

水面波に対する Davies 近似とその改良

茨城大学 理学部 数学・情報数理領域 村重 淳 (Sunao Murashige)

Department of Mathematics and Informatics, Ibaraki University

概要

一方向に波形を変えずに進む定常進行水波の非線形近似解を解析的に求める方法として, Davies 近似 [2][6, §15.59] が知られている. この近似の特徴は, 広範囲の波長と波高に対して適用できることである. 本研究では, Davies 近似の高次近似による精度の改良と, 非定常問題への拡張について考えた. その結果, 高次 Davies 近似解は長波近似解より厳密解への収束が速いことがわかった. また, 等角写像を用いて流場を複素平面上の矩形領域に写すことにより, Davies 近似を非定常問題に拡張できることを示した.

1 はじめに

本研究では, 水波の非線形近似解を求める方法として Davies 近似に焦点を当てる. Davies [2, 3] は, Fig.1 のような一方向に一定速度で波形を変えずに進む定常進行波の問題を, 次式で定義される複素対数速度 $w = \tau + i\theta$ を用いて複素速度ポテンシャル f 平面上で定式化し, 自由表面条件に含まれる $\sin \theta$ を $\frac{1}{3} \sin 3\theta$ で近似することにより, 解析的に非線形近似解を求めることができることを示した.

$$w = \tau + i\theta = \log \frac{c}{w} = \log \frac{c}{df/dz} \quad (1)$$

ここで, c は水波の進行速度, $w = u - iv = qe^{-i\theta} = df/dz$ は複素速度, $z = x + iy$ は複素座標を表し, $\tau = \log(c/q)$, $\theta = \arctan(v/u)$ である. 定常進行波の自由表面上の θ は波面の傾きに対応するので, Davies 近似 $\sin \theta \sim \frac{1}{3} \sin 3\theta$ は波傾斜の比較的小さい波に対して有効である. Davies 近似の特徴として, (i) Stokes 波近似や長波近似と比べて広範囲の波長と波高に適用できる, (ii) 解の特異性が考慮されている, (iii) 解の調和性が保たれている, などがあげられる. そこで本研究では, これらの特徴を活かして, Davies 近似の高次近似による精度の改良と, 非定常問題への拡張を考える.

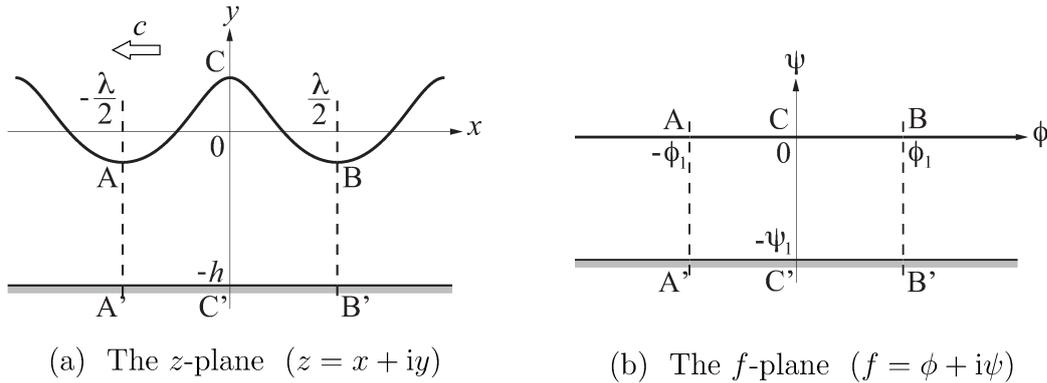


Fig.1 Two-dimensional motion of periodic waves progressing in permanent form with constant speed c on water of constant depth h .

2 定常進行波の Davies 近似

2.1 定式化

Fig.1 のような、水深が一定の水路の水面上を一方向（負の x 軸方向）に一定速度 c で波形を変えずに進む水波（定常進行波）の運動について考える。このとき、Fig.1(a) の xy 座標のように波と一緒に動く座標系では、水波の運動は 2 次元的で定常である。さらに、流体は非粘性・非圧縮で、流場は渦無しであると仮定すると、複素速度ポテンシャル $f (= \phi + i\psi)$ を導入できる。ここで、 ϕ は速度ポテンシャル、 ψ は流れ関数を表す。この 2 次元定常問題は、Fig.1(a) の $ABB'A'$ で囲まれた流場を Fig.1(b) のような f 平面上の矩形領域に等角写像で写して定式化することができる。その際、(1) で定義される複素対数速度 $\omega = \tau + i\theta$ を従属変数として採用すると便利である。 $\omega = \omega(f)$ は f 平面上の流場（矩形領域 $ABB'A'$ ）で正則で、水面上の境界条件（自由表面条件）は次のように表すことができる。

$$\frac{\partial \tau}{\partial \phi} - \frac{g}{c^3} e^{3\tau} \sin \theta = 0 \quad \text{on } \psi = 0 \quad (2)$$

ここで、 g は重力加速度を表す。この境界条件 (2) は Levi-Civita の自由表面条件とよばれ、水面上の Bernoulli の式を水面に沿って ϕ で微分することにより導くことができる [6, §14.65]。また、水底の境界条件と周期的境界条件は、それぞれ次のように与えられる。

$$\theta = 0 \quad \text{on } \psi = -\psi_1 \quad (3)$$

$$\theta = 0 \quad \text{on } \phi = \pm\phi_1 \quad (4)$$

2.2 Davies 近似

Davies [2, 3] は, 水面上の θ は小さいという仮定のもとで, 自由表面条件 (2) に含まれる $\sin \theta$ を

$$\sin \theta \sim \frac{1}{3} \sin 3\theta \quad (5)$$

のように近似し, (2) を

$$\frac{\partial \tau}{\partial \phi} - \frac{g}{c^3} e^{3\tau} \frac{1}{3} \sin 3\theta = 0 \quad \text{or} \quad \text{Re} \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial f} + i \frac{g}{3c^3} e^{3\omega} \right\} = 0 \quad \text{on } \psi = 0 \quad (6)$$

のように変形すると, 定常進行波の近似解を解析的に求めることができることを示した. 特に, 深水波の近似解は次のように表すことができる [2, 7].

$$\omega_{\text{deep}}(f) = -\frac{1}{3} \log(1 - \beta e^{-i2\pi f/(c\lambda)}) \quad (7)$$

ここで, λ は波長を表し, $\beta = 1 - e^{-3\tau_{\text{crest}}} = 1 - (q_{\text{crest}}/c)^3$, $F_\lambda = c/\sqrt{g\lambda} = 1/\sqrt{2\pi}$ である. また, Packham [10] は孤立波に対して Davies 近似を適用し, 次のような定常進行波の近似解を求めた.

$$\omega_{\text{solitary}}(f) = -\frac{1}{3} \log \left[1 - \sin^2 \mu \pi \cdot \text{sech}^2 \left\{ \frac{\mu \pi}{2ch} (f + ich) \right\} \right] \quad (8)$$

ここで, h は水深を表し, μ は $F^2 \mu \pi = \tan \mu \pi$ をみたすパラメータ, $F = c/\sqrt{gh}$ である.

Fig.2 は, 深水波と孤立波の波形をそれぞれ近似解 (7) と (8) を用いて計算した例を表す. いずれの場合も, 波高の増加とともに波の山付近の波形の変化が急峻になり, 最大波高に達すると頂点に内角 120 度の角が形成される. この性質は, 厳密解の場合と一致する. したがって, Davies 近似は深水波から孤立波まで適用可能で, 微小振幅波から最大波高の波まで扱うことができる.

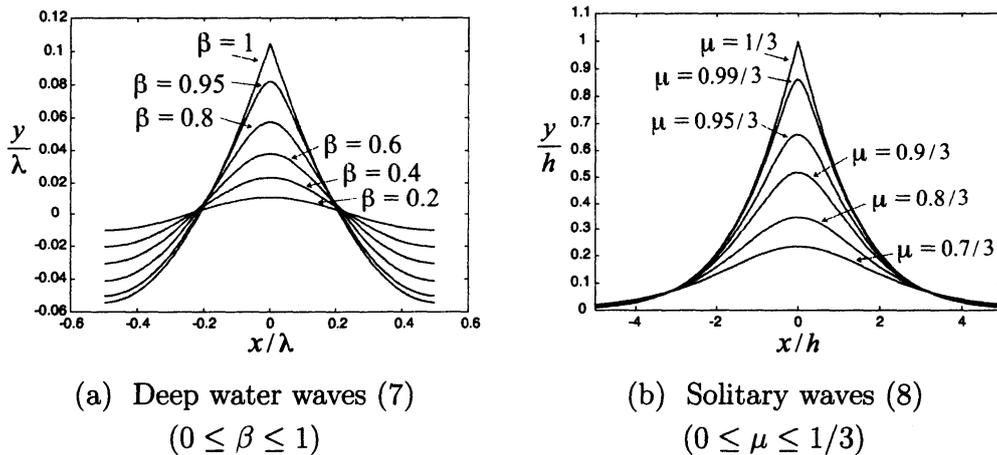


Fig.2 Wave profiles of Davies' approximate solutions (7) and (8).

3 高次近似による精度の改良

3.1 高次 Davies 近似

Davies [2] は自由表面条件 (2) に含まれる $\sin \theta$ の近似精度を改良するために、公式 $\sin \theta = \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{4}{3} \sin^3 \theta$ を次のように繰り返し適用する方法を提案した。

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{4}{3} \sin^3 \theta \\ &= \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{4}{3} \sin^3 \theta \right)^3 \\ &= \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{4}{3} \left\{ \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{4}{3} \sin^3 \theta \right)^3 \right\}^3 \\ &\sim \frac{1}{3} \sin 3\theta + \frac{4}{81} \sin^3 3\theta + \frac{16}{729} \sin^5 3\theta + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

この近似は次のように整理することができる。

$$\sin \theta \sim S_M(\theta) := \sum_{m=0}^M A_m (\sin 3\theta)^{2m+1} \quad (10)$$

ここで、 $A_0 = 1/3$, $A_1 = 4/81$, $A_2 = 16/729$, \dots ,

$$A_m = \frac{4}{3} \sum_{i=0}^{m-1} \left\{ A_{m-1-i} \left(\sum_{j=0}^i A_j A_{i-j} \right) \right\} \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (11)$$

自由表面条件 (2) の (10) による近似、すなわち

$$\frac{\partial \tau}{\partial \phi} - \frac{g}{c^3} e^{3\tau} S_M(\theta) = 0 \quad \text{on } \psi = 0 \quad (M = 1, 2, \dots) \quad (12)$$

を M 次の Davies 近似、あるいは高次 Davies 近似とよぶ ($S_M(\theta)$ は (10) の中で定義されている)。Davies [2] は、深水波に対して $M = 2$ の場合の近似解を解析的に求めた。しかし、さらに高次の近似解、あるいは水深が有限の場合の高次 Davies 近似解 ($M \geq 2$) のは得られていない。一般に高次の Davies 近似解を解析的に得ることは容易ではないので、本研究では数値的に求めることを試みた。次節では、孤立波に対する高次 Davies 近似解の計算例を示す。

3.2 孤立波に対する高次 Davies 近似解

Fig.3 のような、一定速度 c で波形を変えずに進む孤立波の高次 Davies 近似解の計算結果を示す。特に、孤立波の長波近似解と強非線形解をそれぞれ数値計算で求め、高次 Davies 近似解との比較を行う。長波近似は KdV 方程式を与える標準的な近似法であるが、本研究では Davies 近似と比較するために複素速度ポテンシャル f 平面における自由表面条件 (2) に長波近似を適用する。 f 平面における長波近似の導出を 3.2.1 節にまとめる。また、強非線形解とは、自由表面条件を近似せずに数値計算で求めた高精度近似解のことであり、厳密解とみなすことができる。

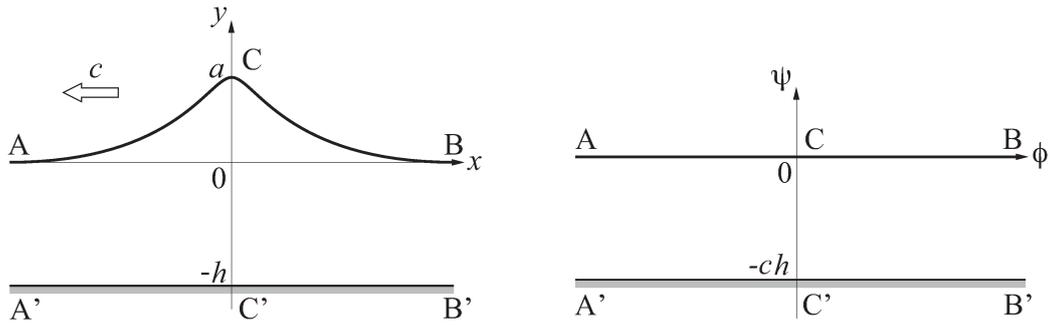
(a) The z -plane ($z = x + iy$)(b) The f -plane ($f = \phi + i\psi$)

Fig.3 Conformal mapping for two-dimensional motion of solitary waves.

3.2.1 複素速度ポテンシャル f 平面における長波近似

複素速度ポテンシャル f 平面における長波近似解は、次のように導くことができる。まず、解 $\omega(f) = \tau(\phi, \psi) + i\theta(\phi, \psi)$ を水底 ($\psi = -ch$) を中心に Taylor 展開すると、次のように表すことができる。

$$\omega(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\{i(\psi + ch)\}^n \frac{d^n}{d\phi^n} \right] \tilde{\tau}(\phi) \quad (13)$$

ここで、 $\tilde{\tau}(\phi) = \tau(\phi, \psi = -ch)$ は水底における τ を表す。(13) を自由表面条件 (2) に代入し、長波近似の仮定

$$\frac{d^n \tilde{\tau}}{d\phi^n} = O(\epsilon^{n+2}) \quad (14)$$

と弱非線形性の仮定

$$\tilde{\tau} = O(\epsilon^2) \quad (15)$$

に基づき展開する。ここで、 ϵ は水深 h と水平方向の代表長さ λ の比 h/λ のオーダーの微小パラメータを表す。さらに、

$$\frac{d^{2N+1} \tilde{\tau}}{d\phi^{2N+1}} = O(\epsilon^{2N+3}) \quad (N = 1, 2, \dots) \quad (16)$$

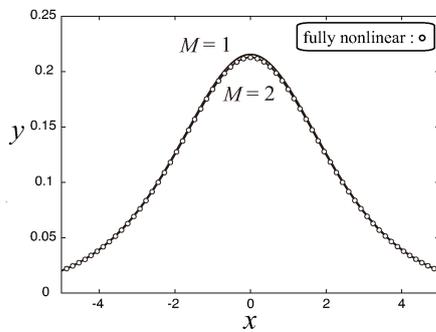
より高次の項を打ち切ると $\tilde{\tau}(\phi)$ に対する常微分方程式を得ることができる。この近似方程式の解を N 次の長波近似解とよぶ (詳細は [8])。特に、 $N = 1$ のときの長波近似解は解析的に求めることができ、次式で与えられる。

$$\tilde{\tau}(\phi) = \frac{F^2 - 1}{F^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3(F^2 - 1)}{1 + \frac{3}{2}(F^2 - 1)}} \cdot \frac{\phi}{ch} \right) \quad (17)$$

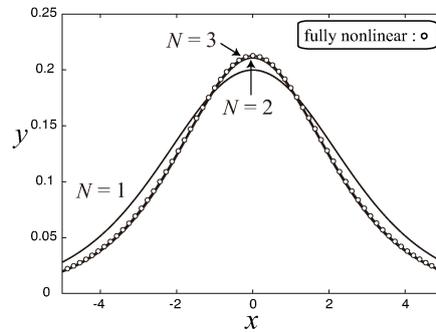
ここで、 $F = c/\sqrt{gh}$ は Froude 数を表す。この近似解 ($N = 1$) は、KdV 方程式の解に対応する。 $N \geq 2$ の場合の長波近似解は、本研究では数値計算を用いて求めた。

3.2.2 波形の比較

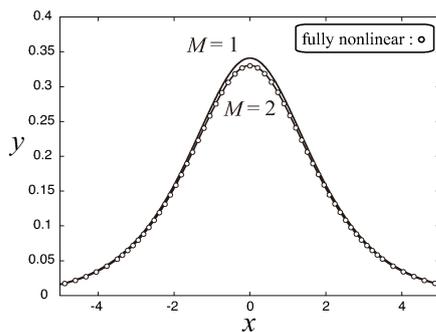
M 次の Davies 近似解と N 次の長波近似解を用いて求めた孤立波の波形が、次数 M , N とともに厳密解に収束する様子を Fig.4 にまとめる。図中の白丸 \circ で示した強非線形解は、自由表面条件を近似せずに数値的に求めた高精度近似解であり、厳密解とみなすことができる（計算方法と精度については [8]）。Figs.4 (a),(b),(c),(d) はそれぞれ Froude 数 $F = 1.1, 1.15, 1.25, 1.27$ の結果を表しているが、この Froude 数の範囲では波振幅、波の進行速度、エネルギーは単調に増加する。Fig.4 より、比較的高い波に対して、高次 Davies 近似解は長波近似より厳密解への収束が速いことがわかる。このことは、波形だけではなく、運動エネルギー密度の比較でも同じような結果が得られた [8]。したがって、高次 Davies 近似の方が長波近似より低い次数で精度のよい近似解が得られる。その理由の一つとして、Davies 近似では解領域（流場）の外側に存在する解の特異性を考慮していることがあげられる [7]。



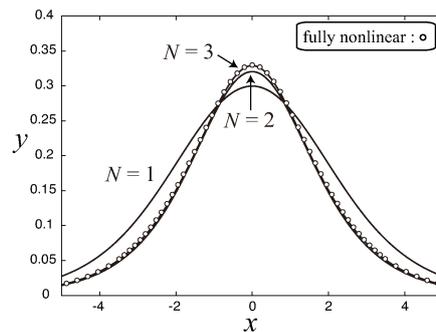
(a.1) Davies' approximation



(a.2) Long wave approximation

(a) $F = 1.1$ 

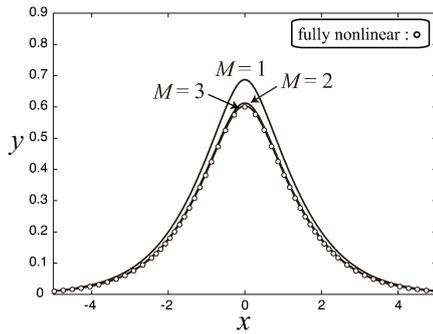
(b.1) Davies' approximation



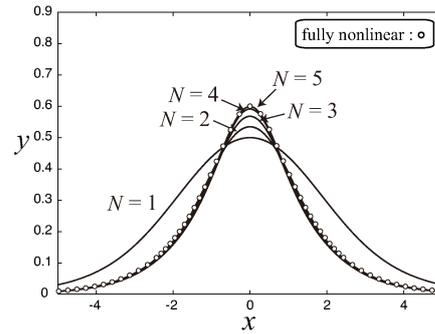
(b.2) Long wave approximation

(b) $F = 1.15$

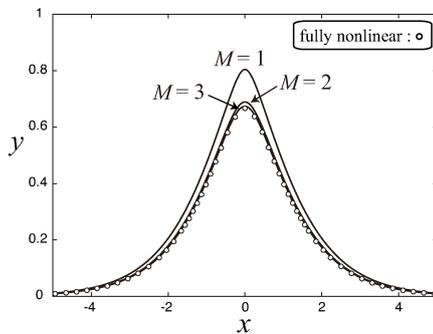
Fig.4 Comparison of wave profiles. $F = c/\sqrt{gh}$: the Froude number, M : the order of Davies' approximation, N : the order of long wave approximation and circle \circ : the fully nonlinear solution. x and y are normalized by h .



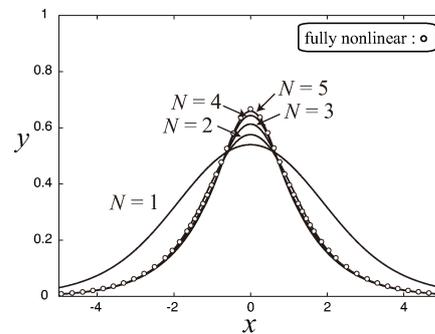
(c.1) Davies' approximation



(c.2) Long wave approximation

(c) $F = 1.25$ 

(d.1) Davies' approximation



(d.2) Long wave approximation

(d) $F = 1.27$

Fig.4 Continued.

4 非定常水波問題への拡張

2.2 節で説明した Davies 近似は複素速度ポテンシャル f 平面における自由表面条件 (2) に対する近似であるため、その適用は定常進行波に限られてきた。一方、Fig.5(a) のような波形が時間とともに変化する非定常水波問題に対して、Ovshannikov [9], Dyachenko *et al.* [4], Choi and Camassa [1] らは、流場を時間変動する等角写像を用いて Fig.5(b) のような矩形領域に写して解を求める方法を提案した。本節では、この矩形領域における自由表面条件に Davies 近似のアイデアを適用することにより、非定常問題に対しても Davies 近似を拡張できることを示す。

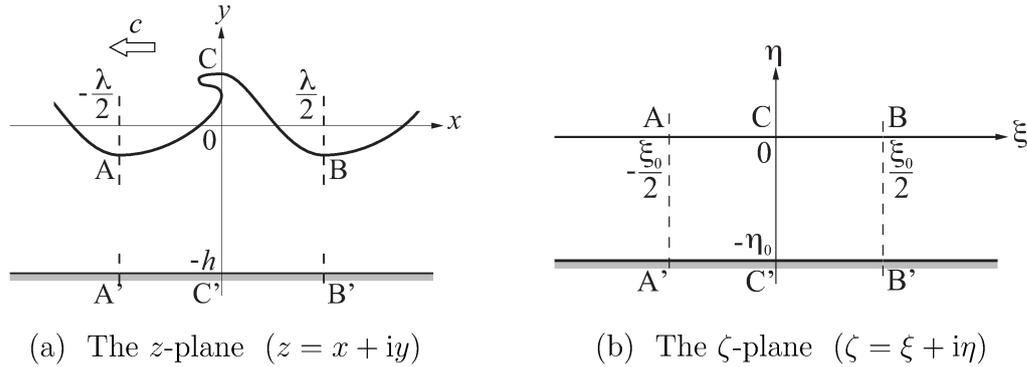


Fig.5 Conformal mapping of the flow domain of unsteady two-dimensional motion of water waves onto a rectangular region $ABB'A'$ in the ζ -plane.

Fig.5(a) のように一方向に進む水波の非定常運動は、水平方向の周期性を仮定すると、流場を等角写像を用いて Fig.5(b) のような新しい複素平面 (ζ 平面) 上の矩形領域 $ABB'A'$ 上に写して定式化できる [1, 4, 5, 9]. ζ 平面上の流れを表す従属変数として、複素速度ポテンシャル $f = f(\zeta, t) = \phi(\xi, \eta, t) + i\psi(\xi, \eta, t)$ と複素座標 $z = z(\zeta, t) = x(\xi, \eta, t) + iy(\xi, \eta, t)$ を採用する. このとき、自由表面 $\eta = 0$ 上の運動学的境界条件と力学的境界条件は、それぞれ次のように表される.

$$y_t + \frac{1}{J}x_\xi\psi_\xi + y_\xi \cdot \mathcal{T} \left[\frac{1}{J}\psi_\xi \right] = 0 \quad \text{on } \eta = 0 \quad (18)$$

$$\phi_t + \phi_\xi \cdot \mathcal{T} \left[\frac{1}{J}\psi_\xi \right] + \frac{1}{2J}(\phi_\xi^2 - \psi_\xi^2) + gy = C(t) \quad \text{on } \eta = 0 \quad (19)$$

ここで、下付きの添字は $y_t = \partial y / \partial t$ のように添字で表した変数に関する偏微分を、 $C(t)$ は時間 t のみに依存する任意関数を表し、 J は

$$J = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad (20)$$

を表す. また、(19) に含まれる $\mathcal{T}[\cdot]$ は正則関数 $G = G(\zeta, t) = G_r(\xi, \eta, t) + iG_i(\xi, \eta, t)$ の虚部 G_i を実部 G_r にうつす変換を表す. さらに、 $f = f(\zeta, t)$ と $z = z(\zeta, t)$ はそれぞれ流場で正則であるので、それらの実部と虚部 (ϕ と ψ , あるいは x と y) は Cauchy-Riemann の微分方程式で関係づけられることに注意する. Dyachenko *et al.* [4] は深水波に対して、Choi and Camassa [1] は有限水深の水の波に対して、Li *et al.* [5] らは孤立波に対して、自由表面条件 (18) と (19) をみたす f と z の計算方法を示している.

次に、Levi-Civita の自由表面条件 (2) の導出と同様に、自由表面上の力学的境界条件 (19) を水面 ($\eta = 0$) に沿って ξ に関して微分すると、次式を得る.

$$\phi_{\xi t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\phi_\xi \cdot \mathcal{T} \left[\frac{1}{J}\psi_\xi \right] \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{2J}(\phi_\xi^2 - \psi_\xi^2) \right\} + gy_\xi = 0 \quad \text{on } \eta = 0 \quad (21)$$

上式の左辺の最後の項に含まれる y_ξ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} y_\xi &= y_\xi \cdot \frac{x_\xi^2 + y_\xi^2}{x_\xi^2 + y_\xi^2} = \frac{1}{x_\xi^2 + y_\xi^2} \cdot (x_\xi^2 y_\xi + y_\xi^3) \\ &= \frac{1}{J} \cdot \frac{1}{3} \left(\text{Im} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^3 \right\} + 4y_\xi^3 \right) \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、Davies 近似と同様に水面の傾きは小さいと仮定する、すなわち上式で $|y_\xi|$ は微小であると仮定すると、 y_ξ は次のように近似することができる。

$$y_\xi \sim \frac{1}{3J} \text{Im} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^3 \right\} \quad (23)$$

これを (21) に適用すると、次のような力学的境界条件の近似を得ることができる。

$$\begin{aligned} \phi_{\xi t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\phi_\xi \cdot \mathcal{T} \left[\frac{1}{J} \psi_\xi \right] \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{1}{2J} (\phi_\xi^2 - \psi_\xi^2) \right\} + g \frac{1}{3J} \text{Im} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^3 \right\} = 0 \\ \text{on } \eta = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

(18) と (24) が Davies 近似の非定常問題への拡張であることは、次のようにして確認できる。まず、波形を変えずに一定速度 c で進む定常進行波の場合、自由表面上で ψ は一定で、

$$\partial_t = 0, \quad \phi_\xi = c\xi, \quad \psi_\xi = 0 \quad (25)$$

である。したがって、運動学的条件 (18) はみたされる。力学的条件 (24) は

$$-\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{2} \log J \right) + \frac{g}{c^2} \frac{1}{3} \text{Im} \left\{ \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right)^3 \right\} = 0 \quad \text{on } \eta = 0 \quad (26)$$

のように変形できる。さらに、

$$\log J = \log(x_\xi^2 + y_\xi^2) = 2 \text{Re} \left\{ \log \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) \right\} \quad \text{and} \quad \phi_\xi = c\xi \quad (27)$$

を用いると、(26) は定常進行波に対する Davies 近似 (6) の形に変形できる。したがって、定常進行波に対して Davies 近似 (6) と一致するので、(18) と (24) は Davies 近似の非定常水波問題への拡張と考えることができる。

5 まとめ

本研究では、水波の運動の近似法として Davies 近似に焦点を当て、その改良を試みた。Davies 近似のアイデアは、複素速度ポテンシャル平面における定常進行波の自由表面条件 (2) に含まれる $\sin \theta$ を $\frac{1}{3} \sin \theta$ で近似することにより、非線形近似解を解析的に求めることである。この近似法は、標準的な近似法である Stokes 波近似や長波近似と比べて、波長や波高に関する適用範囲が広いという特徴がある。しかし、波高が大きい場合は精度が低いことと、一定速度で波形を変えずに進む定常進行波に適用範囲が限られると

いう問題点がある。そこで、本研究では、高次近似による精度の改良と、非定常問題への拡張を試みた。その結果、(10) のような $\sin \theta$ の展開を用いて高次 Davies 近似を考えると、孤立波の場合は長波近似より厳密解への収束が速いことがわかった。その理由としては、Davies 近似では解領域（流場）の外側に存在する解の特異性が考慮されていることがあげられる。また、非定常水波問題の場合も、Fig.5 のように流場を矩形領域に等角写像を用いて写すことにより、Davies 近似の拡張 (18) と (24) を得ることができるとわかった。

Davies 近似の長所は、定常進行波に対して他の近似解と比べて精度のよい非線形近似解を解析的に求めることができることである。今後は、この特徴を活かした Davies 近似の非定常問題への応用を考える予定である。

参考文献

- [1] Choi, W. and Camassa, R. : Exact evolution equations for surface waves, *J. Eng. Mech.*, vol.125, pp.756–760, 1999.
- [2] Davies, T.V. : The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude. I, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol.208, pp.475–486, 1951.
- [3] Davies, T.V. : Gravity waves of finite amplitude. III. Steady, symmetrical, periodic waves in a channel of finite depth, *Quarterly of Applied Mathematics*, vol.10, pp.57–67, 1952.
- [4] Dyachenko, A.I., Kuznetsov, E.A., Spector, M.D. and Zakharov, V.E. : Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping), *Phys. Lett. A*, vol.221, pp.73–79, 1996.
- [5] Li, Y.A., Hyman, J.M. and Choi, W. : A numerical study of the exact evolution equations for surface waves in water of finite depth, *Stud. Appl. Math.*, vol.113, pp.303–324, 2004.
- [6] Milne-Thomson, L.M. : *Theoretical hydrodynamics*, 5th ed., §14.65, §15.59, Dover, 1968.
- [7] Murashige, S. : Davies' surface condition and singularities of deep water waves, *J. Eng. Math.*, vol.85, pp.19–34, 2014.
- [8] Murashige, S. and Choi, W. : High-order Davies' approximation for a solitary wave solution in Packham's complex plane, *SIAM J. Appl. Math.* (to appear)
- [9] Ovshannikov, L.V. : To the shallow water theory foundation, *Arch. Mech.*, vol.26, pp.407–422, 1974.
- [10] Packham, B.A. : The theory of symmetrical gravity waves of finite amplitude. II. The solitary wave, *Proc. R. Soc. Lond. A*, vol.213, pp.234–249, 1952.