

静電場中での液体ジェットの安定性と崩壊 (II)

Instabilities and breakup of a liquid jet in a static electric field (II)

大阪大学 (Osaka Univ.)

吉永隆夫 (Takao Yoshinaga), 岡本充弘 (Mitsuhiro Okamoto)

1 まえがき

静電場中での液体ジェットは、表面張力やクーロン力、流体慣性力等によりジェット全体の振る舞いが決定される。この現象は電気流体力学の重要な問題の一つであるだけでなく [1], 食品, 医薬, 繊維等の工業分野での微小粒子・カプセルや微細ファイバー形成などへの応用においても重要である [2]。このような液体ジェットの研究は、円形ノズルで形成される円柱ジェットに関して、これまで理論・実験の両面から調べられきた [3, 4, 5, 6, 7]。一方, スリットノズルで形成される平面ジェットに関する研究は, これまで主に理論的に調べられており, 一様厚みの 2 次元ジェットを伝播する周期攪乱の安定性が調べられている [8, 9]。しかし, 実現象により近い解析として, 外部電場の下で有限長さジェットの非定常な振る舞いを考える必要がある。

最近, スリットノズルから噴出する有限長さの 2 次元平面ジェットの破断現象に関する非定常解析が行われ, 中央面に関して対称な形状のジェットの安定性と破断形状が解析的に調べられた [10]。解析では静電力に比べて表面張力が支配的な場合, 噴出したジェットは下流に進むにつれその先端部がより丸く大きくなっていくモードを示すことが示された。一方, 静電力が支配的な場合, 先端部が静電場により引き延ばされ下流に進むにつれて急激に薄くなっていくモードを示すことが示された。この二つのモードは, 一定 Wb 数 (=流体慣性力/表面張力) のもとで, Λ (=静電力/流体慣性力) と Pe (=対流電流/伝導電流) の二つのパラメータにより支配され, Λ が増加または Pe が減少するにつれて, 表面張力支配モードから静電力支配モードへと移ることが示され, $\Lambda - Pe$ パラメータ平面でこれらのモードの存在領域が示された。

よく知られているように, 平面ジェットの微小変形は両界面が中央面に関して対称 (反位相) と反対称 (同位相) になる二つの独立なモードの線形和で記述される。有限振幅変形では初期の変形モードが対称の場合, 破断に至るまで常に変形は対称である。しかし, 反対称モードから出発した有限振幅変形は, 一般には反対称モードでは破断は起きず, 非線形性により誘起される対称モードにより破断に至る。また, 周囲流体による空力不安定により, 反対称モードがより不安定化されるため, 反対称モード攪乱に対するジェットの振る舞いを調べておくことは重要である。

そこで本研究では、スリットノズルから噴出するジェットに、厚み方向に変動する反対称モード攪乱が与えられたとき、静電場の影響によりジェットがどのように振る舞うかを解析的に調べている。

2 定式化

$x - y$ 座標系において、図 1 に示すように平板壁間に挟まれた 2 次元平面粘性液体ジェットを考える。ジェット上下界面は $y = h_+(x, t), h_-(x, t)$, 中央面は $\eta(x, t) = (h_+ + h_-)/2$, 厚みは $b(x, t) = h_+ - h_-$, 壁面の位置は $y = \pm L$ で規定されている。スリットノズル出口 ($x = 0$) からジェット下流 ($x > 0$) にかけて平板壁に電位差が与えられ、そのとき平板における x 方向電場を E_w (一定) とする。ジェット

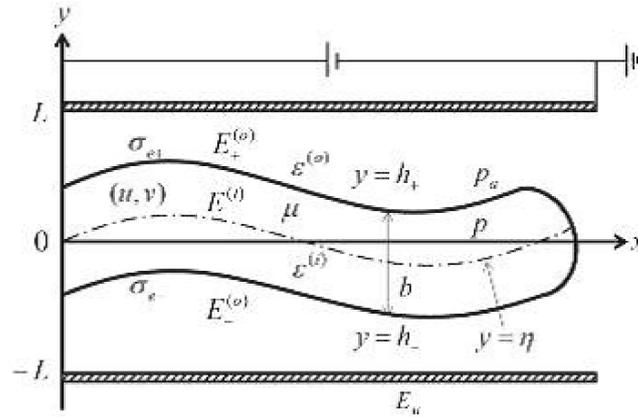


図 1: Two-dimensional planar liquid sheet subject to an external electric field.

内部に関して、流速 $\mathbf{u} = (u, v)$, 圧力 p , 電場 $\mathbf{E}^{(i)} = (E_x^{(i)}, E_y^{(i)})$, 密度 ρ , 粘性係数 μ , 比誘電率 $\epsilon^{(i)}$ とする。一方、ジェット外部に対しては、比誘電率を $\epsilon^{(o)}$ とするが、周囲流体の運動は無視し、電場 $\mathbf{E}_{\pm}^{(o)} = (E_{x\pm}^{(o)}, E_{y\pm}^{(o)})$ の影響のみを考える。ジェット及び周囲流体の電気電導率が十分小さく、磁場の緩和時間が十分短く誘起される磁場の時間変化は考えないので、 $\nabla \times \mathbf{E}^{(i)} = \nabla \times \mathbf{E}^{(o)} = 0$ である。また、Leaky-dielectric モデル [6] に従い、電荷はジェット表面上にのみ分布するものとし、その表面電荷密度を $\sigma_{e\pm}$ とし、ジェット表面以外では電荷が無いので $\nabla \cdot \mathbf{E}^{(o)} = \nabla \cdot \mathbf{E}^{(i)} = 0$ である。

このとき、ジェットの基礎方程式はジェット流体部 ($h_- < y < h_+$) に対する連続の式と運動方程式から成る。また、ジェット界面 ($y = h_{\pm}$) での電荷密度分布は、界面変形とジェット内外部からの電流密度の流入出を考慮した電荷保存の式により与えられる。一方、境界条件は界面 ($y = h_{\pm}$) での流体及び電場の運動学的条件と粘性及びマクスウェル応力、表面張力に関する力学的条件により与えられる [10]。

ジェットの厚みおよび壁面までの距離が界面変形の波長に比べて十分小さいとして長波近似を用いる。まず、外部電場 $\mathbf{E}_{\pm}^{(o)}$ は静電ポテンシャル ϕ_{\pm} を用いて $\mathbf{E}_{\pm}^{(o)} = -\nabla\phi_{\pm}$ と表わされ、ジェット界面以外では電荷が存在しないため、静電ポテンシャルはラプラス方程式 $\nabla^2\phi_{\pm} = 0$ に従う。電場が主流方向に緩やかに変化するとして微小パラメータ λ を用いて、 $\xi = \lambda^{1/2}x$ のような座標の引き延しを導入し、 $\phi_{\pm} = \phi_{1\pm} + \lambda\phi_{2\pm} + \dots$ のように ϕ_{\pm} を λ で展開する。この展開をラプラス方程式に用いて、 λ の冪で整理し、得られた方程式を解くことにより、元の座標系 x, y で ϕ_{\pm} は未知関数 $a(x, t), c(x, t)$ を用いて以下のように表

わせる：

$$\phi_+ = (y-L)a + \phi_w - \frac{1}{6}(y-L)^3 \frac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \quad \phi_- = (y+L)c + \phi_w - \frac{1}{6}(y+L)^3 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}. \quad (1)$$

ただし、境界条件 $\phi_{1\pm}(x, \pm L) = \phi_w$, $\phi_{2\pm}(x, \pm L) = 0$ を用いた。上式で $y = \pm L$ で $\partial\phi_{\pm}/\partial x = -E_w$ を考慮して、 $\mathbf{E}_{\pm}^{(o)} = -\nabla\phi_{\pm}$ より外部電場 $\mathbf{E}_{\pm}^{(o)}$ が得られる。

一方、流体内部の電場 $\mathbf{E}^{(i)}$ はジェット中央面からの距離 $y - \eta$ の冪で $(E_x^{(i)}, E_y^{(i)}) = (E_{x0}^{(i)}, E_{y0}^{(i)}) + (y - \eta)(E_{x1}^{(i)}, E_{y1}^{(i)}) + (y - \eta)^2(E_{x2}^{(i)}, E_{y2}^{(i)}) \dots$ のように展開できて、 $\nabla \cdot \mathbf{E}^{(i)} = \nabla \times \mathbf{E}^{(i)} = 0$ より以下の式を得る：

$$(E_x^{(i)}, E_y^{(i)}) = (E_{x0}^{(i)}, E_{y0}^{(i)}) + \frac{y - \eta}{1 + (\partial\eta/\partial x)^2} \frac{\partial E_{y0}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial E_{x0}^{(i)}}{\partial x}, -\frac{\partial E_{x0}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial x} \frac{\partial E_{y0}^{(i)}}{\partial x}. \quad (2)$$

未知関数 a, c は電場の運動学的境界条件より決定されて、 $\sigma_{e\pm}$ と η, b で表わすことができる。特に、 η, b, L を $O(h_{\pm})$ 程度と仮定して $O(h_{\pm}^2)$ の項を無視する最低次の近似では、 $a, c, \mathbf{E}^{(i)}, \mathbf{E}_{\pm}^{(o)}$ は以下のような比較的簡単な形で与えられる：

$$a = -c = -\frac{\Sigma_+}{2\epsilon^{(o)}} + \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x} E_w \beta, \quad (3a)$$

$$E_{x\pm}^{(o)} = \pm \frac{1}{2\epsilon^{(o)}} \frac{\partial \Sigma_+}{\partial x} (y \mp L) + E_w, \quad (3b)$$

$$E_{y\pm}^{(o)} = \pm \frac{\Sigma_+}{2\epsilon^{(o)}} \mp \frac{1}{2} \frac{\partial b}{\partial x} E_w \beta, \quad (3c)$$

$$E_x^{(i)} = \frac{\Sigma_-}{2\epsilon^{(i)}} \frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{L}{2\epsilon^{(o)}} \frac{\partial \Sigma_+}{\partial x} + \frac{b}{4\epsilon^{(o)}} \frac{\partial \Sigma_+}{\partial x} + \frac{\Sigma_+}{4\epsilon^{(o)}} \frac{\partial b}{\partial x} + E_w - (y - \eta) \frac{1}{2\epsilon^{(o)}} \frac{\partial \Sigma_+}{\partial x}, \quad (3d)$$

$$E_y^{(i)} = -\frac{\Sigma_-}{2\epsilon^{(i)}} + \frac{\beta}{\beta + 1} \frac{\partial\eta}{\partial x} E_w. \quad (3e)$$

ここで、 $\beta = \epsilon^{(i)}/\epsilon^{(o)} - 1$, $\Sigma_+ = \sigma_{e+} + \sigma_{e-}$, $\Sigma_- = \sigma_{e+} - \sigma_{e-}$.

さらに、流体部も $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + (y - \eta)\mathbf{u}_1 + (y - \eta)^2\mathbf{u}_2 \dots$, $p = p_0 + (y - \eta)p_1 + (y - \eta)^2p_2 + \dots$ のように $y - \eta$ で展開し、流体の基礎方程式と境界条件に用いて $y - \eta$ の冪で整理する。その結果、連続の式と運動学的境界条件より

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial\eta}{\partial x} - v_0 = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u_0 \frac{\partial b}{\partial x} + b \frac{\partial u_0}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

を得る。一方、運動方程式より

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{p_1}{\rho} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} u_1 - 2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} + 2u_2, \quad (6)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{p_1}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} v_1 - 2 \frac{\partial v_1}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x}. \quad (7)$$

既に得られている電場の式 (3) を考慮して、 $y = h_{\pm}$ での力学的条件の接線方向成分の和と差から u_1, u_2 を得て、さらに、これらを連続の式に用いて、 v_1, v_2 を得る。一方、 $y = h_{\pm}$

での力学的条件の法線方向成分の和と差から p_0 と p_1 を得る. また, $y = h_{\pm}$ での表面電荷の方程式で, 流体外部の電気伝導率を無視する ($K^{(o)} \ll K^{(i)}$).

以上の結果を用いて最低次の近似で以下の無次元化された方程式を最終的に得る (u, v の添え字は省略):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} = v, \quad (8)$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} = -b \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = & -\frac{1}{Wb} - \frac{1}{2} \frac{\partial K_+}{\partial x} + \frac{K_-}{b} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{4}{Re} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\ & + \Lambda \left[\Sigma_+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Sigma_+}{\partial x} \left(1 - \frac{L}{b}\right) + \frac{E_w}{b} - \frac{\Sigma_-}{2(\beta+1)} \frac{\partial \Sigma_-}{\partial x} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\Sigma_+^2}{4} - \frac{\Sigma_-^2}{4(\beta+1)} \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{Wb} \frac{K_-}{b} + \Lambda \left[-\frac{\Sigma_+}{b} \frac{\partial \eta}{\partial x} E_w - \frac{\eta}{b} \frac{\partial \Sigma_+}{\partial x} E_w \right], \quad (11)$$

$$\frac{\partial \Sigma_+}{\partial t} + u \frac{\partial \Sigma_+}{\partial x} + \Sigma_+ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{Pe} \frac{\partial b}{\partial x} E_w, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \Sigma_-}{\partial t} + u \frac{\partial \Sigma_-}{\partial x} + \Sigma_- \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{Pe(\beta+1)} 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} E_w + \Sigma_-. \quad (13)$$

ここで, $\beta = \epsilon^{(i)}/\epsilon^{(o)} - 1$, $\Sigma_{\pm} = \sigma_{e+} \pm \sigma_{e-}$ で, $y = h_{\pm}$ での曲率 κ_{\pm} を用いて $K_{\pm} = \kappa_{+} \pm \kappa_{-}$ で与えられる. 上式は代表長さ $b_0/2$, 速度 U_0 , 時間 $b_0/(2U_0)$, 電場強さ E_0 , 比誘電率 $\epsilon^{(o)}$ を用いて無次元化され, また以下の無次元パラメータが導入されている: $Wb = \rho U^2 (b_0/2)/\gamma$ (流体慣性力/表面張力), $Re = \rho U_0 (b_0/2)/\mu$ (流体慣性力/粘性力), $Pe = \epsilon^{(o)} U_0 / K^{(i)} (b_0/2)$ (対流電流/伝導電流), $\Lambda = \epsilon^{(o)} E_0^2 / \rho U_0^2$ (静電力/流体慣性力). また, 上式で $\eta = v = 0$, $\Sigma_- = 0$, $K_- = 0$ と置くことで, 変形が対称なモードに対する方程式が得られる.

3 解析結果

ノズルから噴出する反対称攪乱に対する平面液体ジェットの様子を調べるため, 得られた発展方程式を以下の初期値境界値に対して解く. $0 \leq x \leq 1$ に対して $b(x, 0)/2 = \sqrt{1-x^2}$, $u(x, 0) = 1$, $\sigma_{e\pm}(x, 0) = \sigma_{e0}$, 一方, $x = 0$ で $b(0, t) = u(0, t) = 1$, $\sigma_{e\pm}(0, t) = \sigma_{e0}$, $\eta(0, t) = A \sin \omega t$, $v(0, t) = A \omega \cos \omega t$.

数値解析法は CIP-Time split 法 [11] を用い, 時間, 空間刻み幅 $\Delta t = 0.0001$, $\Delta x = 0.1$ とし, 面積誤差は常に 1% 以内である. また, ジェット先端部は先端位置を x_0 としたとき先端形状が漸近解 $b \propto \sqrt{x_0 - x}$ で近似できることを用いている. 基本パラメータを $Re = 100$, $Wb = 100$, $E_w = 1$, $L = 2$, $\sigma_{e0} = 0.1$, $\beta = 2$ とし, 以下に計算結果を示す.

図 2 は $Pe = 100$, $A = 0.05$, $\omega = \pi/5$ としたとき, (a) $\Lambda = 0.1$ と (b) $\Lambda = 0.3$ での破断に至るまでの経過を示している. 両図ともノズル出口での厚み方向の変動は下流に行くに従い次第に増幅するが, 先端に近づくにつれてその変動は抑えられている. このとき破断までの時間は Λ が小さいほど長くなるが, 中心面 η の変動は大きくなっている.

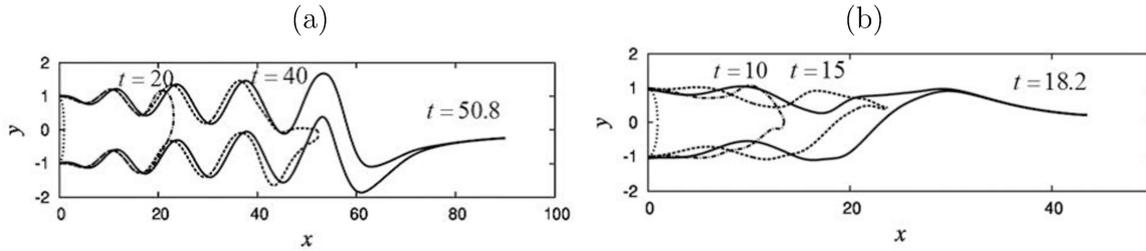


図 2: Evolutions of the jet for antisymmetric disturbances at the nozzle exit for $Pe = 100$, where $\Lambda = 0.1$ in (a) and $\Lambda = 0.3$ in (b).

図 3 はこのような二つの Λ に対して中心面の変動の最大値 $|\eta_{max}|$ の時間発展を示している。図より Λ が大きいほど増幅率が大きくなっているが、先端での破断がより早く起っていることがわかる。しかし、いずれの Λ の場合も先端部付近での変動は小さくなっていることから、シート厚みが薄くなるほど、不安定による変動が抑えられていることが予想される。

図 4 は $Pe = 100$, $\Lambda = 0.1$ で $A = 0$ としたときに得られる定常解 (破線) と数値解 (実線) の比較を示している。(a), (b) 図はそれぞれジェット形状および表面電荷密度の時間発展を示している。両図ともに時間がたつにつれて、先端部付近では定常解からずれてきており、最終的には先端部での厚みや電荷密度は定常解よりはるかに小さくなる。

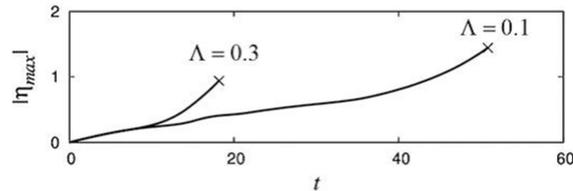


図 3: Time evolutions of the maximum fluctuations of the mid-plane $|\eta_{max}|$ when $\Lambda = 0.1$ and 0.3 .

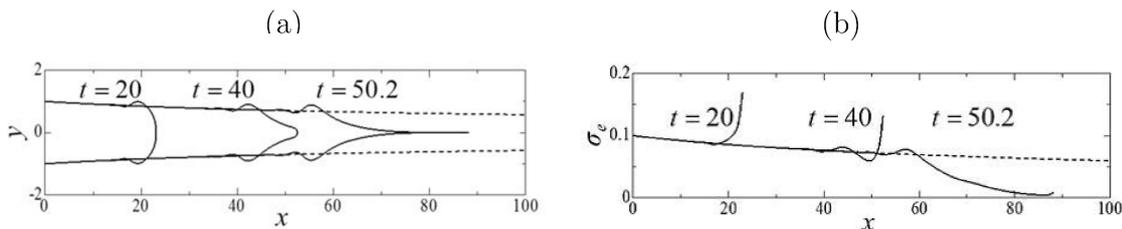


図 4: Comparison of profiles and surface electric densities of the jet between unsteady (solid lines) and steady (broken lines) profiles when $Pe = 100$, $\Lambda = 0.1$ and $A = 0$.

ジェットの定常解は x の増加と共に厚み b と表面電荷密度 σ_e は減少する。このような非一様なジェットに対して、図 5 に $Pe = 100$, $\Lambda = 0.1$ の場合の局所的な線形時間増幅率 Ω_I を攪乱波数 k に対して示す。(a) 図では $b = 2$, $\sigma_e = 0.1$ ($x = 0$) のノズル出口での安定性を示しており、長波領域 ($k \lesssim 1$) で不安定になる対称モードの増幅率に比べて、全域 ($0 < k$) 不安定な反対称モードの増幅率が大きくなっている。一方、(b) 図では $b = 0.214$, $\sigma_e = 0.0117$

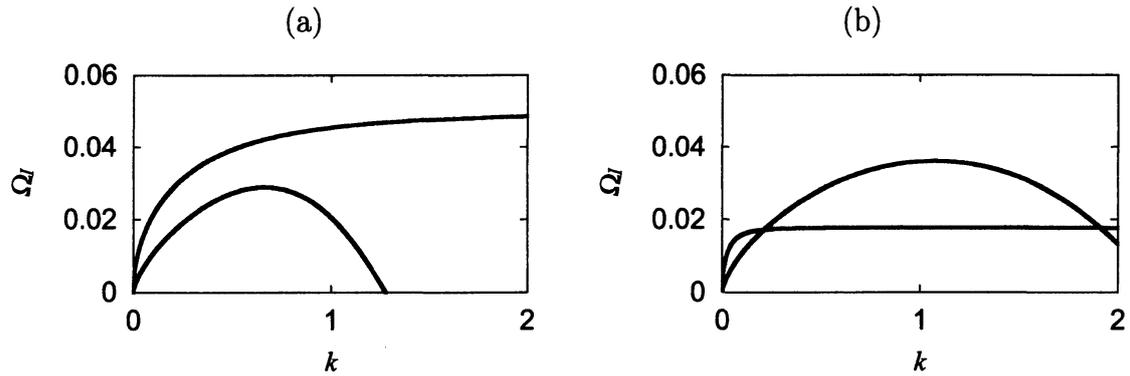


図 5: Temporal growth rates Ω_I for wave numbers k of disturbances on the steady solution when $Pe = 100$ and $\Lambda = 0.1$ when $b = 2, \sigma_e = 0.1$ ($x = 0$) in (a) and $b = 0.214, \sigma_e = 0.0117$ ($x = 4000$) in (b).

($x = 4000$) の下流域での場合を示しており、対称モードの最大増幅率が増加しているのに対して、反対称モードの全般的に増幅率は減少していることがわかる。定常解はシート厚みが下流に行くにしたがい緩やかに減少すると仮定して得られており、非定常解とは必ずしも一致するとはいえないが、先端部付近での厚みと電荷密度の減少は定性的に一致すると思われる。したがって、図 2 で示されているように、先端部付近での反対称的な変動が抑えられているのは、反対称モードの増幅率が減少することが一因であると考えられる。

4 結論

表面で電場が規定された 2 枚の平行な外部壁面間での平面液体ジェットの高線形発展方程式を長波近似を用いて導出した。ノズル出口での反対称モード攪乱に対して得られた方程式を数値計算により解き、ジェットの形状の時間発展を調べた。その結果、先端部でジェット厚みが十分薄くなるような比較的大きな Λ に対して、ノズル出口での変動はジェット厚みが比較的厚い中間部で時間と共に増幅していくが、厚みが薄くなる先端部に近づくにつれてその変動が抑えられることがわかった。このことは、定常解の反対称モードに対する時間安定性が、厚みや表面電化密度の減少する下流域で減少していることと定性的に一致する。そのため、不安定性はジェット厚みが比較的厚い部分で大きくなり、壁面内での安定な薄膜形成には中間部の比較的厚い部分での安定性の制御が重要となる。

謝辞

本研究は科研費（基盤 C No.T24560194）の助成を受けたものである。ここに感謝の意を表す。

参考文献

- [1] Castellanos, A., *Electrohydrodynamics* (CISM 380, ed. Castellanos, A., Springer, 1998).
- [2] Li, D. and Xia, Y.: 'Electrospinning of Nanofibers', *Advanced Materials*, 16 (2004) 1151-1170.
- [3] Lord Rayleigh, 'On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity', *Phil. Mag.* 14 (1882) 184-186
- [4] Taylor, G.I., 'Electrically driven jet ', *Proc, Royal Soc.* A313 (1969) 453-475.
- [5] Cloupeau, M. and Prunet-Foch, B., 'Electrohydrodynamic spraying functioning modes: A critical review', *J. Aerosol Sci.* 25 (1994) 453-475, 及び引用文献参照.
- [6] Melcher, J.R. and Taylor, G.I., 'Electrohydrodynamics: A review of the note of interfacial shear stresses ', *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1 (1969) 111-146.
- [7] Yoshinaga, T. and Iwai, T., 'Breakup of a liquid column jet in a static electric field', *Theoretical and Applied Mechanics Japan*, 62 (2014) 219-226.
- [8] Papageorgiou, D.T. and Vanden-Broeck, J.-M., 'Large-amplitude capillary waves in electrified fluid sheets', *J. Fluid Mech.* 508 (2004) 71-88.
- [9] Ozen, O., Papageorgiou, D.T. and Peteropoulos, P.G., 'Nonlinear stability of a charged electrified viscous liquid sheet under the action of a horizontal electric field.', *Phys. Fluids*, 18 (2006) 042102.
- [10] 吉永隆夫 '静電場中での液体ジェットの実験的安定性', *京都大学数理解析研究所講究録* 1890 (2014) 16-23.
- [11] Yabe, T. and Aoki, T., 'A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. One-dimensional solver', *Computer Physics Communications*, 66 (1991) 219-232.