

## 2 層流体における表面波から界面波への非線形エネルギー輸送に関する数値的研究

岐阜大学 工学部 田中光宏 (TANAKA Mitsuhiro)  
Faculty of Engineering, Gifu University

### 1 はじめに

密度の異なる 2 つの流体が層を成すいわゆる 2 層流体系は、自然界やさまざまな工業的的局面において広く存在する。例えば真水がより比重の大きい海水 (塩水) の上に流れ込む河口域などはその典型的な例である。界面の存在は、表面波の他に、表面よりも内部の界面の方が大きく変位する界面波と呼ばれる新たな波動モードの存在を可能にする。これら界面波の運動およびそれらと表面波との相互作用は、入り江などにおける泥質流体の巻き上がりによる再懸濁現象や、低緯度海域の比較的浅い水深に発生する温度躍層に沿う波動運動、温帯の多くの湖で見られる静振 (seiche) など、広汎な波動現象に重要な影響を及ぼしていると考えられている [1], [2].

一般に波と波の非線形相互作用においては、共鳴相互作用が本質的に重要な役割を果たすことが知られている [3]. Ball[4] 以来、表面波と界面波の間には 2 種類の 3 波共鳴相互作用 (Class1 と Class2) が可能であることが知られていた。Class1 は反対方向に伝播する 2 つの表面波と 1 つの界面波の間の共鳴、Class2 は反対方向に伝播する 2 つの界面波と 1 つの表面波の間の共鳴であり、同一方向へ伝播する複数の表面波を含むタイプは知られていなかった。しかし近年 Alam[5] によって、すべて同一方向へ伝播する 2 つの表面波と 1 つの界面波の間にも 3 波共鳴相互作用 (Class3) が可能であることが示された。風成表面波は風向きに沿うほぼ同一方向に伝播するのが自然であり、その意味でこの Class3 の 3 波共鳴は、風成表面波と界面波の間のエネルギー輸送にとって、もともと重要な共鳴相互作用になると思われる。

単層流体に対する表面重力波の分散関係  $\omega = \sqrt{gk \tanh kh}$  は非崩壊型で、3 波共鳴条件

$$k_1 \pm k_2 \pm k_3 = 0 \quad \text{and} \quad \omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 = 0, \quad (1)$$

を満たすような 3 つの波数の組  $(k_1, k_2, k_3)$  は存在しない [3]. このため波列間の共鳴はより高次の 4 波相互作用からしか起こらず、波数空間におけるエネルギー輸送およびそれに伴うスペクトル変化の時間スケールは  $O(1/\omega_0 \epsilon^4)$  と非常に遅くなる [6], [7]. ここで  $\omega_0$  と  $\epsilon$  はそれぞれ代表的な角振動数および無次元振幅を表す。しかし新たに見出された Class3 の 3 波共鳴相互作用は、同一方向に伝播する表面重力波間のエネルギー輸送が、1 つの界面波を仲介することによって 3 波共鳴の時間スケール  $O(1/\omega_0 \epsilon^2)$  で起こる可能性を示唆している。

このような背景から、本研究では 2 層流体系の基礎方程式に基づく直接数値シミュレーションにより、表面波から界面波へのエネルギー輸送およびそれに伴うスペクトル変動について数値的に検討する。2 層流体に対する基礎方程式系や「高次スペクトル法」に基づく数値シミュレーション手法等については、昨年度集会の講究録に記したのでそちらを参照されたい [8]. 本稿では、前回まだ研究途上で十分に報告することができなかった数値計算結果、およびそれに基づく議論に焦点を当てて記すこととする。

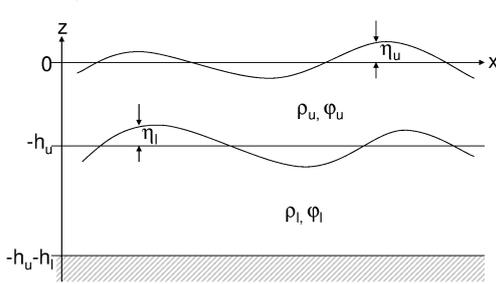
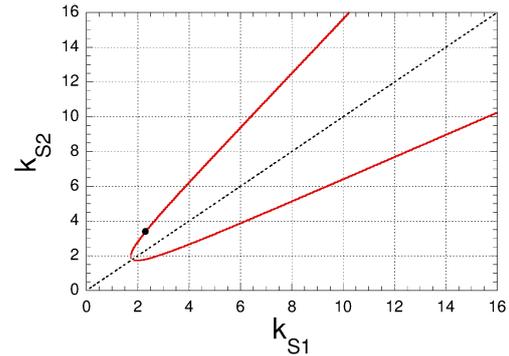


図 1: 2層流体系

図 2: 共鳴曲線. Class3 共鳴条件を満たす 2 つの表面波の波数 ( $h_l = 2.0$ ,  $R = 0.80$ ).

## 2 2層流体系

流体は非圧縮・非粘性，運動は断面 2 次元のポテンシャル流，底は水平，2 つの流体は交じり合わない，表面においても界面においても表面張力の効果は重力の効果に比べて無視できると仮定する（図 1 参照）．以下で  $\rho_u$ ,  $h_u$  は上層流体の密度および水深， $\rho_l$ ,  $h_l$  は下層流体の密度および水深， $R = \rho_u/\rho_l$  は密度比を表す．本研究ではもっぱら 3 波共鳴相互作用に注目していることから，高次スペクトル法における振幅展開は 2 次の項まで，すなわち 3 波相互作用までで打ち切っている．時間についての積分には 4 次精度のルンゲ・クッタ法を採用した．なお，今後全ての数値計算において，下層の密度  $\rho_l = 1$ ，上層の水深  $h_u = 1$  および重力加速度  $g = 1$  となるように質量，時間および空間を規格化して扱う．

図 2 は下層の水深  $h_l = 2$ ，密度比  $R = 0.8$  の場合に，Class3 の共鳴条件

$$k_{s2} = k_{s1} \pm k_i, \quad \omega_{s2} = \omega_{s1} \pm \omega_i, \quad (2)$$

を満たす表面波モードの波数  $k_{s1}$ ,  $k_{s2}$  をプロットしたものである．パラメタによってこの共鳴曲線の形状は多少変化するが，3 波共鳴に参加することのできる表面波の波数に下限があることに注意されたい．以下の議論で分かるように，この下限の存在が 2 層流体系のスペクトル変動に大変重要な役割を果たす．

## 3 数値計算の設定

初期時刻  $t = 0$  における表面波モードおよび界面波モードのエネルギースペクトル  $S_s(k)$ ,  $S_i(k)$  は以下で与える：

$$S_s(k) = A \left( \frac{k}{k_p} \right)^{-3} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{k}{k_p} \right)^{-2} \right] \quad (k > 0), \quad S_s(k) = 0 \quad (k \leq 0), \quad (3a)$$

$$S_i(k) = 0 \quad (-\infty < k < \infty). \quad (3b)$$

すなわち初期波動場は  $x$  の正方向に伝播する表面波モードのみの重ね合わせで構成されており，界面波モードは全く存在しない． $S_s(k)$  の形は海洋波の標準的周波数スペクトルである Pierson-Moskowitz スペクトルを単層の水面重力波の分散関係  $\omega \propto \sqrt{k}$  を用いて波数スペクトルに換算したものであるが，ここで扱っている 2 層流体系に対して何ら特別な意味を持つものではない．

数値計算では  $t = 1000T_p$  程度まで時間発展を追跡した。ここで  $T_p$  は波数  $k_p$  の表面波モードの周期を表す。高次スペクトル法を採用していることから、直接の計算対象となるのは波数空間であり、今回の計算では  $|k| \leq 10k_p$  を対象領域とした。実空間でのメッシュ点数は  $n = 2^{18}$  で、波数空間における aliasing 誤差に影響されない独立な波数の数は  $174,760 (= (n/3 - 1) \times 2)$  である。また各パラメタ設定に対して初期位相の乱数セットのみ異なる 3 個の実現を計算し、それらについての平均操作を行った。以下の議論ではエネルギースペクトルの波数解像度  $\Delta k$  を  $\Delta k = 0.1$  としている。幅  $\Delta k$  のビンには数値シミュレーションの独立なモードが約 750 個入っており、スペクトル値はそれらの算術平均で推定している。

本稿では、Case 1:  $(h_l, R, k_p) = (2, 0.8, 3.5)$ , Case 2:  $(h_l, R, k_p) = (0.5, 0.8, 3.5)$  の 2 組のパラメタ設定に対して得られた結果について報告する。

数値計算はすべて Dell Optiplex3010 (Intel Core i7-3770 3.4GHz) で行った。  $n = 2^{18}$  の場合、1 時間キザミ (=4 次ルンゲ・クッタの 4 内部ステップ) あたりの所要時間は約 3.0 秒であった。また時間キザミを  $\Delta t = T_p/100$  とした場合、実行したすべての計算において全エネルギーは 1000 周期にわたる時間発展の間、初期値の 0.3% 以内の誤差で一定に保たれていた。

テスト計算として  $R = 1.0$ ,  $h_l = 2$  の場合の計算も行った。これは実質的には単層流体であり、したがって 3 波共鳴は存在しない。この事実を反映して、表面波スペクトル  $S_s(k)$  は  $t = 1000T_p$  においても、ほぼ完全に初期スペクトルに等しいままとどまっていることを確認した。

## 4 数値計算結果

### 4.1 Case 1: $h_l = 2$ , $R = 0.8$ , and $k_p = 3.5$

Case1 では下層水深、密度比、スペクトルピーク波数をそれぞれ  $h_l = 2$ ,  $R = 0.8$ ,  $k_p = 3.5$  とした。表面変位  $\eta_u(x)$  の急峻度  $ak_s$  を  $ak_s := \sqrt{2\eta_u^2} k_p$  で定義すると、(3) で与えられる初期スペクトル  $S_i(k)$  において  $A = 1.5 \times 10^{-4}$  のとき、 $ak_s \approx 0.08$  となる。このときの  $S_s(k)$ ,  $S_i(k)$  の時間発展をそれぞれ図 3(a), (b) に示す。図では負方向に伝播する波に対応する  $k < 0$  の部分は示していないが、この部分は  $1000T_p$  経過する間つねに  $S_s(k) < 4.8 \times 10^{-7}$ ,  $S_i(k) < 6.5 \times 10^{-9}$  と非常に小さな値に留まっている。

図 3(a) から、 $S_s(k)$  は次第に低波数側にシフトし、したがって高波数領域から低波数領域へのエネルギーの逆カスケードが起こっていることが分かる。しかしこの低波数側へのシフトは  $S_s(k)$  のピークが  $k \approx 1.8$  となるころに止まり、その後は  $k \approx 1.8$  あたりに鋭いピークが成長していることが分かる。一方界面波のスペクトル  $S_i(k)$  は、図 3(b) に見られるように、初期にすべての  $k$  で 0 であったものが、 $k \approx 1$  周辺の低波数領域で成長している。どの時刻においても波動場は実質的には正方向に伝播する波のみで構成されており、この界面波モードの成長をもたらしたものは Class 3 の 3 波共鳴であると考えられる。図 2 の共鳴曲線が示すように、Class 3 の 3 波共鳴に参加できる表面波モードの波数  $k_s$  には下限が存在する。ここではこれを「臨界波数」とよび、 $k_{\text{crit}}$  で表すことにする。Case 1 のパラメタ設定の場合、 $k_{\text{crit}} = 1.79$  である。波動乱流理論によると、共鳴相互作用のみが異なる波数間のエネルギー交換を可能にし、したがってスペクトル変動に寄与する。図 3(a) で見られる  $S_s(k)$  の低波数へのシフトの停止は、 $k_{\text{crit}} = 1.79$  以下の波数は Class 3 共鳴に参加できないことを反映しているものと考えられる。

臨界波数  $k_{\text{crit}}$  の近傍では、共鳴 3 波の中の 2 つの表面波の波数  $k_{s1}$ ,  $k_{s2}$  の差  $\delta k$  が大変小さくなる ( $k_{s2} = k_{s1} + \delta k$ )。臨界波数に対応する  $\delta k \rightarrow 0$  の極限においては Class 3 の 3 波共鳴条件は

$$\frac{d\omega_S(k)}{dk} = \lim_{\delta k \rightarrow 0} \frac{\omega_I(\delta k)}{\delta k} \quad (4)$$

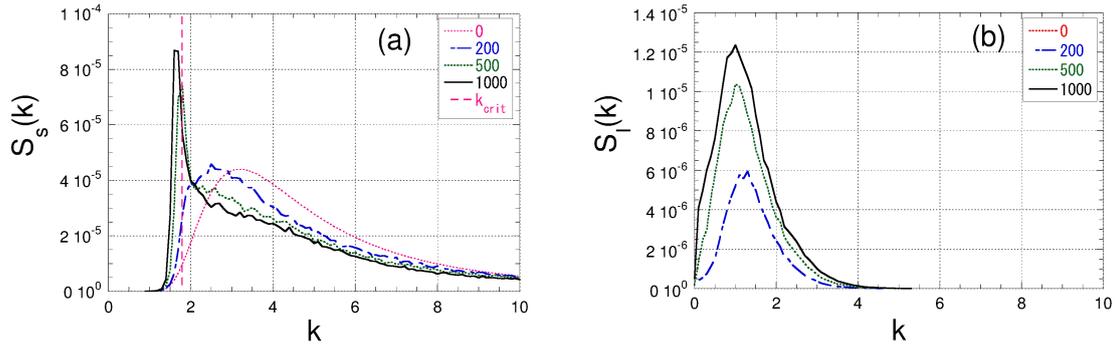


図 3: エネルギースペクトルの時間変化 : Case1 ( $h_l = 2, R = 0.8, k_p = 3.5$ ).  $t = 0, 200T_p, 500T_p, 1000T_p$ . (a) 表面波モード, (b) 界面波モード.

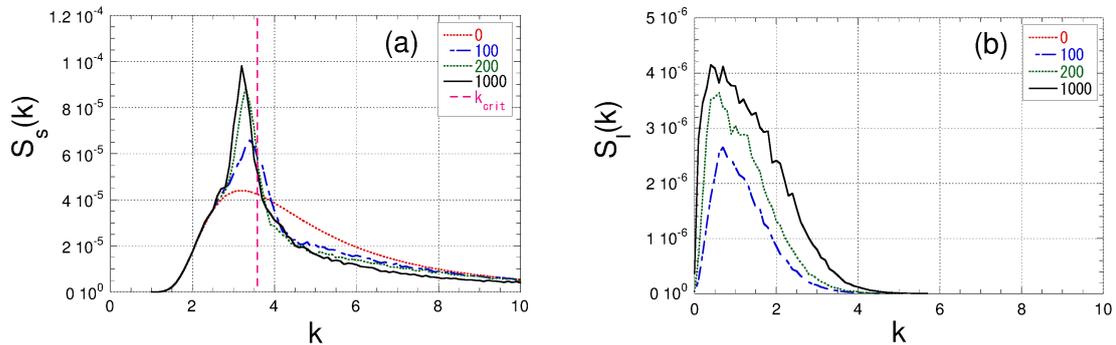


図 4: 図 3 と同じ. Case2 ( $h_l = 0.5, R = 0.8, k_p = 3.5$ ).  $t = 0, 100T_p, 200T_p, 1000T_p$ .

となり, 表面波 (短波) の群速度と界面波 (長波) の位相速度 (の長波極限) が一致することを要求する. 3 波共鳴のこの特別なタイプは「長波短波相互作用」として従来からよく知られている (例えば [10], [11], [12]). この長波短波共鳴の重要性については後に改めて議論する.

#### 4.2 Case 2: $h_l = 0.5, R = 0.8, k_p = 3.5$

Case2 では  $h_l = 2, R = 0.8, k_p = 3.5$  と設定した.  $A = 1.5 \times 10^{-4}$  のときの  $S_s(k)$  と  $S_i(k)$  の時間発展を図 4 に示す. Case 2 の  $h_l$  と  $R$  の組み合わせの場合,  $k_{\text{crit}} = 3.58$  となり,  $S_s(k)$  の初期スペクトルの中心部分に来る. Case 1 では初期には  $k_{\text{crit}}$  の周辺にほとんどエネルギーがなく,  $k_{\text{crit}}$  周辺の鋭いスペクトルピークが立ち上がってくるまでには数百周期というかなりの長時間を要した. それに対して Case 2 では初期においてすでに十分なエネルギーが  $k_{\text{crit}}$  周辺に存在し, 鋭いピークの成長がスペクトル変動の最初の段階から起こっているのが分かる. また  $k > k_{\text{crit}}$  の領域からのエネルギー供給によって,  $k_{\text{crit}}$  周辺のピークの成長が実現されている様子もよく見ることができる.

## 5 まとめと議論

表面波から界面波へのエネルギー輸送がより活発である Case 1 においてすら, 最終時刻  $t = 1000T_p$  までに表面波から界面波に輸送されたエネルギーは, 初期に表面波に与えた全エネルギーの 10% にも満たない. したがって界面波はエネルギー収支からすれば界面波の役割はそれ程大き

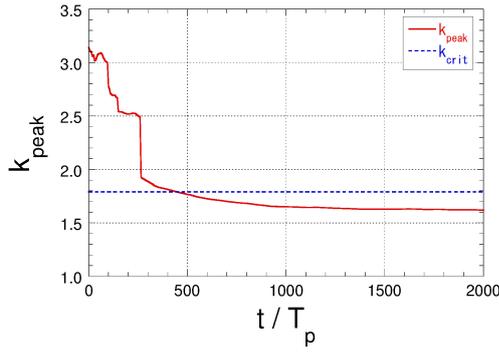


図 5:  $S_s(k)$  のピーク波数  $k_{\text{peak}}$  の時間変化 (Case 1,  $k_{\text{crit}} = 1.79$ ).

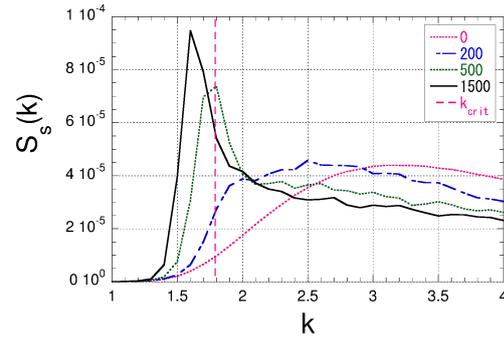


図 6: 図 3(a) の  $k_{\text{crit}}$  周辺の拡大図.

なものではない。しかし前述したように、ここで扱っている 3 波相互作用までの枠組みでは、界面波なくしては表面波スペクトルはまったく変化しない注意されたい。エネルギーの量的にはそれほど重要性を持たないこの界面波の存在こそが、図 3 や図 4 で示される表面波スペクトル  $S_s(k)$  の大変動をもたらしているのである。

## 5.1 kinetic equation

Case 1 においては、スペクトル変動の初期段階で  $S_s(k)$  が低波数側にシフトして行くことを見た。図 5 は  $S_s(k)$  が最大値を取る波数  $k_{\text{peak}}$  を  $t = 2000T_p$  まで時間の関数として描いたものである。初期の 200–300 周期においては  $k_{\text{peak}}$  は急激に減少するが 500 $T_p$  あたり以降はほぼ一定値にとどまる。また  $k_{\text{peak}}$  が臨界波数  $k_{\text{crit}} (= 1.79)$  を越えてより低波数にまで下がっていることに注意されたい。

表面波および界面波のウェーブアクションの複素振幅をそれぞれ  $A_k, B_k$  とするとき、非線形の 2 次で打ち切った 2 層流体系の支配方程式は

$$i \frac{\partial A_k}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta A_k^*}, \quad i \frac{\partial B_k}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta B_k^*}, \quad H = H_2 + H_3, \quad (5a)$$

$$H_2 = \int (\omega_k |A_k|^2 + \sigma_k |B_k|^2) dk, \quad (5b)$$

$$H_3 = \iiint (V_{123} A_1^* A_2 B_3 + \text{c.c.}) \delta(k_1 - k_2 - k_3) dk_{123}. \quad (5c)$$

のようなハミルトン系として表すことができる。[13] ここで  $\omega_k, \sigma_k$  はそれぞれ表面波、界面波の線形振動数を表し、また結合係数  $V_{123}$  は  $k_1, k_2, k_3$  のある複雑な関数である。

波動乱流の標準的な理論 ([7], [14]) を (5) に適用すると、スペクトル変動を支配する以下の kinetic equation が得られる：

$$\frac{dn_k}{dt} = -2\pi \iint \left[ |V_{k12}|^2 \{ (n_k - n_1) N_2 + n_k n_1 \} \delta(\omega_k - \omega_1 - \sigma_2) \delta(k - k_1 - k_2) dk_{1,2} \right. \\ \left. - |V_{1k2}|^2 \{ (n_1 - n_k) N_2 + n_k n_1 \} \delta(\omega_k - \omega_1 + \sigma_2) \delta(k - k_1 + k_2) dk_{1,2} \right], \quad (6a)$$

$$\frac{dN_k}{dt} = 2\pi \iint |V_{12k}|^2 \{ n_1 N_k - n_2 N_k + n_1 n_2 \} \delta(\sigma_k - \omega_1 + \omega_2) \delta(k - k_1 + k_2) dk_{1,2}. \quad (6b)$$

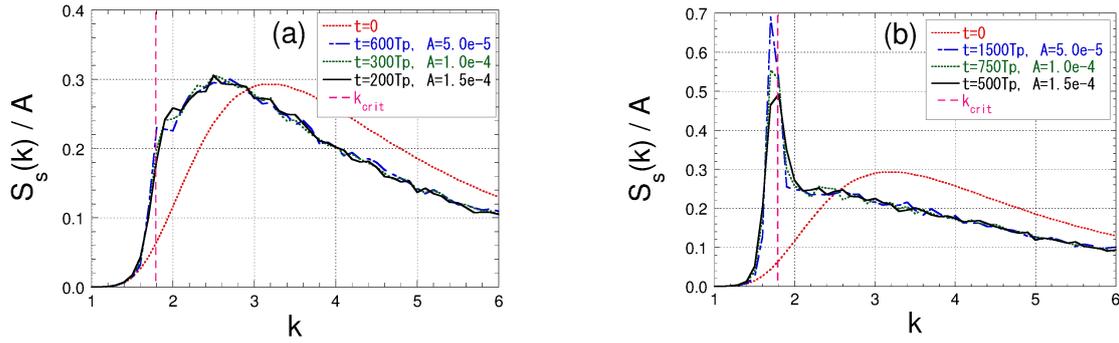


図 7: スケールされた時間  $\tau$  に関して同時刻における規格化された表面波スペクトル  $\tilde{S}_s(k)$  (Case 1:  $h_l = 2$ ,  $R = 0.8$ ,  $k_p = 3.5$ ). (a)  $\tau = 3 \times 10^{-2}$ , (b)  $\tau = 7.5 \times 10^{-2}$ .

ここで  $n_k = \langle |A_k|^2 \rangle$ ,  $N_k = \langle |B_k|^2 \rangle$  はそれぞれ表面波および界面波のアクションスペクトル密度であり,  $S_k(k)$ ,  $S_i(k)$  とはそれぞれ  $n_k = S_s(k)/\omega_k$ ,  $N_k = S_i(k)/\sigma_k$  の関係にある. (6) に波数と振動数に対する 2 つのデルタ関数が含まれていることは, スペクトル変動がもつばら 3 波共鳴相互作用によって支配されることを示している. したがって標準的な波動乱流理論によると, Class 3 の 3 波共鳴に参加することができない  $k < k_{\text{crit}}$  の領域では,  $S_s(k)$  は時間変化しないことになる. しかし, 図 5 に示すように  $S_s(k)$  のピーク波数は明らかに  $k_{\text{crit}}$  以下にまで低下している. 図 6 は図 3(a) で示した Case 1 の場合の  $S_s(k)$  の時間変動から  $k_{\text{crit}}$  周辺のみを拡大したものであるが, やはり  $k < k_{\text{crit}}$  においても  $S_s(k)$  が大きく変動している様子が見られる.

### 5.1.1 スペクトル変動の時間スケール

$k_{\text{crit}}$  以下の領域でもスペクトルが大きく変動するという, 波動乱流理論の予測と数値計算結果の間の矛盾の原因を探るために, スペクトル変動の時間スケールについて検討する. もし  $S_s(k)$  や  $S_i(k)$  の時間発展が本当に (6) に支配されているのであれば, 初期スペクトル (3) のエネルギーレベルを決めるパラメータ  $A$  によって規格化されたスペクトル  $\tilde{S}_s(k) \equiv S_s(k)/A$ ,  $\tilde{S}_i(k) \equiv S_i(k)/A$  は, スケールされた時間  $\tau \equiv At$  の関数になるはずである. 図 7 は Case 1 ( $h_l = 2$ ,  $R = 0.8$ ,  $k_p = 3.5$ ) において, 3 つの  $A$  に対して得られた  $\tilde{S}_s(k)$  を描いたものである. 図 7(a) は  $(A, t)$  の異なる組み合わせ  $(A, t) = (0.5 \times 10^{-4}, 600T_p)$ ,  $(1.0 \times 10^{-4}, 300T_p)$ ,  $(1.5 \times 10^{-4}, 200T_p)$  に対するもので, これらはスケールされた時刻に関してはすべて同時刻  $\tau = 3.0 \times 10^{-2}$  に相当する. またこれらはすべて  $S_s(k)$  の  $k_{\text{crit}}$  周辺のするどいピークが形成される以前の, スペクトル発展の比較的初期段階に対応している. 期待通り 3 つの  $\tilde{S}_s(k)$  がきれいに重なり, スペクトルが波動乱流理論による kinetic equation (6) にしたがって発展していることを示唆している.

図 7(b) は図 7(a) でやったと同じことを, 別の 3 つの組み合わせ  $(A, t) = (0.5 \times 10^{-4}, 1500T_p)$ ,  $(1.0 \times 10^{-4}, 750T_p)$ ,  $(1.5 \times 10^{-4}, 500T_p)$  に対して行ったものである. これらはすべて  $\tau = 7.5 \times 10^{-2}$  に相当し,  $k_{\text{crit}}$  周辺に  $S_s(k)$  のするどいピークが出現した後の段階に対応する. 大部分の  $k$  においてはやはり 3 つの  $\tilde{S}_s(k)$  の良好な一致が見られるものの,  $k_{\text{crit}}$  周辺ではかなりの差異を生じている. この差異は,  $S_s(k)$  周辺の鋭いピークの形成は通常の波動乱流理論の枠組みでは説明ができないことを示唆している.  $\tilde{S}_s(k)$  の差異をより詳細に見ると,  $A$  の大きいものほど  $\tilde{S}_s(k)$  の成長が遅いことが分かる. これはピークの形成が, 波動乱流理論が要求するスペクトル変動の時間スケール  $O(1/\omega_0 \epsilon^2)$  よりも速い時間スケールで働く機構によってもたらされていることを示唆する. ここで  $\epsilon$  は代表的な無次元振幅であり  $\epsilon \propto \sqrt{A}$  である.

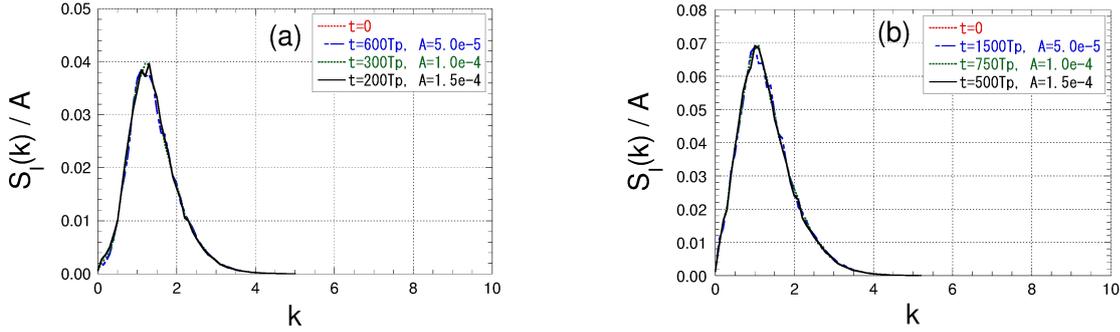


図 8: スケールされた時間  $\tau$  に関して同時刻における規格化された界面波スペクトル  $\tilde{S}_i(k)$ . (a)  $\tau = 3 \times 10^{-2}$ , (b)  $\tau = 7.5 \times 10^{-2}$ .

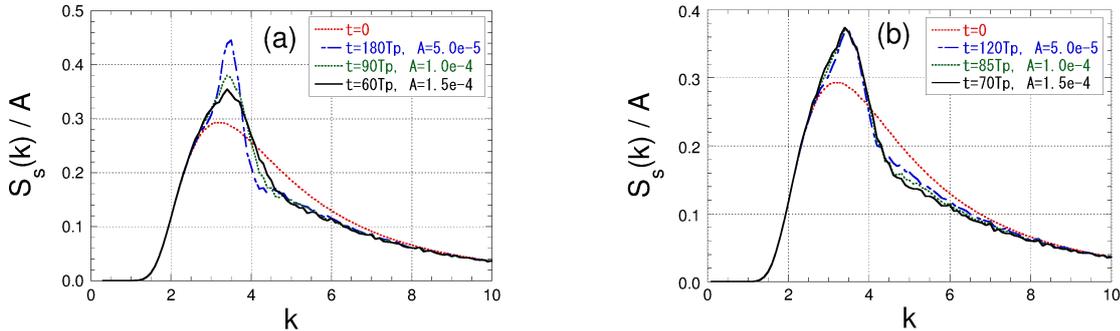


図 9: 異なる  $(A, t)$  の組に対する規格化された表面波スペクトル  $\tilde{S}_s(k)$  (Case 2:  $h_l = 0.5$ ,  $R = 0.8$ ,  $k_p = 3.5$ ). (a)  $\tau (\equiv At) = 9 \times 10^{-3}$ , (b)  $\tilde{\tau} (\equiv \sqrt{A}t) \approx 0.85$ .

図 8 は図 7 と同様のことを表面波でなく界面波のスペクトル  $\tilde{S}_i(k)$  に対して行った結果である。界面波スペクトル  $S_i(k)$  に対しては、波動乱流理論のスケールリングが、スペクトル発展の初期段階 (図 8(a)) においてはもちろんのこと、後期段階 (図 8(b)) においても、ほぼ完全に保たれていることが分かる。図 7(b) で見たように後期段階においては表面波スペクトルに対してこのスケールリングがかなり崩れていたことと比べると、 $S_i(k)$  に対するこの結果は興味深く、かつ不可解に思われる。

図 9 は Case 2 ( $h_l = 2$ ,  $R = 0.8$ ,  $k_p = 3.5$ ) の場合の規格化された表面波スペクトル  $\tilde{S}_s(k)$  の発展を示す。図 9(a) の 3 つの  $\tilde{S}_s(k)$  は  $(A, t) = (0.5 \times 10^{-4}, 180T_p)$ ,  $(1.0 \times 10^{-4}, 90T_p)$ ,  $(1.5 \times 10^{-4}, 60T_p)$  に対するものである。それらはすべて  $\tau = 9 \times 10^{-3}$  に相当しており、スペクトル発展が (6) に基づいているのであれば完全に重なるべきものである。一方図 9(b) は  $(A, t) = (0.5 \times 10^{-4}, 120T_p)$ ,  $(1.0 \times 10^{-4}, 85T_p)$ ,  $(1.5 \times 10^{-4}, 70T_p)$  に対するもので、これらは  $\tilde{\tau} = \sqrt{A}t$  で定義されるもう一つのスケールされた時間に関してほぼ同時刻 ( $\tilde{\tau} \approx 0.85$ ) に対応する。図 9(a) によると Case 1 のときと同様、 $k_{\text{crit}} (= 3.58)$  周辺を除く部分に関してはスペクトル変動の特徴的時間は波動乱流の予言通り  $O(1/A)$  (or  $O(1/\epsilon^2)$ ) でスケールされている。しかし図 9(b) は、 $S_s(k)$  のするどいピークの形成に関しては、その特徴的時間は  $O(1/A)$  ではなく  $O(1/\sqrt{A})$  (i.e.  $O(1/\epsilon)$ ) であることを示唆している。

前述したようにちょうど  $k_{\text{crit}}$  においては長波短波共鳴と呼ばれる強い決定論的な共鳴機構が存在する ([10], [11], [12])。典型的な状況においては、この長波短波共鳴相互作用は以下のような方

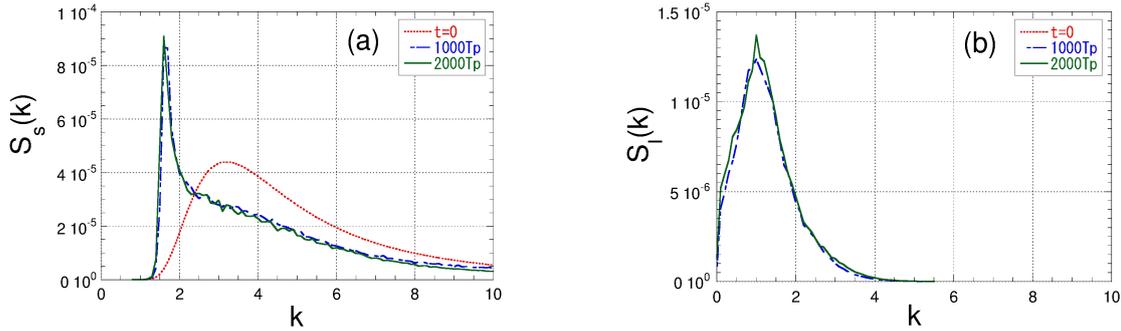


図 10: 時刻  $t = 1000T_p$  と  $t = 2000T_p$  におけるスペクトルの比較 (Case 1:  $h_l = 2$ ,  $R = 0.8$ ,  $k_p = 3.5$ ). (a)  $S_s(k)$ , (b)  $S_i(k)$ .

程式で表現される：

$$i(S_t + c_g S_x) + \frac{1}{2} \omega'' S_{xx} = \alpha S L, \quad (L_t + c_p L_x) = \beta (|S|^2)_x, \quad c_g = c_p, \quad (7)$$

ここで  $S$  は短波の複素振幅,  $L$  は長波の波形を表す. 本来ならば kinetic equation (6) で表現される「統計的な共鳴」によってゆっくりとした時間スケールで起こるはずのスペクトル変動が,  $k_{\text{crit}}$  で可能となるより短い時間スケールで作用するより強力な長波短波共鳴という「決定論的な共鳴」によって,  $k_{\text{crit}}$  だけでなく, その周辺の波数領域において大きな影響を被っていることは間違いないであろう.  $k_{\text{crit}}$  近傍における決定論的な準共鳴相互作用の存在のために, 波動乱流理論成立のための必須要件である, 異なる波数の成分波間の位相の乱雑性が損なわれているのかも知れない. 長波短波共鳴現象は (7) のような式に基づいて議論されるのが通例であるが, このアプローチ方法では, 短波は 1 つの複素振幅で表現される準単色波列として, また長波は波形そのものを用いて表現されており, 本研究で我々が興味を持っている表面波 (短波) と界面波 (長波) のスペクトル構造に関しては, あまり本質的な情報は得られそうにない. 広帯域を有する不規則波動場における長波短波共鳴の役割に関しては, 今後さらに研究を要するものと思われる. 何にせよ, 時間スケール  $O(1/\epsilon^2)$  の統計的な 3 波相互作用過程と, 時間スケール  $O(1/\epsilon)$  の決定論的な 3 波相互作用過程が, 異なる波数領域においてそれぞれが卓越しつつ同居しているという意味で, ここで扱っている 2 層流体系は非常に興味深い系であると言えよう.

### 5.1.2 より長時間のスペクトル変動

以上で  $k_{\text{crit}}$  近傍で  $S_s(k)$  に鋭いピークが成長してくるのを見た. しかしこの成長はいつまでも続くわけではなさそうである. 図 10(a), (b) は Case 1 の計算から得られた  $S_s(k)$  と  $S_i(k)$  であり, どちらも  $t = 1000T_p$  と  $t = 2000T_p$  における結果を示している.  $S_s(k)$ ,  $S_i(k)$  共に  $1000T_p$  という非常に長い時間を経ているにも関わらず, ほとんどスペクトルが変化しておらず, あたかもなんらかの準平衡状態に達しているようにすら見える. 我々の数値シミュレーションにおいては, 外部からのエネルギー供給も何らの散逸機構も入れておらず, ごく微小な数値誤差を除けば系は孤立した保存系である. このような孤立した保存系が, エネルギー等分配に対応する熱平衡状態からかけ離れた何らかの平衡状態に到達することが可能なのか, また図 10(a), (b) はそれを示唆しているのか, このあたりに関しては残念ながら筆者は十分な知見を持ち合わせておらず, 今後の検討課題としたい.

## 参考文献

- [1] Turner, J.S. 1973 *Buoyancy effects in fluids*, Cambridge U.P.
- [2] Osborne, A.R. & Burch, A.R. 1980 Internal solitons in the Andaman Sea, *Science* **208**, 451–460.
- [3] Phillips, O.M. 1960 On the dynamics of unsteady gravity waves of finite amplitude, Part I, *J. Fluid Mech.* **9**, 193–217.
- [4] Ball, D.K. 1964 Energy transfer between external and internal gravity waves, *J. Fluid Mech.* **19**, 465–478.
- [5] Alam, M.-R. 2012 A new triad resonance between co-propagating surface and interfacial waves, *J. Fluid Mech.* **691**, 267–278.
- [6] Hasselmann, K. 1962 On the non-linear energy transfer in a gravity-wave spectrum. Part 1. General theory, *J. Fluid Mech.* **12**, 481–500.
- [7] Zakharov, V.E., L'vov, V.S. & Falkovich, G. 1992 *Kolmogorov Spectra of Turbulence I - Wave Turbulence*, Springer.
- [8] 田中光宏, 若山恭一 2015 2層流体の表面波と界面波の相互作用に関する数値的研究京都大学数理解析研究所講義録 1890(2014年4月)「非線形波動現象の数理と応用」 73–84.
- [9] Alam, M.-R., Liu, Y. & Yue, D.K.P. 2009 Bragg resonance of waves in a two-layer fluid propagating over bottom ripples. Part II. Numerical simulation, *J. Fluid Mech.* **624**, 225–253.
- [10] Benney, D.J. 1976 Significant interactions between small and large scale surface waves, *Stud. Appl. Math.*, **55**, 93–106.
- [11] Benney, D.J. 1977 A general theory for interactions between short and long waves, *Stud. Appl. Math.*, **56**, 81–94.
- [12] Funakoshi, M. & Oikawa, M. 1983 The resonant interaction between a long internal gravity wave and a surface gravity wave packet, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**, 1982–1995.
- [13] Ambrosi, D. 2000 Hamiltonian formulation for surface waves in a layered fluid, *Wave Motion* **31**, 71–76.
- [14] Nazarenko, S. 2011 *Wave Turbulence*, Lecture Notes in Physics 825, Springer.