

非拡大的線形写像のランダムダイナミクス

北海道大学理学院数学専攻 修士 1 年 中村 文彦
Fumihiko NAKAMURA
Department of Mathematics,
Hokkaido University

概要

領域 $D := \{(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2 \mid 0 < \alpha, \beta < 1, \alpha + \beta > 1\}$ とし, $(\alpha, \beta) \in D$ に対して, $[0, 1]$ 上の変換 $S_{\alpha, \beta}$ を, $S_{\alpha, \beta}(x) = \alpha x + \beta \pmod{1}$ とする. この変換は非拡大的であり, D 内のルベグ測度 m に関してほとんど全ての (α, β) で周期点を持つことが示される. このことから長周期となる (α, β) の領域はほとんど消滅してしまうことが予想され, コンピュータによる周期運動の観測において, ノイズや打ち切り誤差による影響で長周期運動の観測が難しくなる事を示唆するものと思われる. またノイズの影響で周期数が変わってしまうことも観測されている. 例えば, $\alpha = 1/2, \beta = 17/30$ の時は 4 周期点を持つが, これにノイズが加わると 3 周期の運動となってしまうことがシミュレーションから観測された. ここではそういったノイズによる長周期の消滅や周期数の変化についての数学的理由を考察する.

1 非拡大的な区分的線形写像の周期点

定理 1.1 任意の自然数 $n \geq 2$ に対して, ある $\alpha, \beta \in D$ が存在して, $S_{\alpha, \beta}$ は最小周期 n の周期点を持つ.

定理 1.2 $m - a.e. (\alpha, \beta) \in D$ に対し, $S_{\alpha, \beta}$ は周期点を持つ.

これらの定理を示すために下記のような *Good Sequence* という記号列を構成し, 必要な定義を準備する.

定義 1.3 任意の自然数 n に対して, 集合 $Pr(n)$ を n と互いに素で n より小さい自然数の集合とする. すなわち, $Pr(n) := \{l < n \mid (n, l) = 1\}$. また $Pr(n)$ の元の個数を $\varphi(n)$ と書く. これはオイラー数と呼ばれている.

定義 1.4 $n \in \mathbb{N}, l \in Pr(n)$ とし, 各 $i = 0, 1, \dots, n-1$ に対し, $p_i := \lfloor \frac{il}{n} \rfloor$ とする. この時, 長さ n の 01 列 $(k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ が以下の条件を満たすとき, これを *Good Sequence* であるという.

$$\begin{cases} p_{i+1} = p_i & \implies k_i = 0 \\ p_{i+1} = p_i + 1 & \implies k_i = 1. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, 記号 $[x]$ は, x の整数部分を表す.

定義 1.5 $S_{\alpha, \beta}$ が最小周期 n の周期点を持つ (α, β) の領域を D_n と書く. すなわち, $D_n := \{(\alpha, \beta) \mid S_{\alpha, \beta} \text{ は最小周期 } n \text{ の周期点を持つ}\}$.

定義 1.6 $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ と $\alpha \in (0, 1)$ に対して, 関数列 $\{A_i(\alpha)\}_{i=0}^{n-1}$ を,

$$\begin{pmatrix} A_0(\alpha) \\ A_1(\alpha) \\ A_2(\alpha) \\ \vdots \\ A_{n-1}(\alpha) \end{pmatrix} := \frac{1}{1-\alpha^n} \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & \cdots & k_{n-2} & k_{n-1} \\ k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_{n-1} & k_0 \\ k_2 & k_3 & & \cdots & k_0 & k_1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ k_{n-1} & k_0 & k_1 & \cdots & k_{n-2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-3} \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

と定義する.

定理 1.1, 1.2 の証明のために以下の補題が必要となる.

補題 1.7 $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ が *Good Sequence* ならば, 任意の $\alpha \in (0, 1)$ に対して,

$$\min_{\{i|k_i=0\}} A_i(\alpha) - \max_{\{i|k_i=1\}} A_i(\alpha) > 0 \quad (3)$$

を満たし, $D_n \neq \emptyset$ となる.

定義 1.8 $n \in \mathbb{N}$, $l \in Pr(n)$ とし, これらから作られる *Good Sequence* $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1})$ と $\{A_i(\alpha)\}_{i=0}^{n-1}$ に対して, 領域 $D_{n,l}$ を,

$$D_{n,l} := \{(\alpha, \beta) \in D \mid \max_{\{i|k_i=1\}} A_i(\alpha) < \frac{\alpha + \beta - 1}{\alpha(1-\alpha)} < \min_{\{i|k_i=0\}} A_i(\alpha)\} \quad (4)$$

とする.

補題 1.9 $D_{n,l} \neq \emptyset$ であり, $D_n = \bigcup_{l \in Pr(n)} D_{n,l}$ となる.

補題 1.10 $(k_0, k_1, \dots, k_{n-1}) \in \{0, 1\}^n$ を *Good Sequence* とするとき, これから定まる $\{A_i(\alpha)\}_{i=0}^{n-1}$ に対して, 以下の等式が成立する.

$$\min_{\{i|k_i=0\}} A_i(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha^n} \sum_{i=1}^{n-1} k_i \alpha^{i-1} \quad (5)$$

$$\max_{\{i|k_i=1\}} A_i(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha^n} \left(\sum_{i=1}^{n-1} k_i \alpha^{i-1} - \alpha^{n-2} + \alpha^{n-1} \right). \quad (6)$$

命題 1.11 (周期点の存在する領域の面積)

$$m \left(\bigcup_{n=2}^{\infty} \bigcup_{l \in Pr(n)} D_{n,l} \right) = \sum_{n=2}^{\infty} \varphi(n) \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^2 \alpha^{n-1}}{1-\alpha^n} d\alpha = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

2 周期領域のシミュレーション

以下にコンピュータを用いて D_2, D_3, \dots, D_7 を表示した. 以下の図は横軸に α を縦軸に β をそれぞれ $[0, 1]$ 区間で図示したものである.

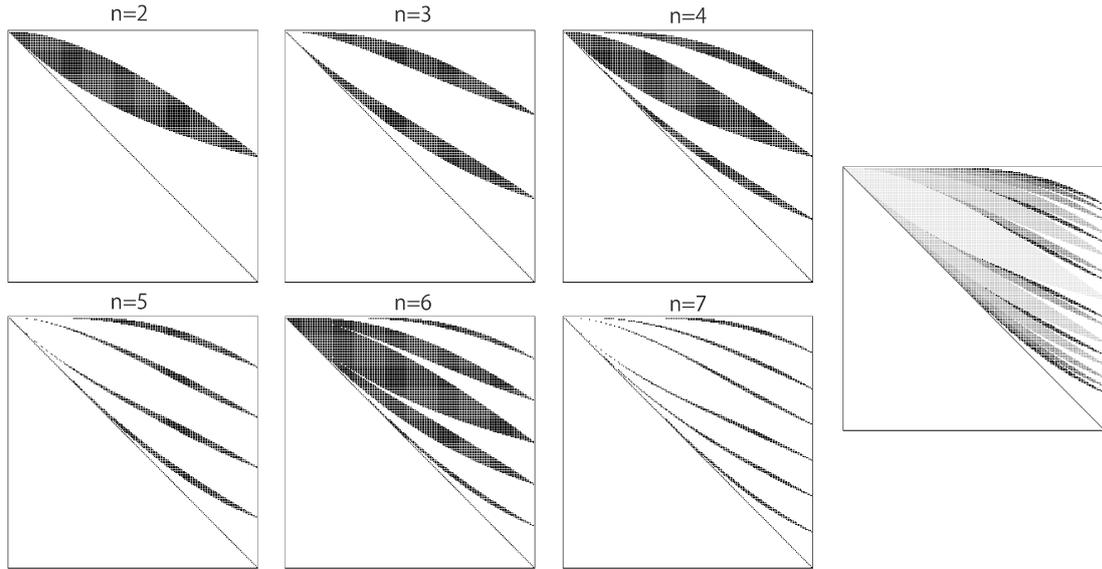


図1 横軸 α , 縦軸 β の $[0, 1]^2$ での $D_2 \dots D_7$ の領域. 右図は $\bigcup_{n=2}^7 D_n$.

上の領域は定義 1.5 で与えられる領域を図示したものである。これらの領域には次のような Farey 数列 [1] の構造と同じような構造があることがわかる。例えば 3 周期と 4 周期の領域の間には 7 周期の領域が存在している。一般に m 周期と n 周期の間には $(m + n)$ 周期の領域が存在している。また、長周期になればなるほどこの領域は小さくなっていくので、長周期の運動は起こりにくくなっていることがわかる。そして $S_{\alpha, \beta}$ にノイズが加わった力学系を考えると、ノイズの影響で長周期は消滅する傾向にある。これはコンピュータで $\bar{S}_{\alpha, \beta}$ の周期を観測した際に長周期が観測しづらくなる理由を示唆している。

3 ランダムダイナミクス

変換 $S_{\alpha, \beta}$ で、 $\alpha = 1/2$, $\beta = 17/30$ としたとき、 $S_{\alpha, \beta}$ は 4 周期点を持つ。一方、この変換にノイズを加えた挙動を考える。すなわち

$$\bar{S}_{\alpha, \beta}(x_{t+1}) = \alpha x_t + \beta + \xi_t \pmod{1} \quad (t = 0, 1, 2, \dots) \tag{8}$$

とする。この時、 $\alpha = 1/2$, $\beta = 17/30$, $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t, \dots$ を $[0, 1/15]$ 上の一様分布に従う確率変数列とすると、 $S_{\alpha, \beta}$, $\bar{S}_{\alpha, \beta}$ に関する Perron Frobenius 作用素 [2] の固有関数の周期性が以下のように観測された。

これらの図からノイズが加わると確かに 4 周期の挙動を示すことが観測された。これは図 1 に見られるように、ノイズによって β が $\beta + \xi_n$ に変わることによって、 $(\alpha, \beta + \xi_n)$ の含まれる領域は (α, β) が含まれる領域と異なることが原因である。このようにコンピュータによるシミュレーションではノイズや打ち切り誤差の影響で、観測される運動の周期が本来の周期とは異なる周期として観測されてしまうということが示唆される。

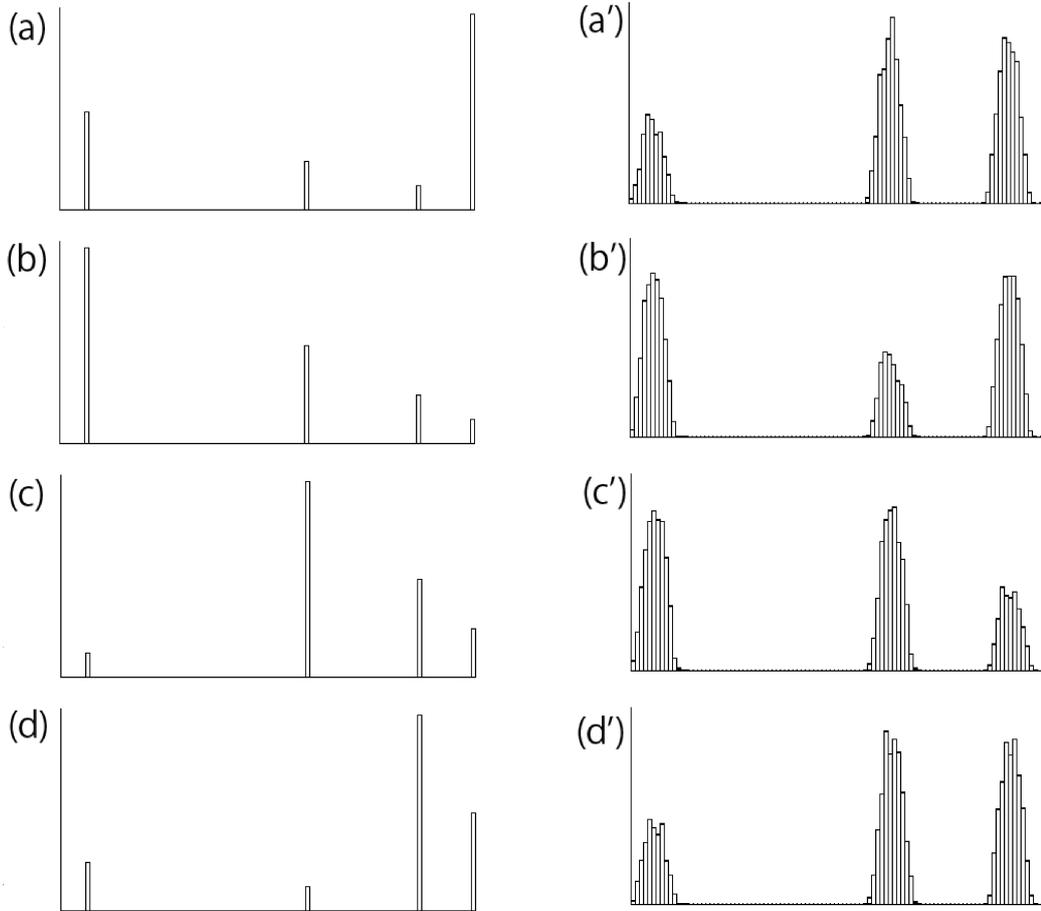


図2 (a)–(d) : $[0, 1]$ 上の一様分布に従う 10^4 個の初期点を $S_{\alpha, \beta}$ によって t 回推移させた点の頻度分布。
 (a')–(d') : 同じく $\bar{S}_{\alpha, \beta}$ での頻度分布. ただし $\alpha = 1/2$, $\beta = 17/30$, $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_t, \dots$ は $[0, 1/15]$
 上の一様分布に従う確率変数列. (a)(a') : $t = 10$, (b)(b') : $t = 11$, (c)(c') : $t = 12$, (d)(d') : $t = 13$.

参考文献

- [1] 畑政義著, 神経回路モデルのカオス, 朝倉書店 (カオス全書 6, 山口昌哉・合原一幸編集)
- [2] Lasota, A. and Mackey, M.C. 1994. Chaos, Fractals, and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics / Springer-Verlag