

## 内村型 $q$ -恒等式とヤング図形

稚内北星学園大学 安東雅訓 (Masanori Ando)  
Wakhok University  
m-ando@wakhok.ac.jp

内村桂輔氏による約数関数と関連した  $q$ -恒等式がある [4]. この式に関して色々な一般化が報告されており, その証明方法も様々だが, ここでは分割の母関数として理解し, 組合せ論の側からの一般化を行う.

### 1 ヤング図形

自然数の減少列  $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\ell)$ ,  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell \geq 1$  を分割と呼ぶ.  $\lambda$  の成分の個数  $\ell$  を  $\lambda$  の長さ, 成分の総和  $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i$  を  $\lambda$  の大きさと呼びそれぞれ  $\ell(\lambda), |\lambda|$  で表す. 分割全体の集合を  $\mathcal{P}$ ,  $n$  の分割全体の集合を  $\mathcal{P}(n)$  で表す. また  $\mathcal{P}(n)$  の位数を  $p(n)$  で表し,  $n$  の分割数と呼ぶ.  $\lambda$  が同じ大きさの成分を持たないとき, すなわち狭義の減少列であるとき相異分割と呼ぶ. 相異分割全体の集合を  $\mathcal{SP}$ ,  $n$  の分割全体の集合を  $\mathcal{SP}(n)$  で表す.

例.  $n = 5$  とすれば,  $\mathcal{P}(5), \mathcal{SP}(5)$  はそれぞれ,

$$\mathcal{P}(5) = \{(5), (41), (32), (311), (221), (2111), (11111)\}, \quad \mathcal{SP}(5) = \{(5), (41), (32)\}.$$

である. 考える数が大きくなれば表示が長くなるため, 分割  $\lambda$  の成分  $k$  の個数を  $m_k(\lambda)$  で表し,  $(1^{m_1(\lambda)} 2^{m_2(\lambda)} \dots n^{m_n(\lambda)})$  の表示も分割  $\lambda$  を表すことにする.

例. 先ほどと同じく  $n = 5$  として  $\mathcal{P}(5)$  をこちらの表示で表せば,

$$\mathcal{P}(5) = \{(5), (41), (23), (1^2 3), (1^3 2), (1^5)\}.$$

ここで,  $m_k(\lambda) = 1$  の  $m_k(\lambda)$  と  $m_k(\lambda) = 0$  の  $k$  については表示を省略している.

分割  $\lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_\ell)$  に対してヤング図形  $Y(\lambda)$  を次で定義する.

$$Y(\lambda) := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

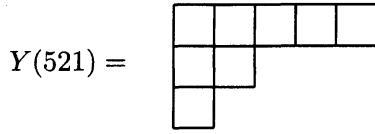
また,  $\lambda$  の角の集合  $C(\lambda)$  を,

$$C(\lambda) := \{(i, j) \in Y(\lambda) \mid (i+1, j), (i, j+1) \notin Y(\lambda)\}.$$

で定義し, その個数を  $c(\lambda)$  で表す. 上の定義ではヤング図形を座標の集合として定義したが, 図としては座標平面の第 4 象限左上に詰めたマス目の集合として表す. すなわち,

例.  $\lambda = (521)$  のヤング図形は,

図 1.



と表される.

ヤング図形  $Y(\lambda)$  とそのマス目  $(i, j)$  に対し,  $a'_{ij}(\lambda) = \lambda_i - j + 1$  を  $\lambda$  の  $(i, j)$ -座高と呼ぶ. これは自分を含めて右側にあるマス目の個数を表している. 自分を含めない場合は  $(i, j)$ -腕長と呼ばれる.

例. ヤング図形のマス目には数字を入れて遊ぶ. 次は  $\lambda = (521)$  のヤング図形の各マス目に座高を入れたもの.

図 2.

5	4	3	2	1
2	1			
1				

各行に成分の階乗風に数字が並ぶ.

## 2 母関数

題名の内村型  $q$ -恒等式を分割の母関数として理解することが話のメインであるため, 練習として簡単な分割での  $q$ -級数の式と母関数の対応を確認しておく. ただし, この練習では分割の母関数といった場合には数列としての分割数の母関数の意味だが, 本番ではもう少しややこしい組合せ論の式になる.

まずは通常の分割と分割数について, その母関数は次の形で表される.

$$\sum_{n \geq 0} p(n)q^n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} q^{|\lambda|} = \frac{1}{(q; q)_{\infty}}$$

ここで  $(a; b)_k = \prod_{i=1}^k (1 - ab^{i-1})$  である. 注意として, どれも分割数の母関数なのだが右側のような  $q$ -級数の式\*1 を「母関数の表示」, 中央のような組合せ論的な式を「母関数の理解」と呼んでいる.

証明. 左の等号は分割数の定義だ. 0 の分割は成分を持たない分割が一つだけ存在するとし,  $p(0) = 1$  と考える. 右側の式を変形すれば,

$$\frac{1}{(q; q)_{\infty}} = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{1 - q^k} = \prod_{k \geq 1} (1 + q^k + q^{2k} + \cdots) = \prod_{k \geq 1} \sum_{m \geq 0} q^{mk}.$$

\*1 どれも  $q$ -級数だが.

多項式の積の計算方法を思い出せば、それぞれの括弧から一つずつ項を選び積をとったものの総和として計算できた。\$k\$ の括弧から \$q^{mk}\$ を選ぶことが分割の成分 \$k\$ の個数 \$m\_k(\lambda)\$ を決定することと対応すると考える。このとき全ての分割を一度ずつ数えることになり、分割 \$\lambda\$ と対応する項の指数を見れば、\$\sum\_{k \geq 1} m\_k(\lambda) = |\lambda|\$ となる。□

相異分割の母関数についても同様に考えよう。通常分割には成分の個数の制限がなかったが、相異分割には同じ成分が現れないため各成分の個数は 1 か 0 だ。多項式の項の選択と分割の成分の個数が対応すると考えれば、

$$\sum_{\lambda \in SP} q^{|\lambda|} = \prod_{k \geq 1} (1 + q^k).$$

が母関数の表示となる。これは先の記号を用いて \$(-q; q)\_\infty\$ と表せる。

### 3 内村型 \$q\$-恒等式

定理 3.1 (Uchimura).

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^{k-1} \frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(q; q)_k (1 - q^k)} = \sum_{k \geq 1} \frac{q^k}{1 - q^k}.$$

この式をヤング図形に関する組合せ論の式として理解する。前章でみたように \$q\$ 一つがヤング図形のマス目一つと対応すると考える。比較的複雑な形をしている左辺を見るために、式を分解して考えよう。まず \$q^{\frac{k(k+1)}{2}}\$ について、\$\frac{k(k+1)}{2}\$ は \$k\$ 以下の自然数の総和であり三角数と呼ばれるものだ。従って図の \$B, (k \ k-1 \ \dots \ 2 \ 1)\$ の階段型のヤング図形とすることにする。次に \$\frac{1}{(q; q)\_k}\$ について、これは通常分割の母関数と似た表示であるが少し変形して比べると、

$$\frac{1}{(q; q)_k} = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - q^i} = \prod_{i=1}^k \sum_{m \geq 0} q^{mi}.$$

\$i\$ の括弧から項を選ぶことが分割の成分 \$i\$ の個数を決定していたが、これは \$i\$ の大きさに制限がある。すなわち成分の大きさが \$k\$ 以下の分割の母関数を表していると思うことができる。ただし話の都合上今回はその共役\*2、長さが \$k\$ 以下の分割の母関数と考えることにする。最後に \$\frac{1}{(1 - q^k)}\$ について、

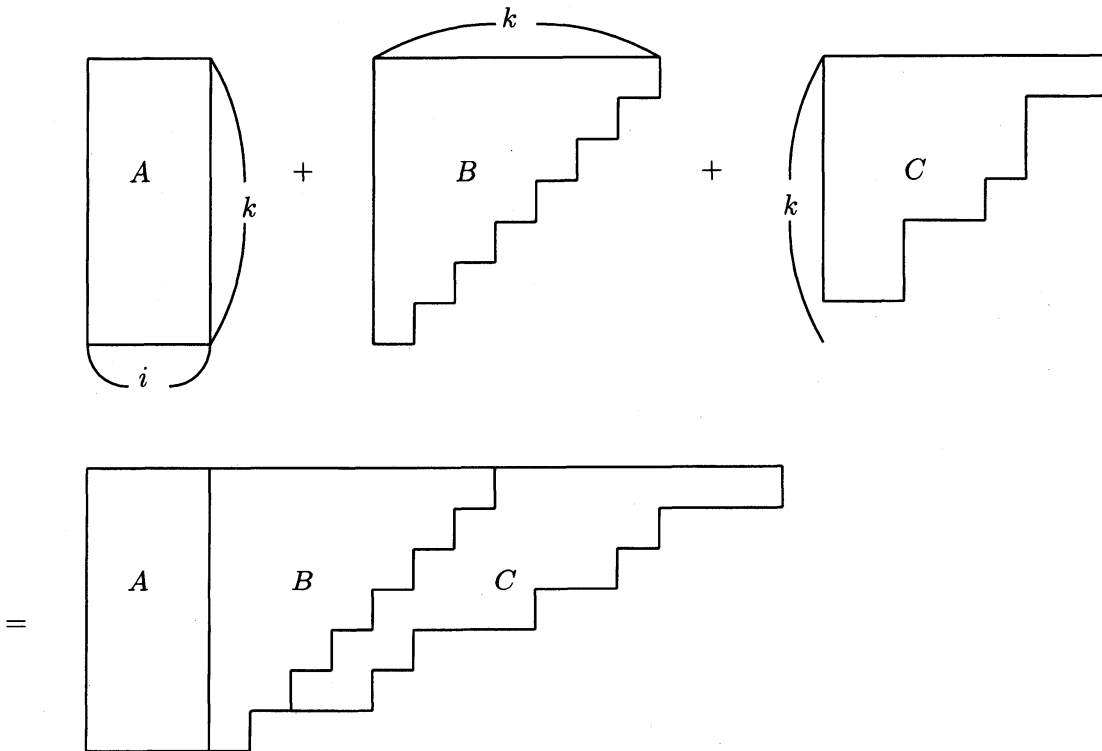
$$\frac{1}{(1 - q^k)} = \sum_{m \geq 0} q^{mk}$$

であり、これも今までと同様に理解すれば成分が \$k\$ のみの分割の母関数だということができる。これはヤング図形を考えればヨコの長さが \$k\$ の長方形だ。ただこれも話の都合で共役側、タテの長さが \$k\$ の長方形をヤング図形とする分割の母関数として考える。さて、式を分解した所での意味づけ

\*2 共役は対角線を軸にしてのヤング図形の反転。ヨコの情報であった成分の大きさがタテの情報である分割の長さとなっている。

は済んだが欲しい式はこれらの積だ。前章から引き続き  $q$  の指数がヤング図形のマス目を表している  
 ので、積を考えることで分割の足し算が起こる。分割の足し算はいくつかあるが、ここでは図のよ  
 うに各成分の大きさの和をとることを考えている。階段型でシフトすることで、出来上がりは相異  
 分割の形になる。

図 3.



ここで、 $A, B, C$  が別の組合せであっても出来上がりの形が同じとなる場合が考えられることに注  
 意しよう。前章で少しややこしいといった意味がこれであり、同じ分割を複数回数えていることにな  
 る。それで練習で出てきた単なる相異分割の母関数とは「ずれ」があるのだが、何回数えている  
 かが分かれば組合せ論の表示を書くことはできる。分割を一つ固定した時に真ん中の階段型の位置  
 が決まれば両端の形は自動的に決定する。そして階段型を動かせる範囲は足のみ出さない所まで、  
 すなわち  $\lambda_k = \lambda_{\ell(\lambda)}$  分の自由度がある。ここまで符号を気にしていなかったが、 $k = \ell(\lambda)$  である  
 ので同じ分割は同符号だ。従って式を次の形で表示することができる。

$$\sum_{\lambda \in \mathcal{SP}} (-1)^{\ell(\lambda)-1} \lambda_{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|} = \sum_{n \geq 1} \sigma_0(n) q^n.$$

ここで、 $\sigma_i(n) = \sum_{m|n} m^i$  であり、 $\sigma_0(n)$  は  $n$  の約数の個数を表す。右辺について説明していな  
 かったが元の式を思い出せば、右辺は  $\frac{q}{1-q}$  の総和であり、これは  $A$  の長方形型の母関数と似てい  
 る。違いは分子に  $q^k$  があることだが、これによって面積 0 の長方形は除外して数えている。また  $A$   
 は縦幅が固定されていたが、総和をとることで縦横がともに自然数の全ての長方形型のヤング図形

を数えている。面積が  $n$  の長方形は  $n$  の約数の個数だけ存在するため、右辺が  $\sigma_0$  の母関数であることが分かった。この結果を証明するため、少し強い次の結果を示す。

**定理 3.2.** 任意の自然数  $n, k$  に対して

$$\begin{aligned} & \#\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell, \ell = \ell(\lambda) : \text{奇数}\} \\ & - \#\{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell, \ell = \ell(\lambda) : \text{偶数}\} \\ & = \begin{cases} 1 & (k \mid n) \\ 0 & (k \nmid n) \end{cases} \end{aligned}$$

証明の前に、先の式との関連と強い結果であるということの説明を兼ねて例を見よう。この定理 3.2 は例えば [3] に載っているが、次の図はオリジナルだ。

例.  $n = 5$  について、

図 4.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 2 & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

= 5, 1.

大きさ 5 相異分割のヤング図形を準備し、「底」のある一行目のマス目に座高をいれたものだ。それに長さで符号を付け、数字を記号と見ての和を考えている。これが例だといわれてもピンと来ないかもしれない。定理は  $n, k$  の二つの自然数についてのものだったが、ここでは全ての  $k$  を同時に見ている。図の中の座高が  $k$  にあたり、 $n$  の約数だけが右辺に残る。一行目の座高は  $\lambda_1$  から始まる公差  $-1$  の等差列だったので、 $k$  のマス目の存在と定理左辺の  $k$  についての不等式  $\lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell$  が対応している。個数の勘定だけ見れば、左辺の各分割  $\lambda$  のヤング図形に入る数字の個数は一番下の行の長さ分であり、 $\lambda_{\ell(\lambda)}$  に符号を付けての和となる。一方右辺は  $n$  の約数だけが残るので、その個数は  $\sigma_0(n)$  となり先の式との関連が分かる。定理は約数そのものが見える点で精密化となっている。

**証明.** まずは長さで分類する前の次の集合を考える。

$$\mathcal{D}(n, k) := \{\lambda \in \mathcal{SP}(n) \mid \lambda_1 \geq k > \lambda_1 - \lambda_\ell\}.$$

これは一行目に「底」のある座高  $k$  のマス目をもつ  $n$  の相異分割全体の集合だ。これを次の二つの集合に分類する。ここで長さで分類しない点がミソだ。

$$A := \{\lambda \in \mathcal{D}(n, k) \mid \forall i, k \nmid \lambda_i\}, \quad B := \{\lambda \in \mathcal{D}(n, k) \mid \exists i, k \mid \lambda_i\}.$$

この  $A, B$  の間に分割の長さを 1 だけ変える写像を構成することで符号の異なる分割を対応させる。その対応だが、分かりやすさを優先して例で見てもらおう。

例.  $n = 14, k = 5$  とすれば、まず  $\mathcal{D}(n, k)$  は次の集合。

$$\mathcal{D}(14, 5) = \{(14), (9 \ 5), (8 \ 6), (7 \ 4 \ 3), (6 \ 5 \ 3), (5 \ 4 \ 3 \ 2)\}.$$

これを分類して,

$$A = \{(14), (8\ 6), (7\ 4\ 3)\}, B = \{(9\ 5), (6\ 5\ 3), (5\ 4\ 3\ 2)\}.$$

ここで,  $A, B$  に含まれる分割の各成分を  $k = 5$  を法として見ると,

$$A \equiv \{(4), (3\ 1), (2\ 4\ 3)\}(\text{mod } 5), B \equiv \{(4\ 0), (1\ 0\ 3), (0\ 4\ 3\ 2)\}(\text{mod } 5).$$

となる. 見比べてもらえば「0」の有無により対応が付くことが分かる. 従って「 $k$  を法として 0 を付ける」操作は  $A, B$  の間の全単射な写像だ. ここで考える写像が全単射となるのは 14 が 5 の倍数でないからだ.  $n$  が  $k$  の倍数となるとき例も見よう.

$n = 15, k = 5$  で  $\mathcal{D}(n, k)$  を見れば,

$$\mathcal{D}(15, 5) = \{(15), (9\ 6), (8\ 7), (7\ 5\ 3), (6\ 5\ 4), (6\ 4\ 3\ 2), (5\ 4\ 3\ 2\ 1)\}.$$

5 を法として見れば,

$$\mathcal{D}(15, 5) \equiv \{(0), (4\ 1), (3\ 2), (2\ 0\ 3), (1\ 0\ 4), (1\ 4\ 3\ 2), (0\ 4\ 3\ 2\ 1)\}(\text{mod } 5).$$

$A, B$  の分類をしていないので多少見づらいかもかもしれないが, 同じ様にほとんどの分割が 0 の付け外しで対応が付くことが分かる. ほとんどといったが (0) のみに対応が付かず, 一般に  $n$  が  $k$  の倍数であるとき  $(n)$  の形の分割のみが余ることになる.

実際には  $k$  を法とした所との行き来をもう少し厳密に見る必要があるが, この 0 のつけ外しが写像の本質なのでここまでで証明とさせてもらおう.  $\square$

定理 3.2 は例で見たように定理 3.1 の精密化であり,  $k$  についての総和をとることで定理 3.1 の  $q^n$  の係数が得られる. 一方有限和を考えれば, 座高を制限することとなり別の式が得られる [5]. これは図 3 での  $C$  の横幅を制限することになるため\*<sup>3</sup> 縦横の両方の長さを制限した分割の母関数である  $q$ -二項係数が現れる.

**定理 3.3** (Van Hamme). 任意の自然数  $m, n$  に対し次が成り立つ.

$$\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(1-q^k)} = \sum_{k=1}^m \frac{q^k}{1-q^k}.$$

ここで,

$$\begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix} = \frac{(q; q)_m}{(q; q)_k (q; q)_{m-k}}.$$

証明は行わないが左辺は図 1 での  $C$  にあたる部分だけが変わっており, 両辺とも有限和になっている.

\*<sup>3</sup> 図 3 には既に  $k$  が出てきているが, 定理 3.1 と定理 3.2 での  $k$  の意味は異なる.

定理 3.2 を一般化することを考えよう. 約数関数  $\sigma_0$  を  $\sigma_n$  に一般化することが自然だが, 約数そのものが既に出てきてしまっているため, それを  $n$  乗するだけでありここでは扱わない. そもそも約数関数は長方形型のヤング図形の個数として出てきたものであったので, 長方形  $m$  個を重ねてできるヤング図形とやや強引に一般化する. 定理としては次の形.

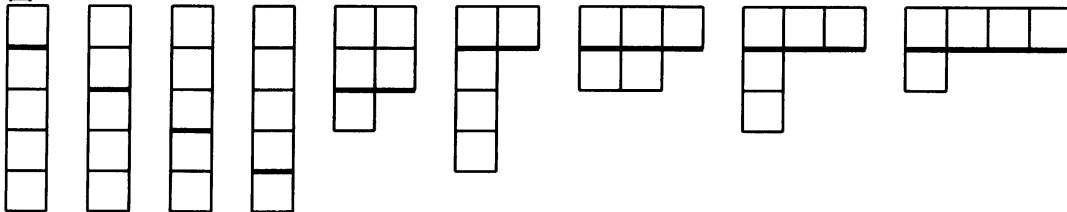
**定理 3.4 (A).** 任意の自然数  $k, m, n$  に対して

$$\begin{aligned} & \#\{(\lambda; i_1, \dots, i_m) \mid \lambda \in \mathcal{SP}(n), 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq \lambda_{\ell(\lambda)}, a'_{i_m} = k, \ell(\lambda) : \text{奇数}\} \\ & - \#\{(\lambda; i_1, \dots, i_m) \mid \lambda \in \mathcal{SP}(n), 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq \lambda_{\ell(\lambda)}, a'_{i_m} = k, \ell(\lambda) : \text{偶数}\} \\ & = \#\{(\lambda; t_1, \dots, t_{m-c(\lambda)}) \mid \lambda \in \mathcal{P}(n), 1 \leq t_1 < \dots < t_{m-c(\lambda)} < \ell(\lambda), \lambda_1 = k, \lambda_{t_i} = \lambda_{t_i+1}\}. \end{aligned}$$

左辺には面影があるが, 定理 3.2 には無かった座高に関する式が増えている. また右辺に至っては元が 01 だった面影すらないため, これも例で説明することにする.

**例.**  $m = 2, n = 5$  について, 左辺は座高から座高  $m$  組へと一般化がされている. ここでは  $m = 2$  なので座高のペアだ. また, 定理 3.2 の例と同様に全ての  $k$  について同時に考えるのだが, 何が  $k$  かは後ほど説明する. 図 4 を見て欲しい. 同じヤング図形での座高のペアを考えれば, (5) の分割からは  ${}_5C_2 = 10$  通りのペアが取れる. ここで符号も図 4 と同様にヤング図形の長さで決まり, (5) の分割からとれた 10 通りのペアは符号プラス. (41) の分割には座高は一つしかないためペアは取れず, (32) の分割からは, ややこしいが符号マイナスの (3, 2) のペアが一つ取れる. 従って個数の勘定だけ見れば  $10 - 0 - 1 = 9$ . であり, この 9 が右辺の長方形 2 つを重ねてできる大きさ 5 のヤング図形の数と一致する. ここで注意することは, 出来上がりの形が同じでも重ね方が違えば別物として考えていることだ. \*4 実際に数えてみれば,

図 5

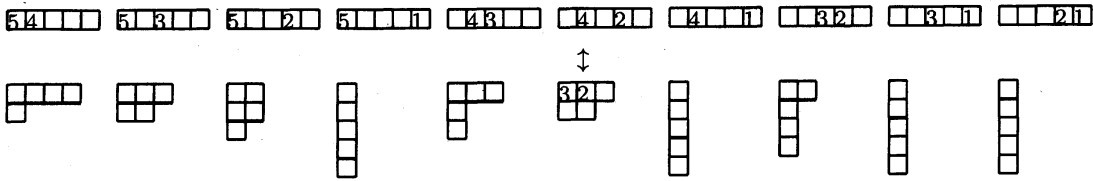


の丁度 9 種類であり, 個数の勘定が一致した. 定理 3.2 では個数の一致よりも精密化がされていたが, それが  $k$  の部分にあたる.  $k$  は左辺ではペアの内小さい方の座高, 右辺ではヤング図形の一行目の長さに対応する. 符号 + のペアの一覧がないので比べにくいかもしれないが, 例えば  $k = 2$  とすれば符号 + が (5, 2), (4, 2), (3, 2) の 3 組と符号 - が (3, 2) の 1 組で計 2 組. 一方図 5 のヤング図形の内一行目の長さが 2 のものも 2 つ, という具合だ. ここで, 今回 (3, 2) のペアが異符号で対応が付いたのは偶然だ. 実際論文 [1] 中では定理 3.4 も定理 3.2 と同様符号の異なるものに対応を付ける写像を構成することで証明しているのだが, その写像で  $-(3, 2)$  に対応するのは  $+(3, 2)$  ではない. 対応させる上手い写像を作ることは可能かもしれないが, それをさせないためのミス

\*4 図 3 のときと同じく, その分の重複度を持たせると考えてもよい.

リードとして、写像の説明無しに今の  $n = 5$  の場合の対応のみ紹介しておく。

図 6.



ここで座高のペアはヤング図形に入れた形で表示していて、上下で対応が付いている。従って証明中での写像は  $-(3, 2)$  と  $(4, 2)$  を対応させており、小さい方の座高は一致しているが他の座高は考慮していない。また長方形 2 段のヤング図形との対応も見ると、小さい方の座高が 1 のペアとの対応は規則性が分かりやすい。といった具合に写像を推測しながら眺めてもらいたい。<sup>\*5</sup> 最後に定理 3.4 に対応する内村型の恒等式も存在するので [2], その式と一般化を紹介する。

定理 3.5 (Dilcher). 任意の自然数  $m$  に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2} + mk}}{(q; q)_k (1 - q^k)^m} = \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{q^{j_1}}{1 - q^{j_1}} \sum_{j_2=1}^{j_1} \frac{q^{j_2}}{1 - q^{j_2}} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_{m-1}} \frac{q^{j_m}}{1 - q^{j_m}}.$$

定理 3.6 (A.). 任意の自然数  $m$  に対して,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{b^k q^{\frac{k(k-1)}{2} + km}}{(bq; q)_k (1 - q^k)^m} = \sum_{j_1=1}^{\infty} \frac{b^{j_1} q^{j_1}}{1 - q^{j_1}} \sum_{j_2=1}^{j_1} \frac{q^{j_2}}{1 - q^{j_2}} \cdots \sum_{j_m=1}^{j_{m-1}} \frac{q^{j_m}}{1 - q^{j_m}}.$$

### 参考文献

[1] M. Ando, A combinatorial proof of an identity for the divisor generating function. *Electron. J. Combin.*, **20**(2) 2013. #P13

[2] k. Dilcher, Some  $q$ -series identities related to divisor functions. *Discrete Math.* 145, 83–93 1995.

[3] I. Pak, Partition bijection, a survey. *Ramanujan J.* 12, 5–75, 2006.

[4] Uchimura, K.: An identity for the divisor generating function arising from sorting theory. *J. Comb. Theory, Ser. A* 31, 131–135, 1981.

[5] L. Van Hamme. Advanced problem 6407. *Am. Math. Mon.*, 89, 703–704, 1982.

<sup>\*5</sup> ミスリードに惑わされず  $-(3, 2)$  と  $+(3, 2)$  を対応させる写像を見つけたら教えて欲しい。