

巡回 KLR 代数の冪等元とブリュアグラフ

名古屋大学 多元数理科学研究科 小西 正秀*

Masahide Konishi
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

概要

或る制限をつけた KLR 代数及び巡回 KLR 代数の原始冪等元に関する情報は、ブリュアグラフ及びグラフからある手順を経て得られる数から得られる。この報告書ではその対応について説明し、最後にこの問題に着手した経緯について述べる。

1 ブリュアグラフ

S_n を n 次対称群とし、その生成元を $s_k = (k, k + 1)$ ($1 \leq k < n$) と書く。このとき、 S_n に付随するブリュアグラフ B_n が次のように定められる。

定義 1.1. S_n に付随するブリュアグラフ B_n とは、各 $\sigma \in S_n$ を頂点として持ち、頂点 σ_1 と σ_2 に対し、 $\sigma_1 = s_k \sigma_2$ となる s_k が存在する場合、二頂点間に辺を引いた無向グラフである。

特に B_n は位数 $n!$ の $(n - 1)$ 正則単純 (輪と多重辺を持たない) グラフとなる。使い勝手を良くするため、頂点と辺に対するラベルを次のように定める。 $\sigma \in S_n$ は列 $(1, 2, \dots, n)$ に位置の入れ換えとして左から作用するものとする。(例: $s_1 s_2(1, 2, 3) = s_1(1, 3, 2) = (3, 1, 2)$.)

B_n において、頂点 σ の代わりに $\sigma(1, 2, \dots, n)$ と書く。また、頂点 σ_1 と σ_2 の間の辺については、 s_k で入れ替わった数 (即ち σ_1 の k 番目と $(k + 1)$ 番目の数) によりラベル付けする。

このとき、頂点集合が $\{1, 2, \dots, n\}$ である単純グラフ G を用いて、 B_n を切るという操作を次で定義する。

定義 1.2. グラフ G により B_n を切るとは、 G の各辺 ij ($1 \leq i, j \leq n$) に対し、 B_n から ij でラベル付けされた辺を取り除くことである。このとき得られるグラフを B_G で表す。

G が空 (辺を持たない) グラフでない限り B_G は非連結となることに注意する。

また、 $\{1, 2, \dots, n\}$ の部分集合 T に対し、 B_G を削るという操作を次で定義する。

定義 1.3. 部分集合 T により B_G を削るとは、 T の各要素 i ($1 \leq i \leq n$) に対し、 B_G から i で始まる列 (頂点) を含む連結成分を取り除くことである。このとき得られるグラフを B_G^T で表す。¹

この節で準備すべき内容は以上であるが、いくつか例を挙げておく。

- (1) G を空グラフ、 T を空集合とした場合は $B_n = B_G = B_G^T$ となる。
- (2) T の補集合と G のある連結成分との共通部分が空となることと $B_G^T = \phi$ となることは同値。
- (3) G をサイクル C_n ($n \geq 2$)、即ち n を法として i と $i + 1$ を結ぶグラフとし、 T が一点から成る場合、 B_G^T の頂点数は 2^{n-2} 、連結成分の数は $n - 1$ となる。

*m10021t@math.nagoya-u.ac.jp
¹頂点集合が空集合となる場合もある。

2 KLR 代数と巡回 KLR 代数

この報告書において扱う KLR 代数は, n 個の頂点を持つ輪と多重矢を持たない籓 Γ 及びその頂点集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ への単純な重み付け, 即ち全ての重みが 1 であるものから得られる範囲のものとする. このとき, KLR 代数 R_Γ は以下で定義される. $I_n = \{\sigma(1, 2, \dots, n) \mid \sigma \in S_n\}$ とする.

定義 2.1. KLR 代数 R_Γ は次の生成元と関係式から定まる.

- 生成元:

$$\{e(\mathbf{i}) \mid \mathbf{i} \in I_n\} \cup \{y_1, \dots, y_n\} \cup \{\psi_1, \dots, \psi_{n-1}\}.$$

- 関係式:

$$e(\mathbf{i})e(\mathbf{j}) = \delta_{\mathbf{i}, \mathbf{j}}e(\mathbf{i}),$$

$$\sum_{\mathbf{i} \in I_n} e(\mathbf{i}) = 1,$$

$$y_k e(\mathbf{i}) = e(\mathbf{i}) y_k,$$

$$\psi_k e(\mathbf{i}) = e(s_k \mathbf{i}) \psi_k,$$

$$y_k y_l = y_l y_k,$$

$$\psi_k y_l = y_l \psi_k \quad (l \neq k, k+1),$$

$$\psi_k \psi_l = \psi_l \psi_k \quad (|k-l| > 1),$$

$$\psi_k y_{k+1} e(\mathbf{i}) = y_k \psi_k e(\mathbf{i}),$$

$$y_{k+1} \psi_k e(\mathbf{i}) = \psi_k y_k e(\mathbf{i}),$$

$$\psi_k^2 e(\mathbf{i}) = \begin{cases} e(\mathbf{i}) & (i_k \not\leftrightarrow i_{k+1}) \\ (y_{k+1} - y_k) e(\mathbf{i}) & (i_k \rightarrow i_{k+1}) \\ (y_k - y_{k+1}) e(\mathbf{i}) & (i_k \leftarrow i_{k+1}) \\ (y_{k+1} - y_k)(y_k - y_{k+1}) e(\mathbf{i}) & (i_k \leftrightarrow i_{k+1}) \end{cases},$$

$$\psi_k \psi_{k+1} \psi_k e(\mathbf{i}) = \psi_{k+1} \psi_k \psi_{k+1} e(\mathbf{i}).$$

関係式の一番目と二番目より, 各 $e(\mathbf{i})$ は 1 を分解する互いに直交する冪等元であり, R_Γ は左加群として $\bigoplus_{\mathbf{i} \in I_n} R_\Gamma e(\mathbf{i})$ と射影加群の直和に分解される. 以下射影加群 $R_\Gamma e(\mathbf{i})$ を $P(\mathbf{i})$ と記す.

今回の設定の下では $e(\mathbf{i})$ が全て原始(それ以上"小さく"直交する冪等元の和として表せない)冪等元であることが分かる.(証明には KLR 代数の"図示"とトポロジーと代数の基本的な事実を用いる.) よって $P(\mathbf{i})$ は全て直既約射影加群だと分かる.

関係式の四番目から, $P(\mathbf{i})$ から $P(s_k \mathbf{i})$ への準同型写像として, $x e(\mathbf{i}) \mapsto x e(\mathbf{i}) \psi_k = x \psi_k e(s_k \mathbf{i})$ が定まる. 更に, $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ の i_k と i_{k+1} において, Γ の中で矢がない場合は, 関係式の十番目から $x e(\mathbf{i}) \mapsto x e(\mathbf{i}) \psi_k \mapsto x e(\mathbf{i}) \psi_k \psi_k = x e(\mathbf{i})$ より同型写像となることが分かる. また, そうでない場合は $P(\mathbf{i})$ と $P(s_k \mathbf{i})$ が非同型であることが [2] の Proposition 2.3. の系として得られる.

この節の最後に巡回 KLR 代数を定義する. 先ほどとは別に, 頂点集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ への非負整数による重み付け $\Lambda = \sum_{i=1}^n b_i \Lambda_i (b_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を定める. I^Λ を $\{y_1^d e(\mathbf{i}) \mid \mathbf{i} \in I_n, d = b_{i_1}\}$ で生成される R_Γ のイデアルとする. このとき, $R_\Gamma^\Lambda = R_\Gamma / I^\Lambda$ を巡回 KLR 代数と呼ぶ. 特に R_Γ^Λ は有限次元代数となる.

R_Γ から R_Γ^Λ への自然な全射において $e(\mathbf{i})$ が 0 となることも有り得る. しかし R_Γ^Λ においても 0 でない $e(\mathbf{i})$ は原始冪等元となり, 上記の直既約射影加群への分解, 及びそれらの同型性についてはそのまま成り立つ.(勿論 R_Γ における $P(\mathbf{i})$ と R_Γ^Λ における $P(\mathbf{i})$ は区別する必要があるが, 特に混乱が生じない場合はどちらも $P(\mathbf{i})$ と記す.) また, どのような $e(\mathbf{i})$ が 0 となるかもそこから割り出せる.

3 対応

さて、前二節で定義した二つの対象であるが、次のような対応をもつことが自然と分かる。

籠 Γ に対し、頂点集合は同じで、二頂点間に矢が存在するか否かを辺を持つか否かの情報に落とした無向グラフを $\bar{\Gamma}$ とする。重み付け Λ に対し、 $Z = \{k | b_k = 0\}$ とする。

定理 3.1. (a) グラフ $B_{\bar{\Gamma}}$ の頂点 i と KLR 代数 R_{Γ} の直既約射影加群 $P(i)$ を対応させると、次は同値となる。

- グラフ $B_{\bar{\Gamma}}$ の二点 j と k を結ぶ道の存在。
- KLR 代数 R_{Γ} の二つの直既約射影加群 $P(j)$ と $P(k)$ が同型。

特にグラフ $B_{\bar{\Gamma}}$ の連結成分の数と KLR 代数 R_{Γ} における直既約射影加群の同型類の個数は一致する。

(b) グラフ $B_{\bar{\Gamma}}^Z$ と巡回 KLR 代数 R_{Γ}^{Λ} についても同様のことが成り立つ。

但し、 $B_{\bar{\Gamma}}^Z$ において削られた頂点 i に対応する $P(i)$ は 0 となる。

これらの結果から二つの対象を往来することが可能となった。 B_G や B_G^T のみの世界では一般の数え上げは困難であるが、 R_{Γ} や R_{Γ}^{Λ} の世界の情報を得るために使用可能であり、またそこから或るクラスに対し B_G や B_G^T の数え上げが構成可能になる。これにより双方の世界が互いを利用しつつ明らかとなっていくことを期待したい。

4 グラフ縮小数

この節は前節までと少し趣が異なる。目的は R_{Γ}^{Λ} における零でない $e(i)$ をより簡単に数え上げることにある。前節と同様に、まずは籠 Γ から無向グラフ $\bar{\Gamma}$ を得る。 Z の要素が n である場合、即ち $\Lambda = 0$ の場合は $R_{\Gamma}^{\Lambda} = 0$ なので以後は考えない。

まずは無向グラフ G とある頂点 k の組 (G, k) に対し、次のような規則でグラフを縮めつつ、最終的に非負整数 $N(G, k)$ を得ることを考える：

規則 0a G が一点 k である場合、 $N(G, k) = 1$ 。

規則 0b G が非連結である場合、 $N(G, k) = 0$ 。

規則 1 G の頂点数が 2 以上の場合、 $N(G, k) = \sum_{k \text{ に隣接する } l} N(G_{kl}, k)$ 。

但し G_{kl} は G において k と l を同一視して得られるグラフとする。

また、 G とその頂点集合の空でない部分集合 J の組 (G, J) に対し、グラフ G^J を、 G において J に属する各頂点を辺で結んだものとして、非負整数 $N(G, J)$ を次のように与える：

規則 2 $N(G, J) = \sum_{k \in J} N(G^J, k)$ 。

これらの各規則は $e(i)$ が 0 とならないような i の構成と対応しており、従って次が成り立つ。 Z^c を Z の補集合とする。

定理 4.1. R_{Γ}^{Λ} における 0 でない $e(i)$ の数は、 $N(\bar{\Gamma}, Z^c)$ で与えられる。

また、各手順を追うことで $e(i) \neq 0$ なる i も分かる。

5 補足

先ず始めに、講演者のグラフ理論近辺の知識不足により、恐らく既に言葉が与えられている定義に対し勝手な言葉を与えている可能性についてお詫び申し上げる。

特にグラフ縮小数に関しては彩色数を求める方法をより単純化した形であるので、既に様々なことが既知であろうと思われたので、書くことを必要最低限に留めた。

今回の問題に着手した経緯であるが、これは KLR 代数或いは巡回 KLR 代数を基本化し、籠 Q とその道代数 KQ 上の許容イデアル I を用いて KQ/I の形で表したいというのが元々の問題であった。その初手として Q の頂点数を定めるのが三節の結果である。

最近の進展では、次のような操作で籠 Q と許容イデアル I が得られることが示された。ここまでのような組合せ論的な内容ではないため、粗筋を述べるに留める。まず Q の各頂点に対応する連結成分から取る要素 $e(\mathbf{i})$ を固定した上で、各々の頂点に n 本の輪 ($y_n e(\mathbf{i})$ に対応する) をつけ、 B_n において隣接していた (即ち B_Γ を作る際に分離された) 連結成分の間に互いに矢を引く。この矢は \mathbf{i} から \mathbf{j} を得る置換 σ に対応する ψ_σ と対応する。次に KLR 代数における関係及び巡回イデアルの生成元に対応するイデアル I の生成元を得る。一般にここで得られる I は許容イデアルではなく、その理由は次の二つの関係式にある：

$$\text{甲. } \psi_k^2 e(\mathbf{i}) = \pm(y_{k+1} - y_k)e(\mathbf{i}),$$

$$\text{乙. } \Lambda \text{ において } b_i = 1 \text{ なる } i \text{ が先頭となる } e_1 \text{ に対し, } y_1 e(\mathbf{i}) = 0.$$

各々矢を置換或いは消去し、その矢を用いる生成元に代入して操作は完了する。

一般に Q の頂点の個数を求める時点で手計算が困難な状態であるが、この結果はそこから更に莫大な計算を行うことを必要としており、 Γ の型を固定するなどした上での操作の簡略化が望まれる。

また、操作が最も簡単になる例として、 Γ が各二頂点に対し矢が互いに伸びている籠、 Λ の各 b_i が 2 以上のときは、 $B_n = B_\Gamma = B_\Lambda^\dagger$ である上、 e_1 の選出や矢の消去が不要となる。

一連の結果は最初の重み付けを動かすと機能しなくなるが、これを礎としての前進が期待される。

参考文献

- [1] M. Khovanov, A. D. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I*, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.
- [2] A. Kleshchev, A. Ram, *Homogeneous representations of Khovanov-Lauda algebras*, J. Eur. Math. Soc. **12** (2010), 1293–1306.