

弾性乱流のオイラー・ラグランジュシミュレーション

名古屋工業大学大学院・創成シミュレーション工学専攻
渡邊 威 (Takeshi WATANABE) watanabe@nitech.ac.jp
後藤 俊幸 (Toshiyuki GOTOH) gotoh.toshiyuki@nitech.ac.jp

Department of Scientific and Engineering Simulation, Nagoya Institute of Technology

Abstract

Taylor-Green 流れにおいて発生する弾性乱流の性質について、オイラー・ラグランジュ数値計算を用いて調べた。Taylor-Green 渦に比例する外力により生じる定常流れに緩和時間の長い高分子を添加すると、流れ場は不安定化し乱流状態に遷移することがわかった。また速度変動揺らぎのパワースペクトルの振る舞いを調べた。その結果、スペクトルは弾性乱流に特徴的な冪的減衰を示すこと、また観測点によってその振る舞いが異なることがわかった。

1 はじめに

弾性乱流とは、高分子溶液の低レイノルズ数流れにおいて高分子鎖の弾性が引き起こすマクロな不規則流動現象である [1]。近年、実験及び数値的研究が数多く行われており、その素過程の解明が重要な研究課題となっている [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]。弾性乱流においては、幅広い時間・空間スケールに渡って揺らぎが励起され、速度揺らぎのスペクトルの冪則や、速度勾配揺らぎの非ガウス統計といった、Newton 流体における強い乱流で観測されるものと類似した、興味深い性質を有する [5]。

弾性乱流に関する先行研究に着目すると、流れの運動エネルギー・スペクトル $E(k) \propto k^{-\alpha}$ の冪指数 α の値は、Oldroyd-B モデルを用いた Kolmogorov 流の直接数値計算 (DNS) で $\alpha = 3.8$ [9, 11] が得られている。一方で実験研究においては、速度の時間変動のパワースペクトルの冪的減衰 $P(f) \sim f^{-\alpha}$ が観測されており、回転円盤間の流れにおいて $\alpha = 3.6$ [1]、テイラー・クエット流れにおいて $\alpha = 1.1, 2.2$ [5]、波形状流路においては $\alpha = 3.3$ [5]、円柱周りの流れの数値計算においては $\alpha = 3.4, 4.3$ [12]、が得られている。これらの結果はスペクトルの振る舞いが系の境界条件等の外的要因に強く依存することを意味しており、弾性乱流の揺らぎの統計性は非普遍的であることを示唆しているよう思われる。

一方我々は、減衰性等方乱流の最終状態における高分子の影響について研究を行ってきた [14, 15, 16]。溶媒の運動を Navier-Stokes (NS) 方程式で記述し、一方で個々の高分子鎖の運動は非線形バネを有するダンベルモデルを用いた、オイラー・ラグランジュ計算法を採用しているのが大きな特徴である [14]。ワイゼンベルグ数 $W_i \equiv \tau/\tau_K$ (乱流の最小時間スケール (Kolmogorov 時間) τ_K と高分子鎖の緩和時間 τ の比) を変えて計算を行った結果、乱流の減衰最終過程において、運動エネルギー・スペクトル $E(k, t)$ は Kolmogorov 長さ l_K より小さなスケールでべき則 $E(k, t) \propto k^{-\alpha}$ に従う事を見いだした。また指数 α は 4.2 – 4.7 程度であり、 W_i の増大とともに減少することがわかった [15, 16]。

文献 [16] において、我々は高 W_i 数の減衰乱流の最終過程と弾性乱流との類似性について議論した。スペクトルの振る舞いは類似しているが、一方で速度勾配や圧力の揺らぎの性質については弾性乱流のものとは異なる部分があった。これは減衰乱流中の乱れと、弾性乱流による乱れでは、揺らぎの生成起源が異なる事が要因として考えられる。また実験研究で議論されているのは主に周波数スペクトルの振る舞いであり、空間変動のスペクトルを議論したものではない。高レイノルズ数乱流のように Taylor の凍結乱流仮説が成り立つ場合には両者の

関連性は明確であるが、弾性乱流においてはそれが周波数スペクトルの振る舞いとどのように関連するのかは定かでない。実験結果との整合性を議論するためには、定常乱流において周波数スペクトルの振る舞いを明らかにする必要がある。

本研究の目的は、オイラーラグランジュ数値計算を用いて、弾性乱流の発生とその統計性質を明らかにすることにある。特にスペクトルの振る舞いに着目し、波数スペクトルや周波数スペクトルの冪則の存在の是非や、その関連性についての詳細を明らかにすることにある。具体的には Taylor-Green 渦に比例する外力を NS 方程式に印加し、定常な渦流れを作る。次に、流れ場に高分子を分散すると定常流れは非定常化し、不規則な運動が生じることを示す。この時、流れ場の基本統計量や、周波数スペクトルの振る舞いについての解析結果を議論する。

以下2節では計算で扱うモデル方程式について簡単に紹介し、3節でその数値計算法とパラメータについて説明する。4節で1点統計量や波数スペクトル、及び周波数スペクトルの計算結果を示し、その特徴を議論する。5節では得られた結果をまとめ、今後の展望について述べる。

2 基礎方程式

2.1 高分子鎖のモデル方程式

単一の高分子鎖を非線形バネで連結した二つの小球でモデル化する。これはダンベルモデルと呼ばれる。ここでは流体中の合計 N_t 個のダンベルモデルの集団運動を考える。希薄系を扱うので、異なるダンベルモデル間の相互作用は無視する。 n 番目のダンベルモデル ($n = 1, 2, \dots, N_t$) の運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d\mathbf{R}^{(n)}}{dt} = \mathbf{u}_1^{(n)} - \mathbf{u}_2^{(n)} - \frac{1}{2\tau} f\left(\frac{|\mathbf{R}^{(n)}|}{L_{max}}\right) \mathbf{R}^{(n)} + \frac{r_{eq}}{\sqrt{2\tau}} \left(\mathbf{W}_1^{(n)} - \mathbf{W}_2^{(n)}\right), \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_g^{(n)}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_1^{(n)} + \mathbf{u}_2^{(n)}\right) + \frac{r_{eq}}{\sqrt{8\tau}} \left(\mathbf{W}_1^{(n)} + \mathbf{W}_2^{(n)}\right), \quad \mathbf{u}_\alpha^{(n)} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}_\alpha^{(n)}(t), t). \quad (2)$$

ここで $\mathbf{R}^{(n)}(t)$ はダンベルの末端間ベクトル、 $\mathbf{r}_g^{(n)}(t)$ は重心ベクトルをそれぞれ表す。溶媒の速度場は $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ である。非線形バネとして、本研究では finitely extensible nonlinear elastic (FENE) モデル $f(z) = 1/(1-z^2)$ を用いる [17, 18]。式 (1) において、 L_{max} はダンベルの最大伸び切り長を表す。また $\mathbf{W}_{1,2}^{(n)}(t)$ は溶媒中の粒子のブラウン運動によるランダム力を表し、

$$\langle W_{\alpha,i}^{(n)}(t) \rangle = 0, \quad (3)$$

$$\langle W_{\alpha,i}^{(n)}(t) W_{\beta,j}^{(m)}(s) \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{nm} \delta(t-s), \quad (4)$$

のガウス統計に従う。ここで $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表す。下付き文字 $\alpha, \beta, i, j, n, m$ はそれぞれ $(\alpha, \beta) = 1$ or 2 , $(i, j) = 1, 2, 3$, $(n, m) = 1, 2, \dots, N_t$ の値をとる。 δ_{ij} は Kronecker のデルタであり、 $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数である。定数 τ, r_{eq} はそれぞれ

$$\tau \equiv \frac{\zeta}{4k}, \quad r_{eq} \equiv \sqrt{\frac{k_B T}{k}}, \quad (5)$$

で定義され、溶媒中のダンベルの緩和時間と平衡長を表す。ここで k はバネ定数、 $\zeta \equiv 6\pi\eta_s \rho_s a$ はストークスの抵抗係数 (ρ_s は溶媒の密度、 a は粒子半径) である。 k_B と T はそれぞれボルツマン定数と温度を表す。

2.2 溶媒場の発展方程式

溶媒は非圧縮流体とすると, 溶媒の運動は連続の式と NS 方程式に従う.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu_s \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T}^p + \mathbf{f}. \quad (6)$$

ここで $p(\mathbf{x}, t)$ は圧力場であり, 溶媒の密度 ρ_s は球の密度 ρ_d に等しく $\rho_s = \rho_d = 1$ に設定している. 高分子によるストレス場 $\mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t)$ は次式で表される [14].

$$T_{ij}^p(\mathbf{x}, t) = \frac{\nu_p}{\tau} \left(\frac{L_{box}^3}{N_t} \right) \sum_{n=1}^{N_t} t_{ij}^{(n)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_g^{(n)}), \quad (7)$$

$$t_{ij}^{(n)} \equiv \frac{R_i^{(n)} R_j^{(n)}}{r_{eq}^2} f \left(\frac{|\mathbf{R}^{(n)}|}{L_{max}} \right) - \delta_{ij}. \quad (8)$$

ここで $\nu_p \equiv \nu_s \eta$ は高分子による粘度であり, 定数 $\eta \equiv (3r_{eq}/4a)^2 \Phi_V$ はゼロ剪断粘度比を表す. $\Phi_V \equiv (8\pi N_t/3)(a/L_{box})^3$ はダンベル集団の体積分率である. $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ は流れを駆動する外力項であり,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = A(t) \mathbf{u}^{TG}(\mathbf{x}), \quad A(t) \equiv \frac{\varepsilon_{in}}{\langle \mathbf{u}^{TG} \cdot \mathbf{u} \rangle_V} \quad (9)$$

で定義される. 振幅 $A(t)$ はエネルギー注入率 $\varepsilon_{in} = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \rangle_V$ が時間によらず一定となるような条件により決定した. ここで $\langle \dots \rangle_V$ は計算領域全体に渡る体積平均を表す. $\mathbf{u}^{TG}(\mathbf{x})$ は, Taylor-Green(TG) 渦

$$u_1^{TG} = \cos x_1 \sin x_2 \cos x_3, \quad u_2^{TG} = -\sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \quad u_3^{TG} = 0 \quad (10)$$

の速度場を表し, この外力により引き起こされる流れを本研究では TG 流れと呼ぶ. この流れ場は双曲型及び楕円型の淀み点の両方を有することが特徴の一つである. 双曲型淀み点近傍においては, 高分子は強く伸張する事が期待出来るため [19], 高分子が流れ場に及ぼす影響を調べるのに適している. また他の興味深い点として, 2枚の回転する円盤内に挟まれた流体に生じる流れ場 (von Kármán 流れ) との類似性が挙げられる [20]. この流れ場における弾性乱流の実験研究が行われており [5], 実験結果と本研究の結果を比較することは興味深い.

3 数値計算法

本節では式 (1)-(10) の数値計算について簡単に説明する. 計算領域は一辺が $L_{box} = 2\pi$ の立方体とし, 周期境界条件に従う. NS 式の離散化にはスペクトル法を用い, 時間積分には 2 次ルンゲ・クッタ法を用いた. 計算領域を 128^3 の格子点を用いて離散化し, 扱うダンベルの総数は $N_{comp} = N_t/b = 5.04 \times 10^8$ に設定した. ここで b は一つのダンベルに対する仮想的なダンベルのコピーの総数を表す. これは実際に必要とされる高分子の総数 $N_t = O(10^{13})$ が非常に巨大であるため, 計算コストの削減のために導入された [14]. 本研究では $b = 5.675 \times 10^3$ とした. この時, $\Phi_V = 1.0 \times 10^{-4}$, $\eta = 0.1063$ であった. またエネルギー注入率は $\varepsilon_{in} = 0.5$ に固定した.

初期速度場はガウス統計に従うランダムな非圧縮場を与える. 但しそのエネルギースペクトルは $E(k, 0) \propto k^4 \exp(-ck^2)$ に従うように振幅を決定した. ダンベル集団は, 初期に計算領域内に一様に分布させる. この時の各ダンベルの末端間ベクトルは, $\mathbf{R}^{(n)}(0) = \sqrt{3}r_{eq}\hat{\mathbf{n}}^{(n)}$ で与える. ここで $\hat{\mathbf{n}}^{(n)}$ は一様乱数により作られるランダムな成分を持つ単位ベクトルである.

Table 1: Taylor-Green 流れの直接数値計算とダンベル集団のブラウン動力学計算における計算パラメータ及び基本統計量を示す。 \bar{R}_λ , \bar{E} , $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\varepsilon}_p$ は $126 \leq t/T_e \leq 170$ に渡って時間平均した値を示している。

Run	τ	W_i	\bar{R}_λ	\bar{E}	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}_p$
F1	2.74	5	4.03	0.364	0.362	0.138
F2	5.48	10	1.97	0.137	0.214	0.286
F3	11.0	20	2.06	0.150	0.234	0.266

並列計算について述べる。ダンベルの総数をいくつかのノードに分割して割り当て、各ノードで独立にダンベル集団の時間発展を計算する。この際、速度場の情報が必要になる。流体場は一つのノードで計算し、このノードとその他のノードとの間で速度場、およびポリマーストレス場のデータを送受信しながら計算を行う [15]。ノード間のデータ通信は Message Passing Interface (MPI) を用いてコーディングを行った。ビーズ位置における流速は、TS13 スキーム [21] を用いて補間により求めた。またポリマーストレス項の計算では、式 (7) の中にあるデルタ関数を近似的に扱う必要がある。ここでは線形補間で用いられる重み関数を用いて近似した [22]。その他パラメータ設定方法についての詳細は、Watanabe & Gotoh (2013), (2014) [14, 16] を参照されたい。

本研究では、3 ケースの W_i 数について計算を行った。この時の W_i は $W_i \equiv \tau(\varepsilon_{in}/\nu_s)^{1/2}$ で定義される。他の計算条件は 3 ケースで完全に一致している。計算パラメータ、統計量についてまとめたものを Table1 に示す。

4 結果と考察

4.1 流れ場の構造

最初に系に高分子を添加せずに、定常な渦流れを実現した ($0 \leq t/T_e < 22$)。ここで T_e は巨視的代表的代表時間であり、TG 渦の空間周期 $L = \pi$ と ε_{in} を用いて $T_e = (L^2/\varepsilon_{in})^{1/3}$ で定義した。初期値より $6T_e$ 程経過後、系の運動エネルギーなどの一点統計量はすべてある定数に収束し、流れ場は定常状態になった。この時の流れ場の様子を Fig. 1 に示す。この可視化図より、流れ場は規則正しい渦構造が領域内に周期的に配置され、流線は渦構造の周囲を円状に取り囲んでいることがわかる。この定常流れ場は TG 渦の流れ場と似た構造を有するが、 $u_3 \neq 0$ であり一致はしない。

次に乱流化した際の流れ場の構造について議論する。Fig. 2 は、Run F2 においてダンベル集団を分散後、 $t/T_e = 170$ における渦度場および流線の構造を可視化したものである。ダンベル集団を分散して流れ場が不規則に時間変化するようになると、TG 流れに特徴的な渦構造は消滅している。また流線も複雑に曲がった構造になり、流れ場が乱流化していることがわかる。実際に時間変化する様子を観測すると、初期の渦構造が位置を微妙に変化させながらランダムに変動し、時間経過と共に初期の渦構造は消滅し、流れ場全体が不規則に変動しながら乱流化する。

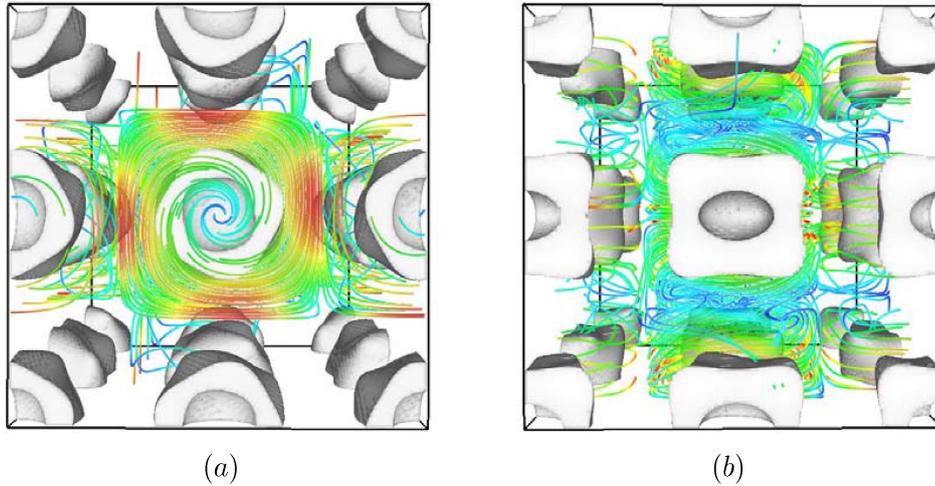


Figure 1: Taylor-Green 流れによる流れ場の構造を、速度勾配テンソルの第2不変量の等値面（グレー）と流線（カラー：色は速度の大きさを表す）を用いて可視化したもの。高分子添加前の様子を表し、流れ場は定常であり、渦構造や流線は時間変化しない。(a) x_3 軸の正の方向から見た図, (b) x_2 軸の正の方向から見た図。

4.2 一点統計量の時間発展

本節では、系のエネルギー収支について議論する。系の全エネルギー $T(t)$ は、流体の運動エネルギー $E(t)$ とダンベル集団の弾性エネルギー $U(t)$ の和である。 $E(t)$ 及び $U(t)$ はそれぞれ次式で定義される。

$$E(t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle_V, \quad U(t) = -\frac{\nu_s \eta}{2\tau} \left(\frac{L_{max}}{r_{eq}} \right)^2 \left\langle \ln \left(1 - \left(\frac{R^{(n)}}{L_{max}} \right)^2 \right) \right\rangle_p \quad (11)$$

ここで $\langle \dots \rangle_p$ はダンベルの総数による平均を表す。 Figure 3 に $E(t), U(t)$ の時間変化の様子をそれぞれ示す。 $t/T_e = 22$ でダンベル集団を系に一樣に分散させると、流れ場の運動エネルギーは急激に減少し、Run F2, F3 では不規則な時間変化を示す。一方で Run F1 では振幅は非常に小さいが、およそ周期的な振動が観測できる。図より、不規則振動の時間変化の様子は W_i の値によって差異があるが、振動の振幅は小さく、また短い周期と長い周期が混在している事がわかる。一方で $U(t)$ はダンベル集団を分散直後に急激に増大し、その後一定値の周りで振動するようになる。これはダンベル集団が流れ場により強い伸張を受けたことを意味する。 W_i の値が大きい程、より大きな弾性エネルギーを保有していることがわかる。特に流れ場が不安定化している Run F2, F3 においては、 $U > E$ となっている。即ち、系は弾性エネルギーが支配的である。

$E(t)$ 及び $U(t)$ の時間発展方程式は、

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\varepsilon(t) - \varepsilon_p(t) + \varepsilon_{in}, \quad \frac{dU(t)}{dt} = \varepsilon'_p(t) - \varepsilon_s(t) + \varepsilon_B(t), \quad (12)$$

である。ここで各方程式の右辺に出てくる項の定義はそれぞれ次のようである。

$\varepsilon(t) = \nu_s \langle (\nabla \mathbf{u})^2 \rangle_V$: 運動エネルギー散逸率,

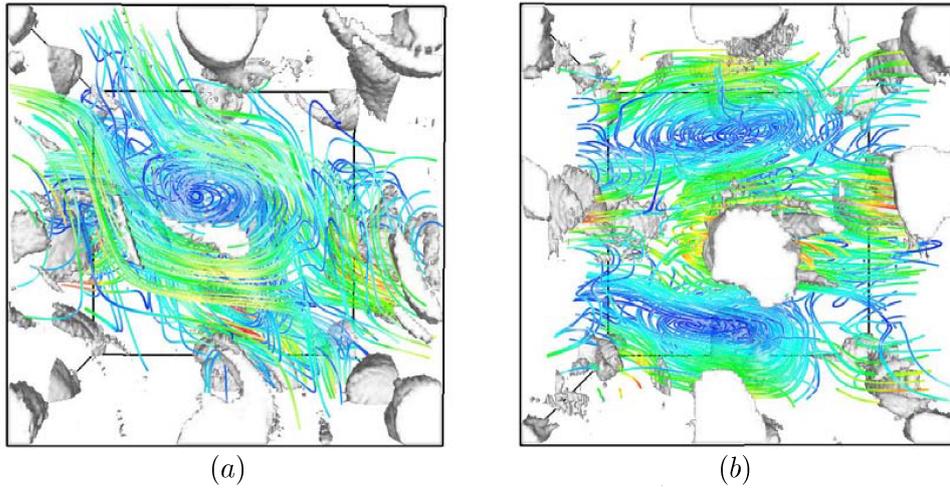


Figure 2: Run F2において,高分子添加後の乱流化した流れ場の様子を示す.渦構造の可視化法は Fig. 1 と同様である. (a) x_3 軸の正の方向から見た図, (b) x_2 軸の正の方向から見た図.

$$\begin{aligned} \varepsilon_p(t) &= \langle \mathbf{S} : \mathbf{T}^p \rangle_V : \text{ダンベル集団による運動エネルギーの減少率,} \\ \varepsilon_{in} &: \text{外力によるエネルギー注入率 (本研究では一定値),} \\ \varepsilon'_p(t) &= \nu_s \eta / (\tau r_{eq}^2) \langle \delta \mathbf{u}^{(n)} \cdot \mathbf{R}^{(n)} f(|\mathbf{R}^{(n)}|/L_{max}) \rangle : \text{流れによる弾性エネルギーの増加率 (= } \varepsilon_p), \\ \varepsilon_S(t) &= \nu_s \eta / 2 (\tau r_{eq})^2 \left\langle [\mathbf{R}^{(n)} f(|\mathbf{R}^{(n)}|/L_{max})]^2 \right\rangle_p : \text{バネ復元に伴う弾性エネルギーの減少率,} \\ \varepsilon_B(t) &: \text{ブラウン運動による } U \text{ の揺動 } (\simeq 0). \end{aligned}$$

Figure 4 に $\varepsilon(t)$, $\varepsilon_p(t)$ の時間変化の様子をそれぞれ示す. 高分子の影響がなく,系が定常状態にあれば $\varepsilon(t) = \varepsilon_{in}$ となる. 図より, $7.4 \leq t/T_e \leq 22$ でこれが観測される. ダンベル集団を分散した $t/T_e = 22$ 以降では, $E(t)$ と同様に $\varepsilon(t)$ は急速に減少し, Run F2, F3 では不規則な振動を始める. 一方で $\varepsilon_p(t)$ は増大し, 一定値の周りで不規則に振動するようになる. これは運動エネルギーの一部がダンベル集団に輸送され, 弾性エネルギーとして蓄えられるようになった事を意味する. またエネルギー注入率が一定であるため, Table 1 より, $\varepsilon_{in} = \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_p$ が成り立つことが確認できる. Figure 5 に $\varepsilon'_p(t)$, $\varepsilon_S(t)$ の時間変化の様子をそれぞれ示す. ε'_p は ε_p と同じ振る舞いであることが確認できる. これは本計算での 2way カップリング計算が精度良く行われていることを意味する. また $t/T_e > 60$ において, ε_S の振る舞いは ε'_p の振る舞いに大体一致しているようである. これは流れ場からのストークス抵抗によりダンベルが引き延ばされる力と, バネの復元力が平均的に釣り合った統計的な定常状態にあることを意味している.

全エネルギーの発展式は

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\varepsilon(t) - \varepsilon_S(t) + \varepsilon_{in}, \quad (13)$$

となるので, 系全体のエネルギー収支をみると, 結局 ε_{in} で系にエネルギーが注入され, それが ε と ε_S により散逸されるということになる. ε_p , ε'_p は流れ場とダンベル集団とのエネルギーのやりとりに寄与するが, 全エネルギー $T(t)$ の増減への寄与はない.

次に, エンストロフィーの収支方程式を見ていく. 渦度を $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ とすると, エンスト

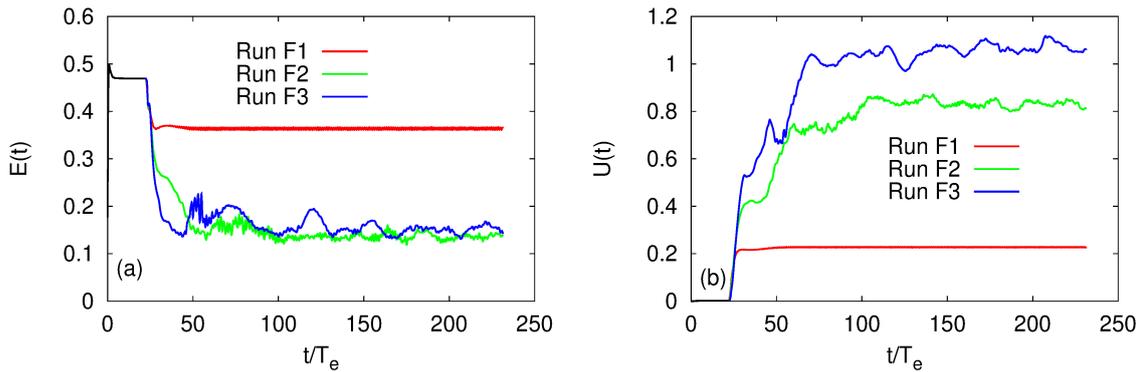


Figure 3: (a) 流体の体積平均運動エネルギーの時間変化, 及び (b) ダンベル集団の弾性エネルギーの時間変化, の様子をそれぞれ示す.

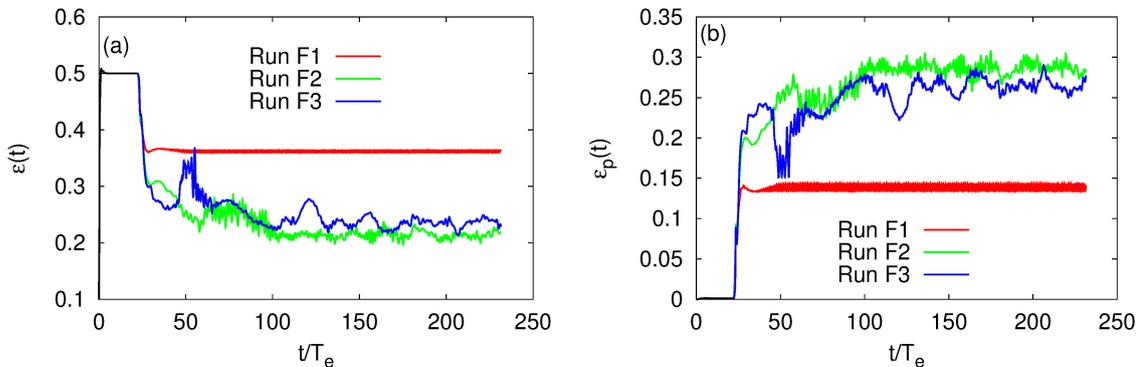


Figure 4: (a) 運動エネルギー散逸率 $\epsilon(t)$, 及び (b) ダンベル集団との相互作用によるエネルギー減少率 $\epsilon_p(t)$, の時間変化の様子をそれぞれ示す.

ロフィー $E_\omega(t) = \langle \omega^2 \rangle_V / 2$ の時間発展方程式は, 次式で与えられる.

$$\frac{d}{dt} E_\omega(t) = \langle \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle_V - \langle (\nabla^2 \mathbf{u}) \cdot (\nabla \cdot \mathbf{T}^p) \rangle_V - \nu_s \langle (\nabla \boldsymbol{\omega})^2 \rangle_V + F_\omega. \quad (14)$$

式(14)において, 右辺第1項及び第3項は渦の引き延ばしによるエンストロフィー生成項, 粘性によるエンストロフィー散逸項をそれぞれ表す. 高分子の影響は右辺第2項に現れ, これは運動量の拡散項とポリマーストレス項の相関を表している. Figure 6に式(14)の右辺の各項の時間変化の様子をそれぞれ示す. 各項とも, Run F1では単調な周期的振動であるが, F2, F3では不規則な振動をしていることがわかる. また Run F2, F3においては, エンストロフィー生成項の寄与は他の項に比べてほとんど無視できる程であることに注意したい. 即ち, この流れにおいて移流項による非線形性は重要でないことを意味する. 一方で右辺第2項の寄与は十分大きく, これはエンストロフィー散逸項と外力項 F_ω の和とほぼバランスしている. ダンベルの伸張によるポリマーストレス場と流れの相互作用が, 流れ場の乱流化を引き起こしていると考えてよいだろう.

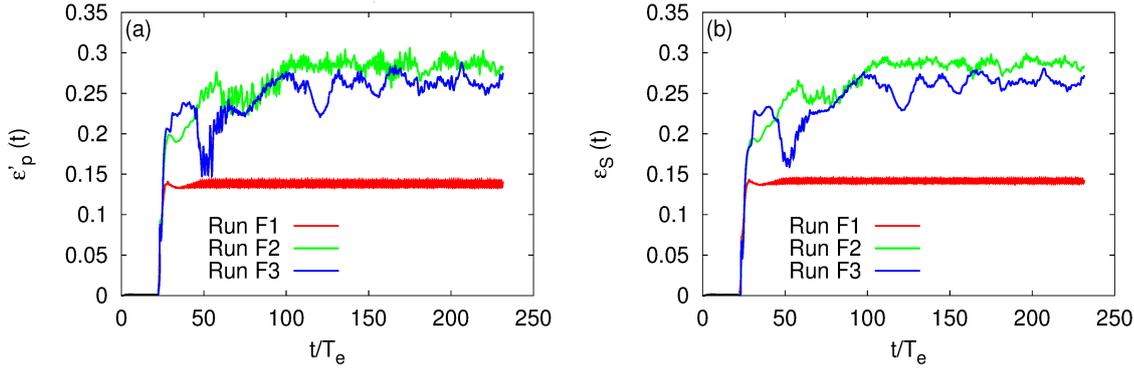


Figure 5: (a) 流れ場からの弾性エネルギーの注入率 $\epsilon'_p(t)$, 及び (b) バネ復元に伴う弾性エネルギーの減少率 $\epsilon_s(t)$, の時間変化の様子をそれぞれ示す。

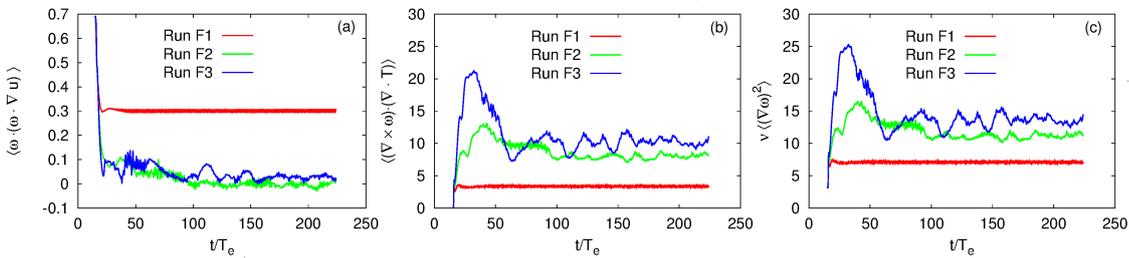


Figure 6: エンストロフィー輸送方程式に現れる各項の時間変化の様子を示す. (a) 渦度の引き延ばしによるエンストロフィー生成項, (b) ポリマーストレスと粘性の相関によるエンストロフィー生成・消滅項, (c) エンストロフィー散逸項.

4.3 エネルギースペクトルの振る舞い

次に, 十分な時間経過後に統計的に定常状態になったと見なして, $126 \leq t/T_e \leq 170$ において時間平均をとったエネルギー散逸スペクトル $D(k) = 2\nu_s k^2 E(k)$ を求めた. また場の非等方性を考慮して, u_3 成分のみのエネルギースペクトル $E_{33}(k)$ の振る舞いについても同様に調べた. Run F2, F3 の結果を Fig. 7 に示す. この結果より, 散逸スペクトルは共に $2 < kl_K < 5$ の範囲でべき則に近い振る舞いを示すことが確認できる. べき指数の値は 2.5 程度であり, $E(k) \sim k^{-4.5}$ の振る舞いを意味している. ただしスケーリング則が成り立つ領域はかなり狭い. これは非常に明確なスケーリング領域が存在した減衰乱流による結果 [15] とは対照的である. 指数の値を見ると, 弾性乱流の実験および構成方程式の DNS 研究で得られた値に比べて若干大きい様に思われる. 指数の値はむしろ減衰性等方乱流で得られた結果 ($\alpha = 4.2 - 4.6$) [15] とよく一致している.

4.4 周波数スペクトルの振る舞い

本節では, 速度成分 u_i の時系列からパワースペクトルを求め, スペクトルの振る舞いについて考察する. 時系列データは計算領域内の 36 点 $((x_1, x_2, x_3) = 0.5\pi(i, j, k); (i, j = -1, 0, 1), (k = -2, -1, 0, 1))$ について, 各速度成分の時系列データ (長さ $T = 245.76$) を保存し, その

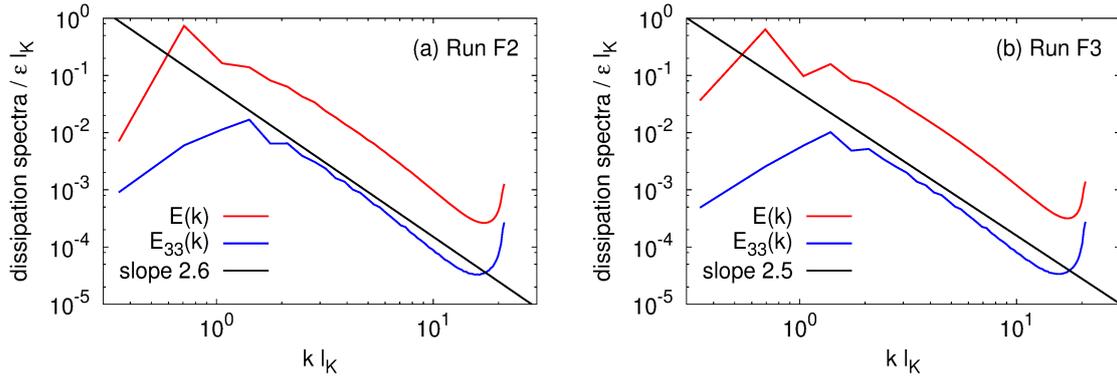


Figure 7: 時間平均をとった散逸スペクトル ($2\nu_s k^2 E(k)$ 及び $2\nu_s k^2 E_{33}(k)$) の振る舞いを示す。(a) Run F2, (b) Run F3の結果をそれぞれ示している。縦、横軸共Kolmogorovスケールを用いて無次元化している。

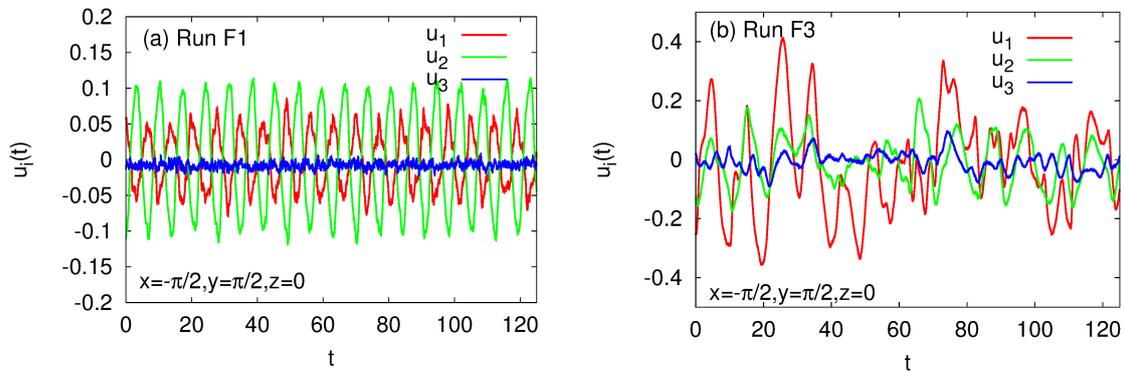


Figure 8: $x_1 = -\pi/2, x_2 = \pi/2, x_3 = 0$ の点における各速度成分の時間変動の様子を示す。(a) Run F1, (b) Run F3による結果をそれぞれ示している。

パワースペクトル

$$P_i(\omega|\mathbf{x}) = \left\langle \left| \frac{1}{T_d} \int_0^{T_d} u_i(s) e^{-i\omega s} ds \right|^2 \right\rangle \quad (15)$$

を求めた。なお $T_d = T/6$ とし、スペクトルを求める際には、時系列データに Welch の窓関数を掛けてその振る舞いを推定している。

Figure 8 に $x_1 = -\pi/2, x_2 = \pi/2, x_3 = 0$ における速度成分 u_i ($i = 1, 2, 3$) の時間変動の様子を Run F1, Run F3 についてそれぞれ示す。Run F1 についてみると、各速度成分はほぼ周期的な振動をしていることがわかるが、Run F3 においてはそれが不規則になっており、流れ場が不安定化して乱流状態になっていることがわかる。また u_3 の揺らぎの大きさは u_1, u_2 に比べてかなり小さい。これは TG 流れを誘起する外力が NS 式の x_3 成分に含まれないことが要因である。このような時系列の振る舞いは、他の座標点においても同様であった。

次に時間変動のパワースペクトルの振る舞いについて議論する。36 点で測定したパワースペクトルを 6 つのグループ ($a_1 - a_6$ と名付ける) に分類し、統計的な収束性を向上させるために、各グループでのパワースペクトルのアンサンブル平均をとることにした。グループは

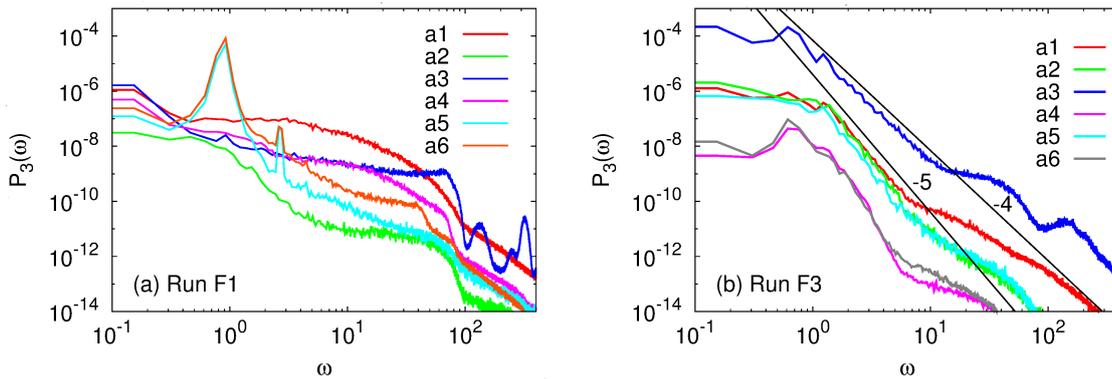


Figure 9: 時系列データから得られた周波数スペクトルの振る舞いを示す。 a_1 - a_6 はそれぞれ時系列データの測定点の特徴からグループ分けして、そのグループで集合平均をとっている。(a) Run F1, (b) Run F3 の結果をそれぞれ示している。(b) については振る舞いを見やすくするために、 a_1, a_2, a_5 及び a_4, a_6 の結果をそれぞれ $1/50$ 倍および $1/2500$ 倍にしてプロットしている。

TG 外力が測定点に働いているか否かにより大きく 2 グループ ($a_1 - a_3$ と $a_4 - a_6$) に分けられる。さらに各グループは TG 外力のよどみ点が存在する場所 (a_1, a_4 : 双曲型, a_2, a_5 : 楕円型) と存在しない場所 (a_3, a_6) にそれぞれ分けられる。 u_3 成分のパワースペクトルの振る舞いを Run F1, F3 についてそれぞれまとめたものを Fig. 9 に示す。Run F1 の結果についてみると、 a_5, a_6 には $\omega = 1$ 近傍で特徴的なピークが観測される。これは時系列の周期振動を反映したものである。他のグループについては特徴的な振動は観測されないが、いずれの場合にもパワースペクトルの強度は小さく、またスペクトルの冪的な振る舞いは観測されない。一方で Run F3 の結果に着目すると、 a_1, a_2, a_3, a_5 では特徴的な冪的減衰の領域が確認できる。特に a_3 では幅広い領域で ω^{-4} に近い振る舞いが確認できる。一方で a_1, a_2, a_5 の各グループでは、これよりも急峻なスペクトルになっており、その振る舞いは ω^{-5} に近い。これらの結果は、Run F3 の速度変動が不規則であり、幅広い時間スケールを伴う揺らぎとなっていることを示している。

外力場は、観測点における流れ場の局所構造をある程度規定すると考えられる。つまり、観測点によって揺らぎの統計性質が異なることは、その局所構造の違いを反映したものであろうと推察される。局所構造は時間平均速度場によって特徴づけられ、TG 渦と類似した構造を有する。グループ a_3 は時間平均速度場のよどみ点からは外れた、比較的ダンベルの伸張が強く生じている箇所であり、過去の実験研究における弾性乱流のスペクトルに近い振る舞いを示した。一方で a_1, a_2, a_5 の各グループは、よどみ点近傍の観測点であり、このとき a_3 で得られたものより急峻なスペクトルとなった。この結果は、過去の数値的研究 [12] で得られたものとは傾向が逆になっている。

スペクトルの冪則が成り立つスケールについて議論する。スペクトルの冪則は、図からおよそ $1 < \omega < 10$ の間で観測される。扱っている系の代表的な時間スケールは、ダンベルの緩和時間 τ 及び流れ場の特性時間 $\tau_K = (\nu/\varepsilon_{in})^{1/2}$ であろう。これらの時間スケールに対応する角振動数は、Run F3 においてそれぞれ $\omega_s = 2\pi/\tau = 0.574$, $\omega_K = 2\pi/\tau_K = 11.5$ である。よって冪則が成り立つのは、局所的なシアの強さで決まる時間スケール τ_K より長い、ダンベルの緩和時間 τ より短い時間スケールということになる。これは物理的には最もらしい結果であるように思われる。

一方で前節で議論したエネルギースペクトルにおいては、 $kl_K > 1$ において冪則に近い振

る舞いが観測されている。冪則が成り立つ領域の最小スケールが物理的に何によって定まっているかは現時点では不明であるが、 l_K よりも小さなスケールは、 τ_K よりも短い時間スケールの揺らぎに対応すると考えられる。よって時間変動と空間変動の揺らぎにおいて、相似則が成立するスケール領域が異なっていると考えられる。

5 まとめ

本研究では、鎖状高分子としてダンベルモデルを、Taylor-Green 流れ場に多数分散したオイラー・ラグランジュ計算を実行し、流れ場に非定常な不規則運動が出現することを見いだした。速度変動は時間的に不規則な振動を示し、そのパワースペクトルは弾性乱流に特徴的な冪的減衰を示すことを見いだした。但し、パワースペクトルの振る舞いは、観測点によって大きく異なるようである。スペクトルの冪指数の値や、観測点による振る舞いの差異、及び波数スペクトルと周波数スペクトルの振る舞いの関連性を理論的に説明することは今後の大きな課題である。

謝辞

本研究を実施するにあたり、V. Steinberg 博士及び松本剛博士に有益なコメントをいただいた。本研究は科学研究費補助金（課題番号 26420106, 24360068）の援助を受けて行われた。また、核融合科学研究所、及び名古屋大学情報基盤センター（JHPCN, HPC）に計算機資源を提供して頂いた。ここに記して感謝の意を表す。

References

- [1] A. Groisman and V. Steinberg, *Nature* **405**, 53–55, (2000)
- [2] A. Groisman and V. Steinberg, *Nature* **410**, 905–908, (2001)
- [3] A. Fouxon and V. Lebedev, *Phys. Fluids* **15**, 2060 (2003).
- [4] T. Burghlea, E. Segre, and V. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 164501 (2004).
- [5] A. Groisman and V. Steinberg, *New J. Phys.*, **6**, 29 (2004).
- [6] G. Boffetta, A. Celani, A. Mazzino, A. Puliafito, and M. Vergassola, *J. Fluid Mech.* **523**, 161 (2005).
- [7] P. E. Arratia, C. C. Thomas, J. Diorio, and J. P. Gollub, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 144502 (2006).
- [8] T. Burghlea, E. Segre, and V. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 214502 (2006).
- [9] S. Berti, A. Bistagnino, G. Boffetta, A. Celani and S. Musacchio, *Phys. Rev. E* **77**, 055306 (2008).
- [10] Y. Jun and V. Steinberg, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 124503 (2009).
- [11] S. Berti and G. Boffetta, *Phys. Rev. E* **82**, 036314 (2010).

- [12] M. Grilli, A. Vazquez-Quesada, and M. Ellero, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 174501 (2013).
- [13] L. Pan, A. Morozov, C. Wagner, and P. E. Arratia, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 174502 (2013).
- [14] T. Watanabe and T. Gotoh, *J. Fluid. Mech.* **717**, 535 (2013).
- [15] T. Watanabe and T. Gotoh, *J. Phys.: Conf. Ser.* **454**, 012007 (2013).
- [16] T. Watanabe and T. Gotoh, *Phys. Fluids* **26**, 035110 (2014).
- [17] R. B. Bird, C. F. Curtiss, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol.2 Kinetic Theory*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1987).
- [18] M. Doi and S. F. Edwards, *The Theory of Polymer Dynamics*, (Oxford University Press, New York, 1986).
- [19] T. Watanabe and T. Gotoh, *Phys. Rev. E* **81**, 066301 (2010).
- [20] B. Durbrulle, P. Blaineau, O. M. Lopes, F. Daviaud, J-P Laval and R. Dolganov, *New J. Phys.* **9**, 308 (2007).
- [21] P. K. Yeung and S. B. Pope, *J. Comp. Phys.* **79**, 373–416 (1988).
- [22] K. Squires, in *Computational Methods for Multiphase Flow*, (edited by A. Prosperetti and G. Tryggvason, Cambridge University Press, Cambridge, 2007).