

# コアンダ効果による渦崩壊が誘起する音波 および流れの解析

筑波大学システム情報系 京藤 敏達 (Harumichi KYOTOH\*)

筑波大学工学システム学類 塩田 祐介 (Yu-suke SHIOTA)

\* Corresponding author: kyotoh@kz.tsukuba.ac.jp

2014 年 10 月

## 概要

旋回流ジェットは、スワール数が大きくなると、噴き出し口に付着し、放射方向に噴射する。高速ビデオで渦核を撮影すると、噴出口で渦核が歳差運動し、単一渦核がスパイラル状に渦崩壊している様子が観察される。歳差運動の巡回周波数は、渦核外縁の流体粒子の巡回周波数の 1/10 程度である。我々は、この渦核の歳差運動の原因を分析し、巡回周波数を理論的に予測し、旋回流中心に形成される気柱の運動によって放射される音波を再現することを最終的な目標として研究を進めている。本研究では、渦核の歳差運動の解析を行うための前段階として、Bragg-Hawthorne (B-H) 方程式から軸対象渦崩壊流れの解を求め、次いでオイラーの運動方程式から軸対称流上の擾乱の支配方程式を導く。また、歳差運動に関わる実験結果を簡単に紹介する。

## 1 Introduction

旋回型微細気泡発生ノズルは、旋回流ベーンと縮流部および急拡部からなり、ノズル中心に形成された渦核はノズル前面の急拡部に張り付く形で歳差運動を行う [8] (図 1 参照)。この渦核の変形は渦崩壊 [7] として知られているが、その発生メカニズムや歳差運動の周波数予測は未解明である。歳差運動に関しては、無限に長い円筒内に軸方向流を持つ渦核が存在する場合について、helical waves の変形から歳差運動を説明する試みがなされている [5, 6, 10]。彼らの解析では、ビオ・サバールの法則を用いているため、無限遠方で接続する渦糸の運動を解析していることになる。一方で、本微細気泡発生ノズルで形成される渦は、旋回流ベーンにより生成されるため、固体壁面上に一端を有しノズル出口でスパイラル状となり放射方向に発散する [9]。したがって、ビオ・サバールの法則をベースとした解析では、この現象を取り扱うことはできない。

Benjamin は渦崩壊は超臨界から亜臨界に至る流れであり、エネルギー損失を伴うとした [1]。一方、Keller J. J. ら [2, 3] は、エネルギー損失の無い渦崩壊が存在することを示し、渦崩

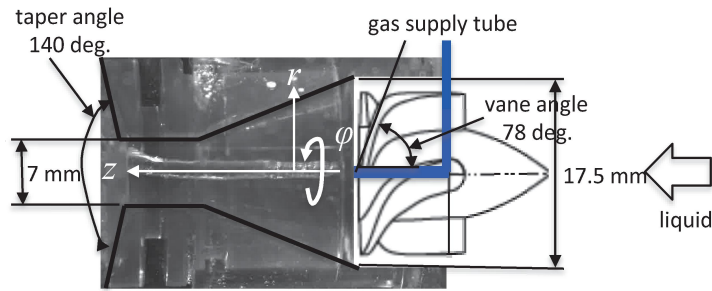


図 1: Swirling-type micro-bubble nozzle

壊後は dead water 領域が形成されるとして渦崩壊のモデル化を行った。本研究で対象とする微細気泡発生ノズルは、旋回流が強く流れの全域が亜臨界の場合にも渦崩壊が発生するように設計されており、Benjamin の渦崩壊の定義は当てはまらない。すなわち、本ノズルでは、ノズル出口の曲率をコアンダ効果が発現するように設計されており、いわゆる「コアンダ効果により誘起された渦崩壊」となる。以上のことから、本研究では、Keller J. J. ら [2, 3] の渦崩壊の理論に沿って解析を行う。

本論文の構成は以下の通りである。第 2.1 節では、旋回流ジェットの開き角が 180 度以上の場合にも Bragg and Hawthorne 方程式 (B-H 方程式) の解が構成できるように、流線と流線に直交する座標系を導入する。第 2.2 節では、B-H 方程式の漸近解を求め、第 2.2.3 節で定常流の解を求める際の流出側境界条件を導く。第 2.3 節では、定常流の線形安定性を調べるための擾乱の支配方程式および境界条件を導く。第 2.4 節では、物理現象を説明するための解析方針について述べる。

## 2 旋回流ジェットの流れ場の基礎方程式

旋回型微細気泡発生ノズルでは、スワール数もしくは Squire 数がノズル内の全域 (縮流部を含む) で十分大きく、亜臨界状態であっても渦崩壊が発生する。この意味で、旋回型微細気泡発生用ノズルにおける渦崩壊は、Keller J. J. ら [2, 3] が提案したモデルで説明することができる。また、微細気泡発生効率は、ノズル出口のテーパ角が大きい、換言すると、旋回流ジェットの屈曲角が大きいほど微細気泡発生効率が上がることがわかっている。

### 2.1 渦あり流れに対する $\Psi$ - $\Phi$ 座標系表記

Keller J. J. らにしたがって、支配方程式は、非粘性軸対称定常流の渦度保存則 (B-H 方程式)

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = F, \quad F \equiv r^2 \frac{dH}{d\Psi} - C \frac{dC}{d\Psi} \quad (1)$$

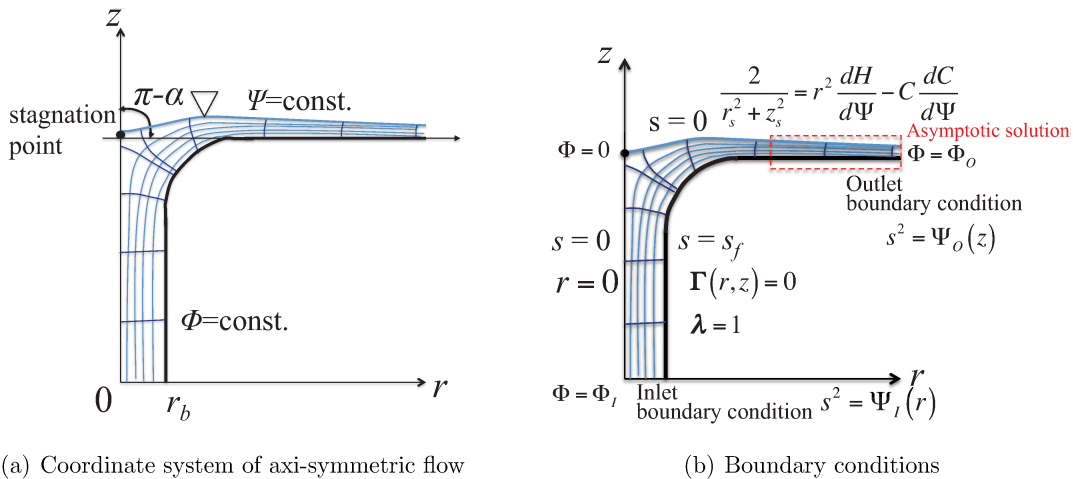


図 2: Streamlines and the orthogonal coordinate system in  $s-\Phi$  plane.

を用いる (Bragg and Hawthorne (1950)). ただし,

$$r u = C(\Psi), \quad v = -\frac{\partial \Psi}{r \partial z}, \quad w = \frac{\partial \Psi}{r \partial r}. \quad (2)$$

ここで,  $\Psi$  は流れ関数,  $z$  は軸対称軸,  $r$  は  $z$  軸に直交する半径方向距離,  $u, v, w$  はそれぞれ  $z$  軸周り,  $r$  方向,  $z$  方向の流速,  $H(\Psi)$  はベルヌーイ定数,  $C(\Psi)$  および  $H(\Psi)$  は流線上で一定であり, 境界を通過する流線については境界条件から決定される.

Fig. 2(a) に軸対称面における座標系および流線を示す. ノズル出口角部は曲率一定で壁面は  $z$  軸正方向から角度  $\pi - \alpha$  だけ屈曲する. Keller J. J. らは, 渦崩壊では  $z$  軸上に淀み点が現れ, 淀み点を通る流線上では流速が 0 となり, その流線 (自由流線) の外側は死水域となるとして流れ場の解析を行った. Keller J. J. らが提案したモデルは, 旋回型微細気泡発生用ノズル周りの流況の本質を捉えており [9], 本研究では彼らの方法に従って解析を進める.

Keller J. J. らは, 自由境界値問題を簡易に処理するために, 未知関数  $\Psi$  を変数とする座標変換 ( $r = r(z, \Psi)$ ) を行って, B-H 方程式を数値的に解いた. 本研究では, 屈曲角  $\theta$  が 90 度を超える場合も扱うため,  $\Psi = \text{const.}$  に直交する座標系  $\Phi = \text{const.}$  を次式

$$\Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0, \quad \Lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

を満たすように導入し, さらに  $\Psi, \Phi$  を独立変数として解析を行う. ここで,  $\Lambda$  はスケールファクターであり, B-H 方程式 (1) を満たすように決定される. 変数変換  $(r, z) \rightarrow (\Psi, \Phi)$  を行うと, 式 (3) は

$$\Lambda \frac{\partial z}{\partial \Psi} + \frac{\partial r}{\partial \Phi} = 0, \quad \Lambda \frac{\partial r}{\partial \Psi} - \frac{\partial z}{\partial \Phi} = 0 \quad (4)$$

となる. また, B-H 方程式 (1) は, 上記の変換を適用することで  $\Psi$  の微係数のみを含む方程式

$$\left\{ \left( \frac{\partial r}{\partial \Psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \Psi} \right)^2 \right\}^{-1} \left( \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \Psi} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \Psi} \right) = F \quad (5)$$

に変換される。上式は $\Lambda$ の $\Psi$ に関する微係数のみで表されるため、常微分方程式を解くことで未知関数 $\Lambda$ を陽的に求めることができ、

$$\Lambda = r \exp \left[ \int (r_{\Psi}^2 + z_{\Psi}^2) F d\Psi \right], \quad (6)$$

となる。渦なし流れの場合は $F = 0$ であり、 $\Lambda = \text{const.} \times r$ が解となる。

さて、自由流線上では流速が0となるため

$$v = -\frac{z_{\Psi}}{r(r_{\Psi}^2 + z_{\Psi}^2)} = 0, \quad w = \frac{r_{\Psi}}{r(r_{\Psi}^2 + z_{\Psi}^2)} = 0 \quad \text{at} \quad \Psi = 0 \quad (7)$$

が成り立つ。ここで、自由流線上で $\Psi = 0$ とした。式(7)が成立するためには、境界条件は

$$z_{\Psi} \rightarrow \infty, \quad r_{\Psi} \rightarrow \infty \quad (8)$$

となる。この境界条件の特異性を除去するために、Keller J. J.らは、 $\Psi$ から $\Psi^{1/2}$ に変数変換を行った。自由流線近傍の級数解を求めることで、彼らの方法を論証する。

自由表面の流線を $z = z_0(r)$ 、 $\Phi$ の値を $\Phi_0(r)$ とおくと、自由流線上で流速が0となる条件から自由流線近傍の解は、次式で与えられる。

$$\Psi \approx \frac{F|_{\Psi=0}}{2(1+z_0 r^2)} (z-z_0)^2, \quad \Phi \approx \Phi_0(r) + \frac{z_0 r \Phi_{0r}}{1+z_0 r^2} (z-z_0), \quad \Lambda \approx \frac{F|_{\Psi=0}}{\Phi_{0r}} (z-z_0) \quad (9)$$

上式から逆関数の微係数を計算すると、 $\Psi \propto (z-z_0)^2$ 、 $r_{\Psi}, z_{\Psi} \propto (z-z_0)^{-1}$ 、 $\Lambda \propto (z-z_0)$ 、 $\Lambda_{\Psi} \propto (z-z_0)^{-1}$ を得る。以上のことから、

$$r = r(s, \Phi), \quad z = z(s, \Phi), \quad \Lambda = s \lambda(s, \Phi), \quad s = \sqrt{\Psi} \quad (10)$$

とおくと、 $r_s, z_s, \lambda_s$ は有限値となり、式(9)の特異性が除去され、最終的な表示式は次式となる。

$$s \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} - \frac{r_s}{r} \right) = \frac{1}{2} (r_s^2 + z_s^2) F - 1, \quad (11)$$

$$r_{\Phi} + \frac{\lambda}{2} z_s = 0, \quad z_{\Phi} - \frac{\lambda}{2} r_s = 0. \quad (12)$$

式(11)で $s \rightarrow 0$ の極限を取ると、自由表面の境界条件

$$\frac{1}{2} (r_s^2 + z_s^2) F - 1 = 0 \quad \text{at} \quad s = 0 \quad (13)$$

が得られる。また、壁面形状を $\Gamma(r, z) = 0$ とおくと、壁面上の境界条件は、

$$\Gamma(r, z) = 0, \quad \text{at} \quad s = s_b \quad (14)$$

となる。最後に、 $\lambda$ には1つの境界条件を課すことができ、本研究では

$$\lambda = \text{const.}, \quad \text{at} \quad s = s_b \quad (15)$$

とする。以上をまとめると境界条件は、図2(b)で与えられる。

式(11)は、第1式から $\lambda$ を境界条件(15)のもとで解き、結果を式(12)に代入すれば、 $r$ と $z$ に対する方程式となる。この方程式は楕円型であるため、 $s-\Phi$ 平面の計算領域境界で1つの条件が与えられれば解は決定する。

## 2.2 定常流の簡単な解

本節では、定常解をニュートン・ラプソン法で計算する際に必要となる初期値および境界条件を求める。ここでは、陽的な解を提示するため無次元化した変数を用いる。

### 2.2.1 Rankine 渦

本ノズル内の流速分布の簡単なモデルとして Rankine 渦を考える。Rankine 渦の渦核の半径を  $r_{c0}$  とすると、渦核内  $r \leq r_{c0}$  では、

$$H = \frac{W^2}{2} \left( 1 + \frac{4\Omega^2}{W^3} \Psi \right), \quad C = \frac{2\Omega}{W} \Psi, \quad \text{for } r \leq r_{c0} \quad (16)$$

より、

$$F = \frac{2\Omega^2}{W} r^2 - \frac{4\Omega^2}{W^2} \Psi \quad \text{for } r \leq r_{c0} \quad (17)$$

となる。一方、渦核の外側  $r > r_{c0}$  では渦なしであり、 $F = 0$  となる。ここで、 $\Omega$  は渦核の角速度、 $W$  は  $z$  方向の流速である。パラメータを整理するために、以下の無次元化を行う。

$$r \rightarrow \frac{r}{r_{b0}}, \quad z \rightarrow \frac{z}{r_{b0}}, \quad s \rightarrow \frac{s}{\sqrt{\Psi_f}}, \quad \Phi \rightarrow \frac{\Phi}{\Psi_f}, \quad \Psi_f \equiv \frac{r_{b0}^2 W}{2}. \quad (18)$$

ここで、 $r_{b0}$  は管路の半径である。本節では上記の無次元化を行い、無次元化された変数を新たに定義せずに無次元化前の変数と同じ記号を用いて、方程式 (11)、(12) を表す。

$$s \left( \frac{\lambda_s}{\lambda} - \frac{r_s}{r} \right) = 2\bar{S}_q^2 (r^2 - s^2) (r_s^2 + z_s^2) - 1, \quad (19)$$

$$r_\Phi - \frac{\lambda}{2} z_s = 0, \quad z_\Phi + \frac{\lambda}{2} r_s = 0. \quad (20)$$

ここで、

$$\bar{S}_q = \begin{cases} S_q/r_c & r \leq r_c \\ 0 & r > r_c \end{cases} \quad (21)$$

ここで、Squire パラメータは  $S_q = r_{c0} \Omega / W$ 、 $r_c = r_{c0} / r_{b0}$  で定義される。座標変換後の変数  $s - \Phi$  座標系における境界条件を図 3 に示す。ここで、 $\Phi$  の基準を  $z$  軸と自由流線の交点に取り、そこでの値を  $\Phi = 0$  とした。未知関数  $\lambda$  は、 $r, z$  を使って陽的に表すことができるため、楕円型の微分方程式 (20) を境界条件を満たすように解けば良い。本研究では、基礎式を差分化し、非線形代数方程式をニュートン・ラプソン法により解く。

### 2.2.2 Hollow core vortex の漸近解

本節ではニュートン・ラプソン法で用いる初期値を求める。以下、空間座標は管路上流の様な管径  $r_{b0}$ 、流れ関数は  $r_{b0}^2 W / 2$  でそれぞれ正規化した変数を用いる。

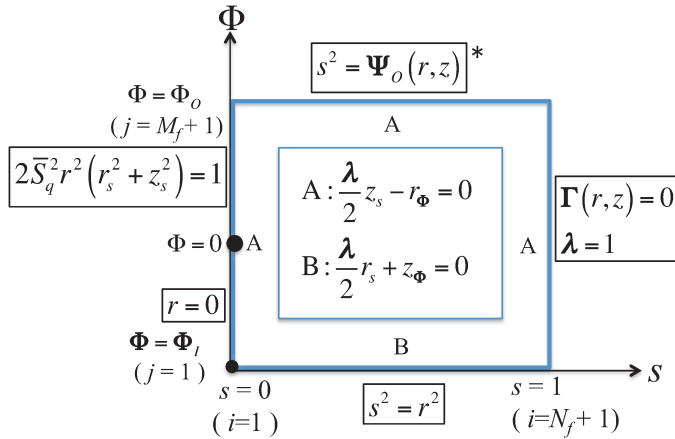


図 3: Boundary conditions in  $s - \Phi$  plane

解析的に近似解を求めるために、流れ関数の  $z$  方向の変化率が  $r$  方向の変化率に比べて無視できると仮定する。このとき、B-H 方程式は、

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{\partial \Psi}{r \partial r} + 4\bar{S}_q^2(\Psi - r^2) = 0 \quad (22)$$

となり、一般解は Bessel 関数を用いて表すことができる。管路の半径を  $r_b$ 、渦核の半径を  $r_c$ 、渦あり渦なしの境界面を  $r = r_i$ 、空洞半径を  $r_a$  とおくと、境界条件は流量の連続性より

$$\Psi_{rot}(r_a) = 0, \quad \Psi_{rot}(r_i) = r_c^2, \quad (23)$$

$$\Psi_{irrot}(r_b) = 1, \quad \Psi_{irrot}(r_i) = r_c^2, \quad (24)$$

となり、上記の境界条件を満たす解は次式で与えられる。

$$\Psi_{rot} = r^2 + \frac{r}{r_i} \frac{(r_c^2 - r_i^2)N_1(2r_a\bar{S}_q) + r_a r_i N_1(2r_i\bar{S}_q)}{J_1(2r_i\bar{S}_q)N_1(2r_a\bar{S}_q) - J_1(2r_a\bar{S}_q)N_1(2r_i\bar{S}_q)} J_1(2r\bar{S}_q) - \frac{r}{r_i} \frac{(r_c^2 - r_i^2)J_1(2r_a\bar{S}_q) + r_a r_i J_1(2r_i\bar{S}_q)}{r_i J_1(2r_i\bar{S}_q)N_1(2r_a\bar{S}_q) - J_1(2r_a\bar{S}_q)N_1(2r_i\bar{S}_q)} N_1(2r\bar{S}_q), \quad (25)$$

$$\Psi_{irrot} = \frac{r_b^2 r_c^2 - r_i^2 + (1 - r_c^2)r^2}{r_b^2 - r_i^2} \quad (26)$$

ここで、下付き添字の 'rot' および 'irrot' は、それぞれ渦あり、渦なし流れの解を表す。自由表面の半径  $r_a$ 、渦度の不連続面の半径  $r_i$  は、Keller にしたがって、流速の連続条件 (natural boundary condition)

$$\frac{\partial \Psi_{rot}}{r \partial r} \Big|_{r=r_a} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_{rot}}{r \partial r} \Big|_{r=r_i} = \frac{\partial \Psi_{irrot}}{r \partial r} \Big|_{r=r_i} \quad (27)$$

から決定される。

以上の解から、 $r_c$ 、 $r_b$  を与えて  $r_i$  および  $r_a$  を求めれば、局所的な流速場が計算される。Batchelor にしたがって、 $r_b$  が  $z$  の弱い関数であるとすれば、漸拡管路における渦崩壊の解

が得られる。本研究では、管路出口がテーパ状のときの渦崩壊を解析するために、管路半径を

$$r_b = 1 + A_s \{1 + \tanh(m_s z)\} + \frac{A}{m} [mz + \log\{2 \cosh(mz)\}] \quad (28)$$

で与える。この関数は、

$$r_b = 1 + 2A_s + 2Az \quad \text{as } z \rightarrow +\infty, \quad r_b = 1 \quad \text{as } z \rightarrow -\infty \quad (29)$$

を満たす。上記のパラメータ  $A$ ,  $A_s$ ,  $m$  および  $m_s$  を連続的に変化させることで、テーパを有しない解をニュートン・ラプソン法の初期値とすれば、テーパを有する解を解析接続により求めることが可能となる。

さて、 $r_b = 1$  で supercritical な Rankine 渦は、管路が漸拡すると管軸上に淀み点を持ち、その後 hollow core vortex となる。 $r_b = 1$  から淀み点までの解は、式 (25), (26) および (27) において  $r_a \rightarrow 0$  とすることで得られる。式 (25) は、

$$\Psi_{rot,up} = r^2 + (r_c^2 - r_i^2) \frac{r J_1(2\bar{S}_q r)}{r_i J_1(2\bar{S}_q r_i)} \quad (30)$$

となり、淀み点が現れる条件は

$$\left. \frac{\partial \Psi_{rot,up}}{r \partial r} \right|_{r=0} = 2 + 2\bar{S}_q \frac{r_c^2 - r_i^2}{r_i J_1(2\bar{S}_q r_i)} = 0, \quad \bar{S}_q = \frac{S_q}{r_c} \quad (31)$$

となる。上式と式 (27) の第 2 式を満たす  $r_b$  を与える  $z$  で淀み点が生じる。淀み点が生じると、それより下流では hollow core vortex となるため、 $r_a \neq 0$  の解から渦崩壊の解が構成される。

まず、淀み点における解の特性を見るために、 $S_q$  と  $r_i$  の関係式 (31) をプロットすると図 4(a) となる。この図より、淀み点では  $r_i/r_c > 1$  であるため、渦崩壊の解を構成するためには  $S_q < 1.9$  が必要であることがわかる。ここでは、 $S_q = 0.4$  とする。

次に、natural boundary condition:  $\partial \Psi_{rot,up}/\partial r|_{r=r_i} = \partial \Psi_{irrot,up}/\partial r|_{r=r_i}$  から、 $r_i, r_b$  を  $r_c$  の関数として求めると、図 5(a) が得られる。ここでは、例として  $r_c = 0.3$  とした。以上の結果から、半径 1 の一様な管路内の一様流中にある Rankine 渦が管路半径  $r_b$  の増加によって淀み点を生じるまでの解を構成することができる。同様に hollow core が発生した後の解  $r_a, r_i$  が、式 (27) の 2 式から算定され、 $r_b$  の関数として得られる (図 5(a))。また、漸近拡大管路における流れ関数は、 $r_b$  として式 (28) を用いると  $z$  の関数として与えられる (図 5(b))。図 6 は、淀み点および  $r_b = 2$  における断面内の軸方向および周方向流速を示す。ここで、破線は渦あり渦なしの界面位置を示す。渦崩壊後、管路径が大きくなるにしたがって、軸方向流速が支配的となる。

平行管路において以上の解をニュートン・ラプソン法の初期値として用いることで収束性を担保し、管壁がテーパとなるパラメータ  $A$  を 0 から増加させることで、急拡管路の渦崩壊の解を求めることができる。ただ、テーパ管の場合には  $z \rightarrow \infty$  における厳密解が得られないという問題があり、境界条件についての検討が必要となる。

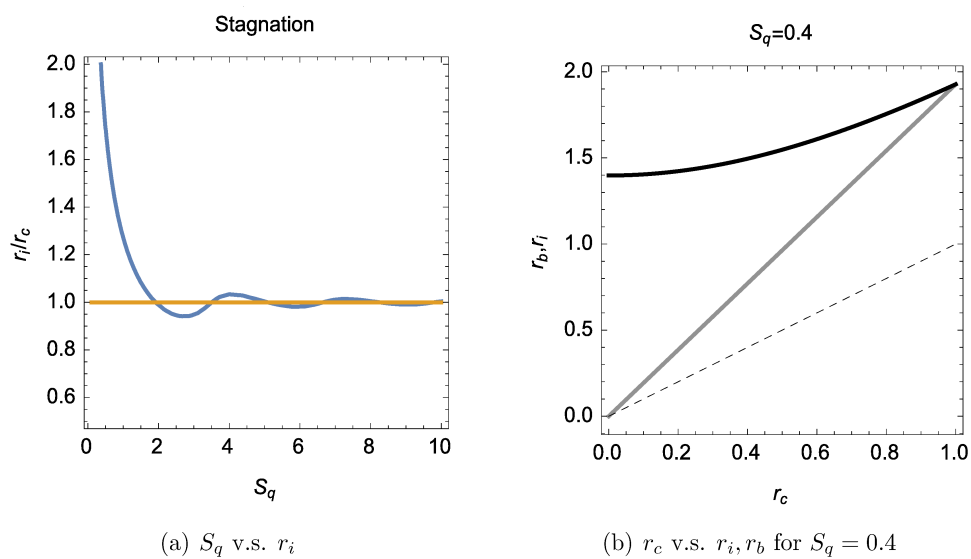


Figure 4:  $r_i$  as a function of  $S_q, r_c$  &  $r_b$  at the stagnation point

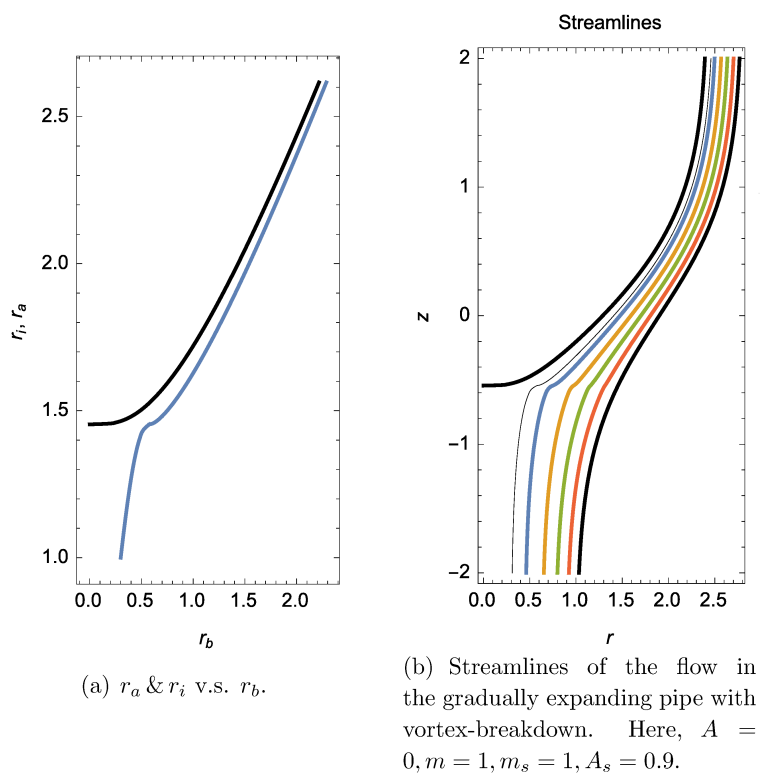


Figure 5: Hollow core vortex for  $S_q = 0.4$  &  $r_c = 0.3$ .



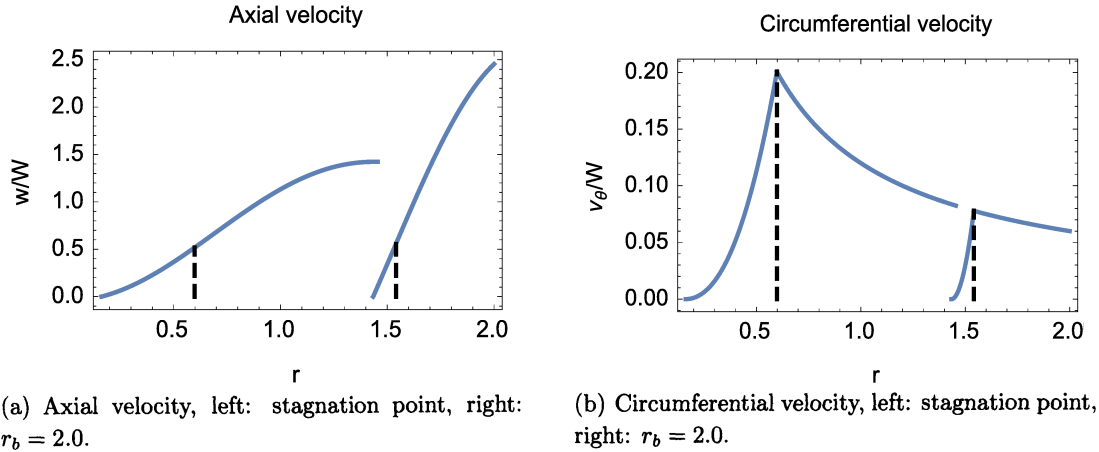


図 6: Velocity profile for  $S_q = 0.4$ , &  $r_c = 0.3$  at the stagnation point and  $r_b = 2.0$ .

### 2.2.3 定常流の流出側境界条件

流出側の境界条件について、簡単のために、剛体回転の渦について議論する。

流出側境界は式 (29) で与えられる。方程式 (1) の漸近解を求めるために、図 7 のように境界接線方向に  $l$  座標、法線方向に  $n$  座標を取ると、

$$r = r_b(\ell) - n \sin \alpha, \quad z = z_b(\ell) + n \cos \alpha, \quad r_b(\ell) = \ell \cos \alpha, \quad z_b(\ell) = \ell \sin \alpha - \frac{1 + 2A_s}{2A}, \quad (32)$$

となる。上記の座標変換  $(r, z) \rightarrow (\ell, n)$  により、方程式 (1) は

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \ell^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2} - \frac{1}{\ell \cos \alpha - n \sin \alpha} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \ell} \cos \alpha - \frac{\partial \Psi}{\partial n} \sin \alpha \right) - 4\tilde{S}_q^2 \{ (\ell \cos \alpha - n \sin \alpha)^2 - 4 \} = 0 \quad (33)$$

に変換される。境界条件は、

$$\Psi(\ell, 0) = 1, \quad \Psi(\ell, n_F) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n}(\ell, n_F) = 0 \quad (34)$$

である。ここで、 $n = n_F$  は自由表面を表す。

さて、 $r \rightarrow \infty$  における解が、 $l$  方向に緩やかに変化し、 $n$  方向に急激に変化するとすれば、

$$\Psi(n, \ell) = \Psi_0(n/\epsilon, \epsilon \ell) + \epsilon^2 \Psi_2(n/\epsilon, \epsilon \ell) + \dots, \quad n_F = n_{F0} + \epsilon^2 n_{F2} + \dots, \quad (35)$$

とおくことができる。ここで、 $\epsilon$  は摂動パラメータで微小量を表す。式 (35) を式 (1) に代入し、 $\epsilon$  の冪乗の項で整理すると、

$$\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial n^2} - 4\tilde{S}_q^2 \ell^2 \cos^2 \alpha = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial n^2} + \frac{\sin \alpha}{\ell \cos \alpha} \frac{\partial \Psi_0}{\partial n} + 4\tilde{S}_q^2 (\Psi_0 + 2\ell n \cos \alpha \sin \alpha) = 0 \quad (37)$$

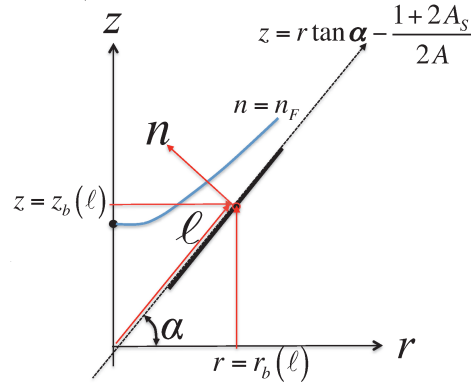


図 7: Local coordinates in  $l$ - $n$  plane

となる。また、境界条件は式 (34) より

$$\Psi_0(l, 0) = 1, \quad \Psi_0(l, n_{F0}) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_0}{\partial n}(l, n_{F0}) = 0, \quad (38)$$

$$\Psi_2(l, 0) = 0,$$

$$\Psi_2(l, n_{F0}) + n_{F2} \frac{\partial \Psi_0}{\partial n}(l, n_{F0}) = 0, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial n}(l, n_{F0}) + n_{F2} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial n^2}(l, n_{F0}) = 0 \quad (39)$$

となる。以上の式 (36)–(39) の解は、次式で与えられる。

$$\Psi_0(l, n) = 1 - 2\sqrt{2}\tilde{S}_q n l \cos \alpha + 2\tilde{S}_q^2 n^2 l^2 \cos^2 \alpha, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(l, n) = & \frac{\sqrt{2}\tilde{S}_q n}{2l} \sec \alpha + \tilde{S}_q n^2 (-2\tilde{S}_q + \sqrt{2} \sin \alpha) \\ & + \frac{\sqrt{2}}{3} \tilde{S}_q^2 n^2 l (4\tilde{S}_q - 3\sqrt{2} \sin \alpha) \cos \alpha - \frac{2}{3} \tilde{S}_q^4 n^4 l^2 \cos^2 \alpha, \end{aligned} \quad (41)$$

$$n_{F0} = \frac{\sqrt{2} \sec \alpha}{2\tilde{S}_q l}, \quad (42)$$

$$n_{F2} = \frac{(\sqrt{2}\tilde{S}_q + 6 \sin \alpha) \sec^3 \alpha}{24\tilde{S}_q^2 l^3}. \quad (43)$$

上記の解は、 $\alpha \rightarrow \pi/2$  では発散するため近似解とはならない。この解の適用範囲を、微分方程式の誤差および  $\alpha = \pi/2$  のときの厳密解と比較することで同定する。図 8(a) は、 $\epsilon$  の 2 次まで考慮した近似解を基礎方程式 (1) に代入し、方程式中の主要項  $\partial^2 \Psi / \partial n^2$  で割ることで定義した誤差を示す。 $r_b > 2$  で誤差は、1% 以下となる。また、hollow core の半径  $r_a$  も  $r_b \geq 1.5$  で、一様流の解にほぼ一致することがわかる。以上の結果より、ここで求めた漸近解は、 $\alpha < 7\pi/16$  の広い範囲で適用可能であると考えられる。

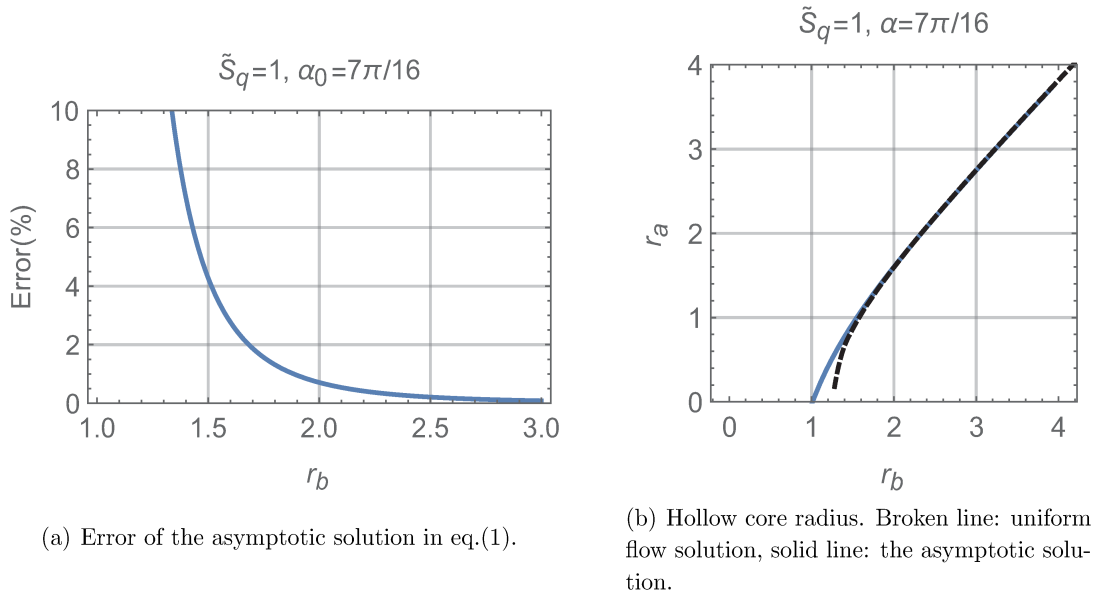


図 8: Error Estimate of the asymptotic solution. Here,  $\alpha = 7\pi/16$ ,  $\tilde{S}_q = 1$ .

同様に Rankine 渦の解は、次式で与えられる。

$$\Psi_{rot0}(\ell, n) = \frac{(1+r_c^2)^2}{4r_c^2} - \sqrt{2}\frac{1+r_c^2}{r_c}\tilde{S}_q \ell n \cos \alpha + 2\tilde{S}_q^2 \ell^2 n^2 \cos \alpha, \quad (44)$$

$$\Psi_{irrot0}(\ell, n) = 1 - 2\sqrt{2}r_c\tilde{S}_q \ell n \cos \alpha, \quad (45)$$

$$n_{F0} = \frac{\sqrt{2}(1+r_c^2)}{4r_c\tilde{S}_q \ell} \sec \alpha, \quad (46)$$

$$n_{i0} = \frac{\sqrt{2}(1-r_c^2)}{4r_c\tilde{S}_q \ell} \sec \alpha, \quad (47)$$

$$\Psi_{rot2}(\ell, n) = -\frac{2}{3}\tilde{S}_q^4 \ell^2 n^4 \cos^2 \alpha + \frac{\sqrt{2}(1+3r_c^2+2r_c^6)\tilde{S}_q n}{12r_c^3 \ell} \sec \alpha \quad (48)$$

$$-\frac{(1+r_c^2)(1+5r_c^2)(1-r_c^2)^2}{96r_c^4 \ell^2} \sec^2 \alpha + \frac{2\tilde{S}_q^2 \{\sqrt{2}\tilde{S}_q(1+r_c^2) - 3r_c \sin \alpha\} \ell n^3}{3r_c} \cos \alpha \quad (49)$$

$$-\frac{\tilde{S}_q(1+r_c^2)\{\tilde{S}_q(1+r_c^2) - \sqrt{2}r_c \sin \alpha\} n^2}{2r_c^2}, \quad (50)$$

$$\Psi_{irrot2}(\ell, n) = \frac{\sqrt{2}\tilde{S}_q r_c n \{r_c^2 + \ell n \sin(2\alpha)\}}{2\ell} \sec \alpha, \quad (51)$$

$$n_{F2} = \frac{\sqrt{2}\tilde{S}_q r_c^3 (3-r_c^2) + 3(1+r_c^2)^2 \sin \alpha}{48\tilde{S}_q^2 r_c^2 \ell^3} \sec^3 \alpha, \quad (52)$$

$$n_{i2} = \frac{(1-r_c^2)\{\sqrt{2}\tilde{S}_q r_c^3 + (1-r_c^2) \sin \alpha\}}{16\tilde{S}_q^2 r_c^2 \ell^3} \sec^3 \alpha. \quad (53)$$

上式で  $r_c = 1$  とすれば、剛体渦の解に一致する。上式中の  $(\ell, n)$  を式 (32) を使って  $r, z$  に逆変換すれば、 $r$ - $z$  平面における解が得られる。

## 2.3 定常解の安定性

### 2.3.1 基礎方程式

円筒座標系におけるオイラーの運動方程式を基礎方程式として、 $(r, z)$  から  $(s, \Phi)$  に変数変換する。その後、 $r$ - $z$  方向の流速を  $s$ - $\Phi$  方向の流速で表し、さらに  $s$ - $\Phi$  方向の運動方程式を導く。

まず、円筒座標系における運動方程式は、

$$\frac{\partial r v_z}{\partial z} + \frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (54)$$

$$\frac{D v_z}{D t} + \frac{\partial p}{\rho \partial z} = 0, \quad (55)$$

$$\frac{D v_r}{D t} - \frac{v_\theta^2}{r} + \frac{\partial p}{\rho \partial r} = 0, \quad (56)$$

$$\frac{D v_\theta}{D t} - \frac{v_r v_\theta}{r} + \frac{\partial p}{\rho r \partial \theta} = 0, \quad (57)$$

$$\frac{D}{D t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial}{r \partial \theta}, \quad (58)$$

である。定常流の安定性を調べるため、解を定常解と変動成分の和で表わす。

$$v_z = v_{z0} + \epsilon A_z \exp(im\theta - i\omega t), \quad (59)$$

$$v_r = v_{r0} + \epsilon A_r \exp(im\theta - i\omega t), \quad (60)$$

$$v_\theta = v_{\theta 0} + \epsilon A_\theta \exp(im\theta - i\omega t), \quad (61)$$

$$p = p_0 + \epsilon A_p \exp(im\theta - i\omega t). \quad (62)$$

上式を基礎方程式に代入し  $\epsilon$  の 1 次の項を取り出すことで変動成分の支配方程式が得られる。すなわち、式 (59)-(62) を式 (54)-(57) に代入し、 $\epsilon$  の 1 次の項を取り出し、運動方程式および流速の  $s, \Phi$  方向成分を求めると、以下の行列表記の方程式が得られる。

$$\mathbf{M}_s \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} + \mathbf{M}_\Phi \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \Phi} + \mathbf{M} \mathbf{q} = 0. \quad (63)$$

ここで、未知関数  $\mathbf{q}$  は、 $s$ - $\Phi$  座標系における摂動流速の振幅で次式で定義される。

$$\mathbf{q} = (A_s, A_\Phi, A_\theta, A_p), \quad (64)$$

$$A_s = (A_r, A_z) \cdot \mathbf{e}_s, \quad A_\Phi = (A_r, A_z) \cdot \mathbf{e}_\Phi, \quad (65)$$

$$\mathbf{e}_s = \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|}, \quad \mathbf{e}_\Phi = \frac{\mathbf{\Phi}}{|\mathbf{\Phi}|}, \quad \mathbf{s} = \left( \frac{\partial r}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s} \right), \quad \mathbf{\Phi} = \left( \frac{\partial r}{\partial \Phi}, \frac{\partial z}{\partial \Phi} \right). \quad (66)$$

また、式 (63) の係数行列は、上記と同様に  $\mathbf{e}_s$  および  $\mathbf{e}_\Phi$  方向の運動方程式から決定され、次式で与えられる。

$$\mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_\Phi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{\kappa h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4s}{\kappa r h} & 0 & \frac{2}{\rho \kappa} \\ \frac{4s}{\kappa r h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4s}{\kappa r h^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (67)$$

また,

$$M = \begin{bmatrix} \frac{(-1+2h)\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \kappa}{\partial s}}{h^2} + \frac{\partial r}{r h} + \frac{\partial \kappa}{\kappa h} & \frac{2(-1+2h)\frac{\partial h}{\partial \Phi} - \frac{\partial z}{\partial s}}{\kappa h^2} - \frac{\partial z}{r h} & \frac{i m}{r} & 0 \\ \frac{2}{r h} + \frac{4s r(-1+h)\frac{\partial h}{\partial s}}{r^2 h^2} - \frac{2s\frac{\partial r}{\partial s}}{r^2 h} + \frac{2s\frac{\partial \kappa}{\partial s}}{\kappa r h} & \frac{i m \gamma h}{r} - i \omega h + \frac{4s(-3+2h)\frac{\partial h}{\partial \Phi}}{\kappa r h^2} + \frac{2s\frac{\partial z}{\partial s}}{r^2 h} & \frac{2\gamma\frac{\partial z}{\partial s}}{r^2} & 0 \\ \frac{i m \gamma h}{r} + i \omega h + \frac{4s(-1+2h)\frac{\partial h}{\partial \Phi}}{\kappa r h^2} & -\frac{4s\frac{\partial h}{\partial s}}{r h} - \frac{4s\frac{\partial \kappa}{\partial s}}{\kappa r h} & -\frac{2\gamma\frac{\partial r}{\partial s}}{r^2} & 0 \\ \frac{1}{r h} \frac{d\gamma}{ds} & 0 & \frac{i m \gamma}{r} - i \omega - \frac{2s\frac{\partial z}{\partial s}}{r^2 h^2} & \frac{i m}{\rho r} \end{bmatrix} \quad (68)$$

となる. ここで,  $h \equiv |s|$  とおいた. また, 方程式を整理するに当たって, 定常解の表式

$$v_{r0} = -\frac{2s}{h^2} \frac{\partial r}{\partial s}, \quad v_{z0} = \frac{2s}{h^2} \frac{\partial z}{\partial s}, \quad v_{\theta 0} = \frac{\gamma(s)}{r} \quad (69)$$

を代入した.

### 2.3.2 境界条件

擾乱に対する境界条件は,  $\Phi = 0$  における流入,  $\Phi \rightarrow \infty$  における流出条件, また,  $s = 1$  における固体壁上の流線条件, 最後に,  $s = \epsilon\eta$  における dead water 境界の運動学および力学的条件である. 変数  $s$  および  $\Phi$  における境界条件の数は, それぞれ行列  $M_s$  および  $M_\Phi$  の階数に等しい.

まず, dead water 境界の運動学条件および力学的条件は,

$$\frac{D}{Dt}(s - \epsilon\eta)|_{s=\epsilon\eta}, \quad p|_{s=\epsilon\eta} = 0, \quad (70)$$

である. 境界変位が微小な場合を対象とするため,

$$\eta = A_\eta(\Phi) \exp(im\theta - i\omega t), \quad (71)$$

とおくと, 式 (70) から,

$$A_s - v_{\Phi 0} \frac{\partial A_\eta}{\partial s} + \left( i\omega - imv_{\theta 0} + \frac{\partial v_{s0}}{\partial s} \right) A_\eta = 0 \quad \text{at } s = 0, \quad (72)$$

$$A_p + \frac{\partial p_0}{\partial s} A_\eta = 0 \quad \text{at } s = 0 \quad (73)$$

となる. 上式から  $A_\eta$  を消去し, natural boundary conditions,  $v_{\theta 0}(0, \Phi) = v_{\Phi 0}(0, \Phi) = 0$ , を考慮すると

$$\frac{\partial p_0}{\partial s} A_s - \left( i\omega + \frac{\partial v_{s0}}{\partial s} \right) A_p = 0 \quad \text{at } s = 0 \quad (74)$$

が得られる. また, 固体壁上の境界条件は,

$$A_s = 0 \quad \text{at } s = 1 \quad (75)$$

である.

流出側の境界条件は, 流れが固体壁に沿って流下方向の変化率が壁面法線方向の変化率に比べて無視できるとすれば,

$$M_s \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} + M \mathbf{q} = 0. \quad (76)$$

を満たす. この方程式は 2 つの境界条件 (74), (75) を与えることで解が決定される.

## 2.4 旋回型マイクロバブル発生ノズルによる渦の形成

本節では、渦核の歳差運動に関係する実験結果を示すことで、今後の解析方針について述べる。

### 2.4.1 旋回流発生ベーンによる流れ

図9に旋回型マイクロバブル発生ノズル縮流部における軸方向および周方向流速の実験結果を示す。図中の実線は実験式

$$v_z = W_1 + W_2 \exp\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right), \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{r} \left\{ 1 - \exp\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right) \right\} \quad (77)$$

による近似曲線である。渦核半径はおよそ1 mm、周方向流速の最大値は17 m/s、軸方向流速は噴流となっている。また、旋回流ベーン直下流、 $0 < z < 5$  mmの渦核半径は、 $z > 5$  mmの渦核半径よりもわずかに小さいが、縮流部全域にわたって渦核半径は変わらず平衡状態にある。渦核に噴流が形成される理由は、非粘性流体では渦度が流体粒子と共に移流されるためである。また、一般的には、縮流によって渦核の伸長・渦の集中が発生するため、渦核が平衡状態にある理由は、渦の集中と粘性拡散が釣り合っている状態と解釈することもできる。一方で、流速場が亜臨界流れの場合には、ノズル出口の最小断面において平衡状態にある渦核が上流に伝播するため、渦核の大きさなどの渦構造が最小断面で決定されている可能性がある。

上記の流速場を境界条件として定常流の解を求め、その不安定モードの固有関数および固有周期が、渦核の歳差運動の周期と一致するかなどについて調べることで、歳差運動の解明を試みる予定である。

### 2.4.2 旋回流ジェットの屈曲による気柱内圧力の低下

渦核のノズル前面での屈曲による渦核内の圧力低下について、実験結果から考察する。図10は、流量が8.1 L/minの場合のノズル内壁における圧力の計測値を示す。給気孔における気柱圧は-74 kPa、ノズル縮流部壁面における圧力は47 kPaから漸減し、ノズル前面でほぼ大気圧となる。また、ノズル出口の角部で気柱が壁面に接触する位置では負圧となっている。ノズル出口近傍で低圧気体が高圧に曝されることで、気柱が微粒化される。本ノズルでは高圧部は大気圧であり上限が決まっているため、気柱内圧が低い程、微粒化が促進される。

図11に示すように、簡単のため、hollow core vortexが直角に屈曲する場合について気柱内圧を評価する。運動量の定理から、

$$\rho S_{Jet} V_{Jet}^2 + \rho S_{Out} V_{Out}^2 + F_p \approx 0 \quad (78)$$

$$F_p \equiv (S_{Jet} + S_{Out}) p_{core} + \left\{ \frac{S_{Jet} + S_{Out}}{2} + \frac{2S_{Air}}{\pi} \log\left(\frac{S_{Jet} + S_{Out} + S_{Air}}{S_{Air}}\right) \right\} \rho V_{\theta M}^2 \quad (79)$$

が得られる。ここで、 $V_{Jet}$ ,  $V_{Out}$  は、それぞれ噴流部とその外側の軸方向流速、 $V_{\theta M}$  は周方向流速の最大値である。また、ノズル前面で流れが壁面に沿うとして  $z$  方向の運動量の流出を 0、壁面上の圧力を大気圧であるとした。さらに、歳差運動と同じ角速度で回転する座標系で見たときに流れは定常となるとして、検査領域内の運動量の時間変化率を 0 とした。これらの仮定の中で、壁面上の圧力による力の軸方向成分は、ノズル内壁の曲率が緩やかに変化する場合には無視できない。以上のことから、気柱内圧  $p_{core}$  は負圧で、テーパ角が大きく角部の曲率が大きいほど、負圧が増大することがわかる。

より詳細な議論は、今後の数値解析により、進めることとする。

### 2.4.3 Keller モデルの流速分布と渦度

Keller モデルによると、淀み点を通過する自由流線上では速度が 0 となる。図 12 は、この境界条件にしたがって求めた場合のノズル前面の流速分布の概略図を示す。スパイラル型の渦崩壊に伴うノズル中心への吸い込み流れが、ノズル前面の剪断流による渦による誘起速度に対応していることがわかる。以上のことから、Keller モデルを非軸対称流に拡張することにより、スパイラル型の渦崩壊および歳差運動が説明できるのではないかと考えられる。

### 2.4.4 渦核の歳差運動と渦の自己誘起速度

旋回型マイクロバブル発生ノズル内の流れは、集中した渦核を持つ渦糸が支配的な役割を担うと考えられる。ただ、先に述べたように、本ノズルで生成する渦は、半無限領域に存在するため、ビオ・サバルの法則は適用できない。一方で、渦糸の自己誘起速度によって渦糸自身が運動しているとすると、歳差運動は鏡像位置にある渦の流速によって引き起こされていることになる。実際、歳差運動の角速度は渦核外縁の流体粒子の速度に比べて 1 オーダー小さいため、自己誘起速度によって歳差運動が引き起こされているという仮定は実験結果に矛盾しない。

歳差運動の角速度を予測する上で重要なのが、この歳差運動はノズルの形状が決まると、極めて安定的に決定され、流量の線形関数で近似されることである。例えば、旋回型マイクロバブル発生ノズルの給気量を変えても歳差運動の角速度はほとんど変化しない。以上のことから、歳差運動は、自己誘起速度という局所的な値はなく、角運動量などの大域的な値で決定されると考えられる。

## 3 まとめ

エネルギー損失を伴わない「コアンダ効果による渦崩壊」の基本的な考え方および基礎方程式を示した。今後は、これらの方程式を精査することおよび数値解析を行うことで、より確実な理論を構築したい。流れ場の解析に目処が立った後は、気柱の運動方程式を導き、音波の解析を行う予定である。

## 参考文献

- [1] Benjamin, T. B., Theory of the vortex breakdown phenomenon, *J. Fluid Mech.*, vol. 14, pp. 593-629, 1962.
- [2] Keller and Egli, Force- and loss-free transitions between flow states, *ZAMP*, v. 35, pp. 854-889, 1985.
- [3] Keller and Egli, Vortex breakdown as a fundamental element of vortex dynamics, *ZAMP*, v. 39, pp. 404-440, 1988.
- [4] Buntine, J. D. and P. G. Saffman, Inviscid swirling flows and vortex breakdown, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol. 449, pp. 139-153, 1995.
- [5] Kuigin, Okulov, *Phys. Fluids*, v. 10, n. 3, pp. 607-614, 1998.
- [6] Alekseenko, Kuibin, Okulov, Shtork, Helical vortices in swirl flow, *J. Fluid Mech.*, v. 382, pp. 195-243, 1999.
- [7] Lucca-Negro, O. and T. O' Doherty, Vortex breakdown: a review, *Progress in Energy and Combustion Science*, vol. 27, pp. 431-481, 2001.
- [8] 山田, 坂入, 金子, 京藤, 空気吸込み渦の崩壊に伴う微細気泡の生成, 日本流体力学会年会, AM05-24-002, 2005.
- [9] 京藤, 塩田, コアングダ効果により誘起される渦崩壊と渦笛, 日本流体力学会年会, AM14-001, 2014.
- [10] Litvinov et. al., Experimental study and analytical reconstruction of precessing vortex in a tangential swirler, *Int. J. Heat Fluid Flow*, v. 42, pp. 251-264, 2013.



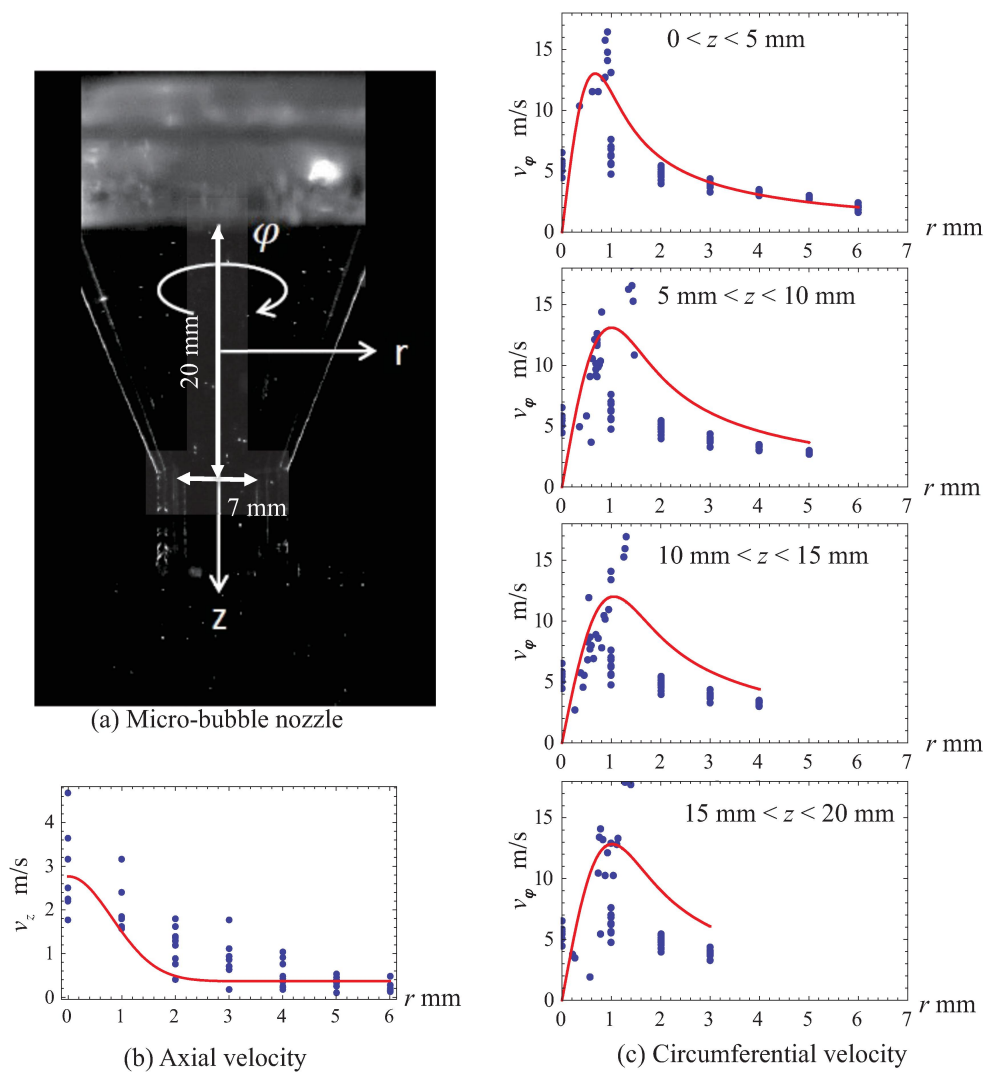


Figure 9: Velocity distributions in the micro-bubble nozzle. Nozzle exit diameter is 7 mm, the discharge is 5.0 L/min. Here, the mean velocity at the nozzle exit is 2.4 m/s. Precession frequency is 241 Hz, while the maximum circulation frequency is around 2400 Hz.

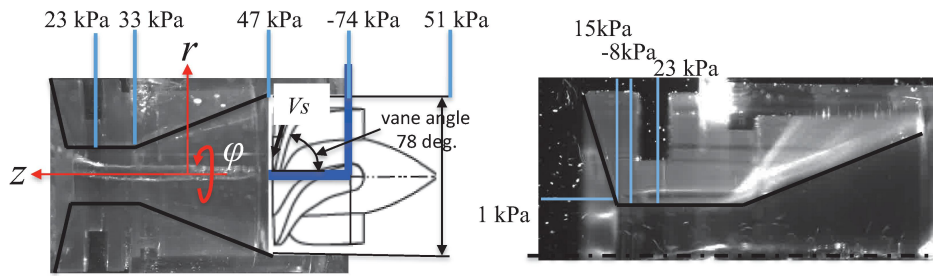


図 10: Pressure distribution inside the nozzle. The water discharge is 8.1 L/min (30Hz), i. e., the mean velocity at the nozzle exit is 3.5 m/s, and no air is supplied from the air supply tube. Precession frequency is 400 Hz. The left and the right hand side figures respectively show the pressures inside the nozzle and at the nozzle exit.

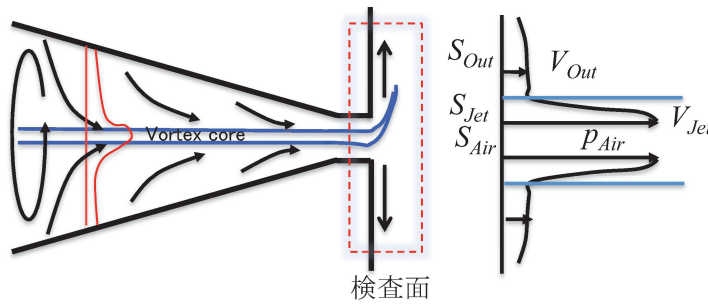


図 11: Control volume for the momentum conservation law at the nozzle exit

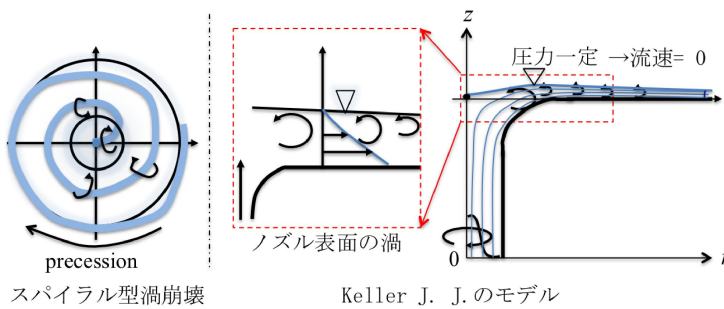


図 12: Vortex structure due to Keller's model and spiral-type vortex breakdown