説:** 単調増加関数  $h(n)$  に対して数列  $y_n \equiv (h(n) \bmod 1)$  は  $[0, 1]$  上一様分布する.

以降はこの仮説に従い, ランダム化によって導入された確率変数列  $\{y_n\}$  は, 一様分布をもつ独立同一な確率変数列であるとする. 一様分布仮説の成立条件については第 4 節で考察する.

上記の考え方を一般化した“ランダム化公式 (Randomization formula)”を述べる. 次の AL-type map は, AL map や Arneodo map を含む, 広いクラスの無限峰写像である:

$$x_{n+1} = x_n |x_n|^{a-1} \{c + Af(g(1/|x_n|))\}, \quad (6)$$

ここで  $f(x)$  は振幅 1 の 1 周期関数,  $g(x)$  は  $x \rightarrow \infty$  で発散する単調増加関数である. さらに  $f(x)$  に次のような条件を課す

$$\int_0^1 f(x) dx = 0. \quad (7)$$

この条件があることでパラメータ  $c$  や  $A$  が一意に決まる.

本論文の 2 つのモデルは次のように再現できる.

- (i) AL map 式 (1) は,  $c = 1/2$ ,  $A \in (0, 1)$ ,  $f(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $g(x) = x$ ,  $a = 1$ ,  $x_0 \in (0, 1)$  とすれば与えられる.
- (ii) Arneodo map 式 (3) は,  $c = 0$ ,  $A = 1$ ,  $f(x) = \sin(2\pi x)$ ,  $g(x) = b \log(x)/2\pi$ ,  $a \in (0, 1)$ ,  $x_0 \in (-1, 1)$  とすれば与えられる.

以上の設定において, ランダム化を次のように定式化する:

#### ランダム化公式 I

AL-type map 式 (6) に対応するランダム化写像は

$$z_{n+1} = z_n |z_n|^{a-1} \{c + Af(y_n)\}, \quad (8)$$

である. ただし  $\{y_n\}$  は  $[0, 1]$  上一様分布する独立同一な確率変数列である.

最後に, 今回は直接は使わないが, 写像の包絡線が任意の場合のランダム化公式も紹介しておく. 区分線形写像であり, 上下の包絡線が

$$y = e_u(x), \quad y = e_l(x), \quad (9)$$

であるとする. 例として図 6 に示したものは,

- (i) 図 6 左: 分割点 (不連続点) が  $1/n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) であり, 包絡線は

$$e_u(x) = \min\{1, (1+A)x\}, \quad e_l(x) = (1-A)x, \quad (10)$$

である. ただし,  $A \in (0, 1)$  はパラメーター.

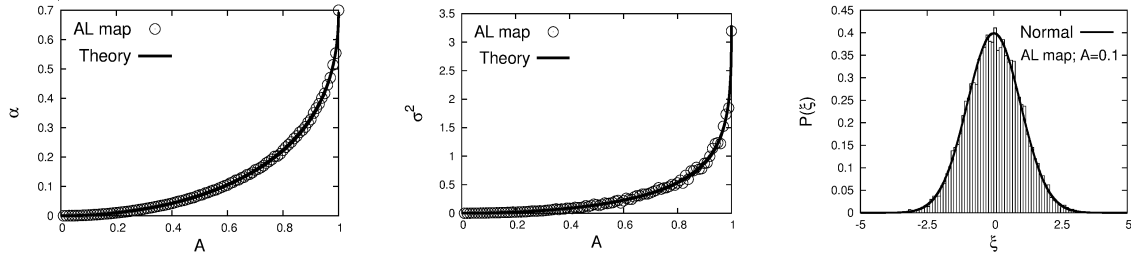


図 7: AL map の軌道から計算した減衰率  $\alpha(A)$ , 分散  $\sigma^2(A)$ , 及び, ゆらぎ  $\{\xi_{10000}\}$  の分布密度関数  $P(\xi)$ . 実線は理論曲線を表しており, よく一致している. ゆらぎの分布密度関数  $P(\xi)$  は他のどのパラメーター  $A \in (0, 1)$  でも正規分布が観測される.

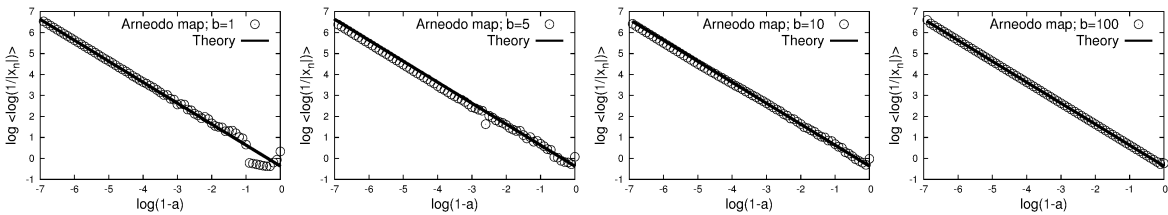


図 8: Arneodo map の軌道から計算した長時間平均  $\log \left( \overline{\log(1/|x_n|)} \right)$  v.s. パラメーター  $\log(1-a)$ : 左から  $b = 1, 5, 10, 100$  の場合. 実線は理論線  $y = -x + \log(\log 2)$  であり,  $b$  が大きくなるほどよく一致する.

(ii) 図 6 右: 分割点 (不連続点) は  $1/n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) であり, 包絡線は

$$e_u(x) = \min \left\{ 1, \frac{x}{1-x} \right\}, \quad e_l(x) = \frac{x}{1+Bx}, \quad (11)$$

である. ただし,  $B \geq 1$  はパラメーター.

このとき,

**ランダム化公式 II**

上下の包絡線が  $y = e_u(x), y = e_l(x)$  である区分線形写像に対応するランダム化写像は

$$z_{n+1} = y_n e_u(z_n) + (1 - y_n) e_l(z_n), \quad (12)$$

である. ただし  $\{y_n\}$  は  $[0, 1]$  上を一様分布する独立同一な確率変数列である.

**3.2 ランダム化の応用**

この小節では, ランダム化公式を, 具体的に AL map と Arneodo map に適用し, その統計的性質を明らかにする. さらに両写像の (有限時間) リャプノフ指数について数値結果を示し, AL map についてはランダム化公式からその結果を導出する. また注意として, ランダム化写像のリャプノフ指数は必ず負になることにも言及する.

### 3.2.1 AL map の場合

AL map のランダム化写像式 (4) より,

$$\frac{1}{n} \log \left( \frac{z_n}{z_0} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log(1 + A \sin(2\pi y_k)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \log(1 + A \sin(2\pi y)) dy. \quad (13)$$

ここで最右辺は Jensen の不等式により負であるから, 減衰率を

$$\alpha(A) \equiv - \int_0^1 \log(1 + A \sin(2\pi y)) dy, \quad (14)$$

と定義する. また, 中心極限定理より,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left( \log \frac{z_n}{z_0} + n\alpha \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} (\log(1 + A \sin(2\pi y_k)) + \alpha) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} N(0, \sigma^2). \quad (15)$$

ここで  $N(0, \sigma^2)$  は平均 0, 分散  $\sigma^2$  の正規分布であり, 分散を

$$\sigma^2(A) \equiv \int_0^1 (\log(1 + A \sin(2\pi y)))^2 dy - \alpha(A)^2. \quad (16)$$

と定義する.

以上より, AL map の漸近挙動が次のようになると期待できる.

$$x_n \sim x_0 \exp(-n\alpha(A) + \sqrt{n}\sigma(A)\xi_n), \quad n \rightarrow \infty, \quad (17)$$

ただし,  $\{\xi_n\}$  は標準正規分布  $N(0, 1)$  をもつ独立同一な確率変数列である.

図 7 に示すように, 実際の AL map の軌道から計算した減衰率  $\alpha(A)$ , 分散  $\sigma^2(A)$ , 及び, ゆらぎの分布  $P(\xi)$  は, 確かにランダム化写像から求めたもの, 式 (14), (16) 及び標準正規分布  $N(0, 1)$ , と一致している.

### 3.2.2 Arneodo map の場合

Arneodo map のランダム化写像式 (5) より,

$$\frac{1}{n} \log \frac{|z_n|}{|z_0|} = (1-a) \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log \frac{1}{|z_k|} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log(|\sin(2\pi y_k)|), \quad (18)$$

両辺  $n \rightarrow \infty$  を考えると,

$$0 = (1-a) \overline{\log(1/|z_k|)} + \int_0^1 \log(|\sin(2\pi y)|) dy, \quad (19)$$

が成り立つ. ここでオイラー積分  $\int_0^1 \log(|\sin(2\pi y)|) dy = -\log 2$  を使うと, 結局, 対数変数  $\log |z_n|$  の平均は,

$$\overline{\log |z_n|} = -\frac{\log 2}{1-a}, \quad (20)$$

となる.

以上より, Arneodo map の軌道の長時間平均は次のようになると期待できる.

$$\overline{\log |x_n|} \sim -\frac{\log 2}{1-a}, \quad b \rightarrow \infty. \quad (21)$$

図 8 に示すように, 実際の Arneodo map の軌道から計算した長時間平均  $\overline{\log |x_n|}$  は,  $b \gg 1$  で, 確かにランダム化写像から求めた式 (21) と一致する.

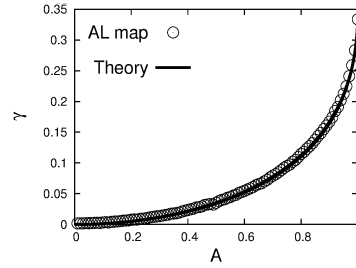


図 9: AL map の有限時間リャプノフ指数に対する係数  $\gamma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(A)/n$ . 実線は理論曲線  $\alpha(A)/2$  である.

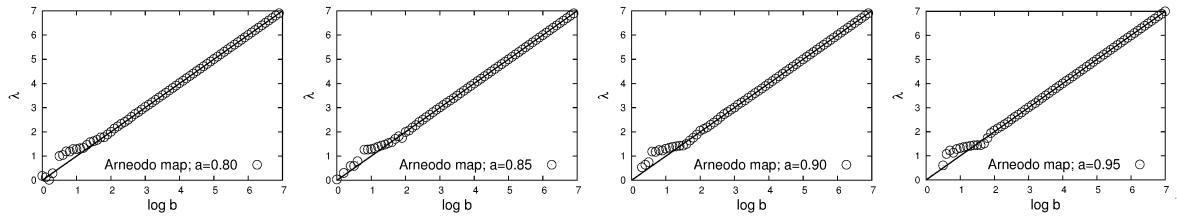


図 10: Arneodo map のリャプノフ指数  $\lambda(a, b)$  v.s. パラメーター  $\log b$ ; 左から  $a = 0.80, 0.85, 0.90, 0.95$  の場合. 数値的に  $\lambda(a, b) \approx \log b$ ,  $a \in (0, 1)$ ,  $b \gg 1$  であると予想される.

### 3.2.3 リャプノフ指数

まず, AL map のリャプノフ指数を見てみる. 図 3 で見たように, 有限時間リャプノフ指数は漸近的に時間  $n$  に比例して増える.

$$\lambda_n(A) \sim \gamma(A)n, \quad n \rightarrow \infty. \quad (22)$$

この係数  $\gamma(A)$  の  $A$  依存性をランダム化公式を使って求める. AL map を  $x_{n+1} = T(x_n)$  とすれば, その微分の漸近形は次のようになる.

$$T'(x) \sim -\frac{\pi A}{x} \cos(2\pi\eta), \quad x \rightarrow 0, \quad (23)$$

ここで  $\eta$  は  $[0, 1]$  上一様分布する確率変数である. したがって, 有限時間リャプノフ指数の定義式 (2) と AL map の軌道の漸近式 (17) を組み合わせて,

$$\begin{aligned} \lambda_n(A) &\sim \left\langle \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[ k\alpha(A) + \sqrt{k}\sigma(A)\xi_k + \log\left(\frac{\pi A}{x_0}\right) + \log|\cos(2\pi\eta_k)| \right] \right\rangle_{x_0} \\ &\sim \frac{\alpha(A)}{2}n, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (24)$$

となる. この関係式は, 局所的な不安定性を表すリャプノフ指数  $\lambda_n$  と, 大域的な安定性を表す減衰率  $\alpha$  を繋ぐ式である. 図 9 は, 確かに  $\gamma(A) = \alpha(A)/2$  であることを示している.

**注意 1.** ここで, AL map に対応するランダム化写像のリャプノフ指数を考えてみる. 対応するランダム化写像を  $z_{n+1} \equiv T(z_n; y_n)$  と書く. ランダム力学系のリャプノフ指数を

$$\bar{\lambda} \equiv \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \log |D_{z_k} T(z_k; y_k)| \right\rangle_{\{y_n\}}, \quad (25)$$



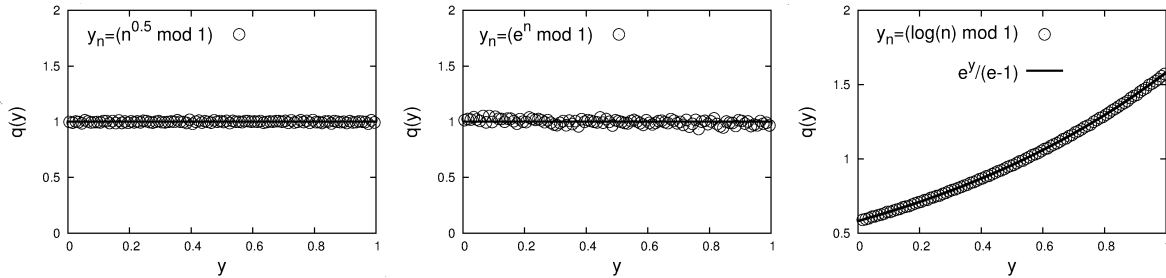


図 11: 単調増大数列の分布密度関数: (左)  $(\sqrt{n} \bmod 1)$ , (中央)  $(e^n \bmod 1)$ , (右)  $(\log(n) \bmod 1)$ .

と定義するとき, ランダム化写像のリアプノフ指数は

$$\bar{\lambda}(A) = -\alpha(A), \quad A \in (0, 1), \quad (26)$$

となる. AL map のリアプノフ指数  $\lambda_n(A)$  は正であるが, ランダム化写像のリアプノフ指数  $\bar{\lambda}(A)$  はすべてのパラメータ範囲  $A \in (0, 1)$  で負である.

次に Arneodo map のリアプノフ指数を数値的に見てみる. 既に説明したように, Arneodo map には絶対連続な確率不変測度が存在し, 正のリアプノフ指数を持つ. 図 10 に示すように, 数値計算によっても正のリアプノフ指数を確認することが出来る. さらに次のようなパラメータ依存性が予想される.

$$\lambda(a, b) \approx \log b, \quad a \in (0, 1), \quad b \gg 1, \quad (27)$$

ここでリアプノフ指数は間欠性の強さ  $a \in (0, 1)$  には依存しない. 予想式 (27) を理論的に導出することは今後の課題である.

**注意 2.** Arneodo map に対応するランダム化写像のリアプノフ指数は

$$\bar{\lambda}(a) = \log a, \quad a \in (0, 1), \quad (28)$$

である. この場合もランダム化写像のリアプノフ指数  $\bar{\lambda}(a)$  はすべてのパラメータ範囲  $a \in (0, 1)$  で負である. ランダム化の手続きは無限峰写像の局所的な初期値鋭敏性を消滅させるようだ.

## 4 ランダム化の適用条件

ランダム化公式を導く際に「一様分布仮説」が本質的であった. この節では単調増加関数  $h(n)$  がどのような条件を満たすとき数列  $y_n = (h(n) \bmod 1)$  が一様分布するかを考察する. ここで, ある数列  $y_n$  が  $[0, 1]$  上一様分布するとは,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq k < n \mid 0 \leq y_k < y\}}{n} = y, \quad y \in [0, 1], \quad (29)$$

が成り立つときを言う.

以下では各クラスの数列, すなわち, べき関数的に増大する数列, 指数関数的に増大する数列, 対数関数的に増大する数列, に対する結果を個別に述べる. 最後に, それらの結果を統合し, 一様分布仮説の適用条件を明らかにする.

#### 4.1 べき関数的に増大する数列

以下の数列は一様分布することが知られている [8].

- $(\theta n \bmod 1)$ ,  $\theta \notin \mathbb{Q}$ .
- $(\alpha n^m \bmod 1)$ ,  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ ,  $m \geq 1$ : integer.
- $(\alpha n^\sigma \bmod 1)$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\sigma > 0$ : not integer.

実際に,  $(\sqrt{n} \bmod 1)$  の分布を観測したものが図 11(左)である. このように,

べき関数的に増大する数列は一様分布する

と言える [19].

#### 4.2 指数関数的に増大する数列

このクラスで最も単純な数列  $(e^n \bmod 1)$  は一様分布すると予想されているが, 未だ証明はない. しかし, 測度論的に次の結果が得られている ([8] 参照).

**定理** (Koksma's General Metric Theorem). 数列  $(\chi^n \bmod 1)$  は, ほとんどすべての実数  $\chi > 1$  に対して,  $[0, 1]$  上一様分布する.

実際, 図 11(中央)に  $(e^n \bmod 1)$  の分布密度関数の数値結果を示す. このように,

数値実験においては指数関数的に増大する数列は一様分布する

と考えられる.

#### 4.3 対数関数的に増大する数列

このクラスで最も単純な数列  $(\log n \bmod 1)$  は一様分布しないことが知られている [8]. この数列の分布を説明するために, まず, 漸近分布関数  $Q(y)$  を定義する.

**定義 1.** 数列  $y_n$  に対して  $Q(y)$  が漸近分布関数であるとは次が成り立つときを言う:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq k < n \mid 0 \leq y_k < y\}}{n} = Q(y), \quad y \in [0, 1]. \quad (30)$$

上記の定義において極限  $n \rightarrow \infty$  が存在しない場合でも, ある部分列  $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$  ( $i \rightarrow \infty, n_i \rightarrow \infty$ ) に対しては漸近分布が存在する場合がある. 以下で部分列に対する漸近分布関数  $Q_{\{n_i\}}(y)$  を定義する.

**定義 2.** 数列  $y_n$  に対して  $Q_{\{n_i\}}(y)$  が部分列  $\{n_i\} \subset \mathbb{N}$  に対する漸近分布関数であるとは次が成り立つときを言う:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\#\{0 \leq k < n_i \mid 0 \leq y_k < y\}}{n_i} = Q_{\{n_i\}}(y), \quad y \in [0, 1]. \quad (31)$$

数列  $y_n = (\log n \bmod 1)$  に対して次の結果が知られている [8]:  
 $\xi \in [0, 1]$  を定数とする. 部分列  $\{n_i\}$  を,  $i \rightarrow \infty$  で  $(\log n_i \bmod 1) \rightarrow \xi$  となるものとする. このとき, 部分列  $\{n_i\}$  に対する漸近分布密度関数  $q(y; \xi) = Q'_{\{n_i\}}(y)$  は以下ようになる:

$$q(y; \xi) = \begin{cases} e^{y-\xi+1}/(e-1), & y \in [0, \xi), \\ e^{y-\xi}/(e-1), & y \in [\xi, 1]. \end{cases} \quad (32)$$

図 11(右) に  $\xi = 1$  としたときの分布密度関数  $q(y; 1) = e^y/(e-1)$  を示す. このように,

対数関数的に増大する数列は一様分布しない

ことがわかる.

#### 4.4 一様分布するための条件

これまでの個別的結果から以下のことが予想される.

一様分布する数列は対数関数より速く増大する.

ここでは, この予想を補強するために, 連続時間の過程  $y_t$  ( $t \geq 0$ ) についての結果を証明なしで述べる. この結果は, これまでの離散時間の数列  $y_n$  における結果を, 連続時間の過程  $y_t$  において統合したものである. 連続時間にすることで比較的容易に示すことができる.

**定理.**  $\gamma > 0$  を定数とする. 過程  $y_t = (h(t) \bmod 1)$ ,  $t \geq 0$  について, 以下の (i)–(iii) が成り立つ.

- (i)  $h(t) = e^t$  のとき, 過程  $y_t$  は  $[0, 1]$  上一様分布する.
- (ii)  $h(t) = t^\gamma$  のとき, 過程  $y_t$  は  $[0, 1]$  上一様分布する.
- (iii)  $h(t) = (\log(t+1))^\gamma$  とする.
  - (a)  $\gamma > 1$  のとき, 過程  $y_t$  は  $[0, 1]$  上一様分布する.
  - (b)  $\gamma \leq 1$  のとき, 過程  $y_t$  に漸近分布は存在しない.
  - (c) 特に  $\gamma = 1$  のとき, 部分列  $T_k = e^{z+k} - 1$ , ( $0 \leq z \leq 1$ ) に対する漸近分布  $Q_{T_k}(y)$  が存在して, その密度関数は次のようになる.

$$q_z(y) = \begin{cases} e^{y-z+1}/(e-1), & y \in [0, z), \\ e^{y-z}/(e-1), & y \in [z, 1]. \end{cases} \quad (33)$$

これまでの個別数列の結果や上記の定理を鑑みれば, AL-type map 式 (6) のランダム化における一様分布仮説には適用条件があり,

位相  $g(1/x_n)$  の  $n \rightarrow \infty$  で増大する速さが対数関数  $\log n$  より大きい

ことが必要であると考えられる.

## 5 まとめ

本論文では無限峰写像の統計的な側面を解析するためにランダム化の方法を導入した。まずランダム化の方法の基本的な考え方を述べ、一様分布仮説を基にしてランダム化を定式化した。次に応用として無限峰写像が示す AL-property やオンオフ間欠性の統計的性質を明らかにした。またリャプノフ指数のパラメーター依存性を調べ、ランダム化写像のリャプノフ指数は常に負になることも見た。最後に、一様分布仮説の適用条件を一様分布論を基に考察し、位相の増大する速さが対数関数より大きいことが必要であることを明らかにした。

## 参考文献

- [1] P. Collet and J.-P. Eckmann. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Birkhäuser Boston, Boston, 1980.
- [2] M. V. Jakobson. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Commun. Math. Phys.*, Vol. 81, pp. 39–88, 1981.
- [3] J. Aaronson. *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*. American Mathematical Society, Providence, 1997.
- [4] T. Akimoto and Y. Aizawa. Subexponential instability in one-dimensional maps implies infinite invariant measure. *Chaos*, Vol. 20, p. 033110, 2010.
- [5] M. J. Pacifico, A. Rovella, and M. Viana. Infinite-modal maps with global chaotic behavior. *Ann. Math.*, Vol. 148, pp. 441–484, 1998.
- [6] V. Araújo and M.J. Pacifico. Physical measures for infinite-modal maps. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 203, pp. 211–262, 2009.
- [7] L. Arnold. *Random Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [8] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform Distribution of Sequences*. Dover Publications, New York, 2006.
- [9] Y. Aizawa, Y. Kikuchi, T. Harayama, K. Yamamoto, M. Ota, and K. Tanaka. Stagnant motions in hamiltonian systems. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, Vol. 98, pp. 36–82, 1989.
- [10] M. Nakagawa and Y. Aizawa. Observed measures and fluctuations in dissipative infinite ergodic systems: Randomization theory for the infinite-modal maps with ant-lion property. 2014. submitted to J. Phys. Soc. Jpn.
- [11] J. Aaronson and T. Meyerovitch. Absolutely continuous, invariant measures for dissipative, ergodic transformations. *Colloq. Math.*, Vol. 110, pp. 193–199, 2008.
- [12] L. P. Shilnikov. A case of the existence of a countable number of periodic orbits. *Sov. Math. Dokl.*, Vol. 6, p. 163, 1965.
- [13] A. Arneodo, P. H. Coulet, E. A. Spiegel, and C. Tresser. Asymptotic chaos. *Physica D*, Vol. 14, p. 327, 1985.

- [14] H. Fujisaka and T. Yamada. A new intermittency in coupled dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 74, p. 918, 1985.
- [15] T. Yamada and H. Fujisaka. Intermittency caused by chaotic modulation. I—Analysis with a multiplicative noise model—. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 76, p. 582, 1986.
- [16] N. Platt, E. A. Spiegel, and C. Tresser. On-off intermittency: A mechanism for bursting. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 70, p. 279, 1993.
- [17] J. F. Heagy, N. Platt, and S. M. Hammel. Characterization of on-off intermittency. *Phys. Rev. E.*, Vol. 49, p. 1140, 1994.
- [18] M. Nakagawa and Y. Aizawa. On-off intermittency in shilnikov-type chaos. 2014. in preparation.
- [19] Ya. Sinai. *Introduction to ergodic theory*. Princeton university press, Princeton, 1976.